Thèse

présentée à

l'École des Mines de Paris

par

Philippe Renard

en vue de l'obtention du titre de

Docteur en Hydrologie et Hydrogéologie Quantitatives

Modélisation des écoulements en milieux poreux hétérogènes

Calcul des perméabilités équivalentes

Soutenue le 9 décembre 1996 devant le jury composé de :

G. de Marsily	Président
P. Davy	Rapporteur
R. Mackay	Rapporteur
E. Ledoux	Directeur de thèse
P. Ackerer	Examinateur
A. Galli	Examinateur
G. Le Loc'h	Examinateur
B. Nœtinger	Examinateur

Avant-propos et Remerciements

L'étude de la perméabilité équivalente des milieux poreux hétérogènes est un sujet largement étudié par la communauté des hydrogéologues, des ingénieurs de réservoirs et plus généralement chez tous les physiciens des milieux poreux. Pourquoi alors une thèse de plus sur le sujet ?

Tout d'abord, parce qu'il n'existe pas encore de solution définitive au problème, seulement des solutions qui sont en général d'autant meilleures qu'elles coûtent cher en temps calcul et en moyens informatiques nécessaires pour leur mise en œuvre.

Ensuite, parce que la nécessité d'évaluer les incertitudes sur les résultats des modèles de transfert en milieux poreux hétérogènes impose un besoin en méthodes de changement d'échelle d'autant plus fort que la description des milieux hétérogènes tend à être de plus en plus détaillée.

Également parce que, même si le calcul de la perméabilité équivalente n'est pas suffisant pour résoudre les problèmes de transport, c'est une étape préliminaire absolument incontournable. Nous sommes persuadés que plus ce calcul sera réalisé avec soin, plus les étapes suivantes permettant de décrire n'importe quel phénomène nécessitant la connaissance de la perméabilité à grande échelle pourront être réalisées avec exactitude. Nous pensons en particulier aux phénomènes de transport, transport réactif, écoulement polyphasique, etc.

Enfin, une motivation importante de la thèse est de fournir un état de l'art des méthodes existantes et de donner à l'utilisateur des arguments objectifs lui permettant de choisir la méthode adaptée à son problème. Bien sûr ce travail n'est pas terminé. Mais il ne peut en être autrement, chaque mois qui passe voit la publication de nouvelles techniques.

C'est grâce au soutien financier de la Commission des Communautés Européennes, dans le cadre du projet *Joule II, Geoscience*, que cette thèse a pu être réalisée. Ainsi j'ai eu la chance de participer à un travail collectif, étroite collaboration entre les chercheurs de trois laboratoires : le Centre d'Informatique Géologique et le centre de Géostatistique de l'École des Mines de Paris et le Water Resources Research Unit de l'Université de Newcastle.

C'est tout naturellement que mes premiers remerciements vont à Émmanuel Ledoux, directeur du Centre d'Informatique Géologique de l'École des Mines de Paris. C'est lui qui a dirigé cette thèse, toujours avec humour et compétence. La confiance et la liberté qu'il m'a accordées m'ont donné beaucoup de plaisir à travailler en sa compagnie.

Je dois beaucoup à Ghislain de Marsily. L'intérêt qu'il a montré pour mon travail m'a énormément encouragé. Je le remercie tout particulièrement de m'avoir invité à l'Université de Stanford et de m'avoir apporté son soutien et sa collaboration pour la rédaction de l'article de synthèse bibliographique. Je tiens également à remercier Madame Gunila de Marsily qui a eu la tâche ingrate de traduire cet article.

Cette thèse ne serait pas ce qu'elle est sans Gaëlle Le Loc'h, Patrick Goblet et Alain Genty. Je remercie chaleureusement Gaëlle pour notre collaboration quotidienne et amicale, pour les nombreuses idées et la richesse des remarques dont elle a nourri ma réflexion. Patrick est celui que j'ai le plus malmené. Auteur du modèle numérique *TRIMULEC*, c'est toujours avec le sourire qu'il en a assuré le "service après-vente" et je tiens à lui exprimer ici ma reconnaissance. Sans Alain le chapitre sur les écoulements diphasiques n'aurait pas vu le jour. Qu'il en soit sincèrement remercié.

Merci à Philippe Ackerer pour m'avoir fourni les données expérimentales qui m'ont permis de réaliser l'étude de la perméabilité équivalente d'un milieu hétérogène réel.

Également un grand merci à tous les membres du jury : Ghislain de Marsily qui l'a présidé ; Rae Mackay de l'Université de Newcastle et Philippe Davy de l'université de Rennes qui en ont été les rapporteurs ; Philippe Ackerer de l'Institut de Mécanique des Fluides de Strasbourg, Alain Galli, Emmanuel Ledoux et Gaëlle Le Loc'h de l'École des Mines de Paris et Benoit Nœtinger de l'Institut Français du Pétrole.

Je voudrais citer aussi un grand nombre d'amis et de collègues qui ont participé de près ou de loin, directement ou à travers leurs écrits à ce travail : Rachid Belmouhoub pour les aspects mathématiques, Marie-Paule Bonnet, Dominique Bruel pour son aide quotidienne, Claude Doussan, Sophie Dufresne, Stéphanie Even qui m'a accueilli dans son bureau avec beaucoup d'hospitalité, Éric Fillion, Chantal de Fouquet qui m'a donné à plusieurs reprises l'occasion de présenter mes travaux, Yann Gautier pour ses conseils sur la renormalisation tensorielle, Catherine Golaz, David Griffin qui a réalisé, à l'Université de Newcastle, les calculs en différences finies utilisés pour l'étude du biais numérique, Jan van der Lee qui m'a poussé à la programmation en C++ et m'a initié à LaTeX, André Levassor pour sa relecture attentive et sa connaissance de l'histoire de l'hydrogéologie, Benoit Paris, Michel Poulin pour sa curiosité tous azimuts, pour les footings et autres escalades en forêt et plus sérieusement pour les discussions au sujet du perméamètre tensoriel, Chris Roth, Xavier Sánchez-Vila, Alexandre Toma dont l'érudition et l'esprit critique m'ont beaucoup stimulé et Xian-Huan Wen.

Enfin, ces remerciements ne seraient pas complets sans mentionner le soutien fourni tout au long de ces trois années par toute ma famille provençale et chaumontaise à qui je dédie affectueusement cette thèse et en particulier à Hélène et Denis qui ont effectué un travail considérable de relecture.

Cély, le 6 Avril 1997

Notations

k, f	Notations en caractères maigres : scalaire
$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{K}$	Notations en gras : tenseur
$\cdot$	Produit scalaire : $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z$
$\times$	Produit vectoriel : $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = (u_y v_z - u_z v_y, u_x v_z - u_z v_x, u_y v_z - u_z v_y)$
$\boldsymbol{\nabla}$	Opérateur nabla : $(\frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial y},\ \frac{\partial}{\partial z})$
grad	Opérateur gradient : $\mathbf{grad}\, h = \nabla h = (\frac{\partial h}{\partial x},\ \frac{\partial h}{\partial y},\ \frac{\partial h}{\partial z})$
div	Opérateur divergence : $\mathrm{div}(\boldsymbol{u}) = \nabla \cdot \boldsymbol{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$
$<>$	Opérateur prise de moyenne
$E()$	Espérance mathématique
$C()$	Covariance
σ^2	Variance
$\sigma^2_{\ln k}$	Variance du logarithme de k
μ_a	Moyenne arithmétique
μ_h	Moyenne harmonique
μ_g	Moyenne géométrique
μ_p	Moyenne d'ordre p

D	Nombre de dimension d'espace	[sans dimension]
ω	Porosité	[sans dimension]
μ	Viscosité dynamique	$[ML^{-1}T^{-1}]$
ρ	Masse volumique	$[ML^{-3}]$
$k, \boldsymbol{k}$	Perméabilité locale isotrope ou anisotrope	$[LT^{-1}]$
h, H	Charge hydraulique	$[L]$
$\boldsymbol{K}_{eq}$	Tenseur de perméabilité équivalente	$[LT^{-1}]$
$\boldsymbol{K}_{ef}$	Tenseur de perméabilité effective	$[LT^{-1}]$
$\boldsymbol{K}_b$	Tenseur de perméabilité de bloc	$[LT^{-1}]$
T	Transmissivité	$[L^2T^{-1}]$
$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{U}$	Vitesse (de filtration) de Darcy	$[LT^{-1}]$
p	Pression	$[ML^{-1}T^{-2}]$
g	Accélération due à la pesanteur	$[LT^{-2}]$

Chapitre 1

Introduction

" Dans l'effort que nous faisons pour comprendre le monde, nous ressemblons quelque peu à l'homme qui essaie de comprendre le mécanisme d'une montre fermée. Il voit le cadran et les aiguilles en mouvement, il entend le tic-tac, mais il n'a aucun moyen d'en ouvrir le boîtier. "

A. Einstein et L. Infeld

Cette thèse s'inscrit dans le cadre des recherches menées sur la prise en compte de l'hétérogénéité dans les modèles numériques d'écoulements en milieux poreux souterrains. L'objectif poursuivi est de développer des méthodes permettant de passer d'une grille fine de perméabilité à une grille grossière de perméabilités équivalentes.

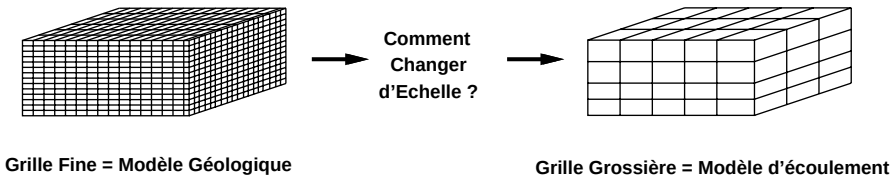


FIG. 1.1 : *Le problème*

Pourquoi s'intéresse-t-on à ce problème ?

De la modélisation des écoulements souterrains ...

La modélisation des écoulements souterrains est un outil qui permet de répondre à de nombreuses questions pratiques liées à l'approvisionnement en eau, la gestion de l'environnement, l'extraction pétrolière ou encore le génie civil. Dans tous ces cas, la modélisation se base sur la résolution d'équations issues des lois décrivant le transport de matière, éventuellement de chaleur, et un des principaux thèmes de recherche actuel est d'y coupler les équations décrivant la chimie (voire la biochimie) des éléments transportés. Mais tous ces modèles nécessitent comme prérequis la

connaissance des vitesses d'écoulements des fluides dans le milieu. C'est-à-dire la résolution d'un problème dont la loi phénoménologique est la loi de Darcy.

Il est donc primordial de bien connaître le paramètre de base qui entre dans cette équation : la perméabilité. On bute alors sur deux difficultés. La première est que les milieux naturels sont hétérogènes. La mesure de la perméabilité en un point et à une certaine échelle ne nous permet pas de déterminer avec certitude la perméabilité en un autre point, à la même échelle ou en ce point à une autre échelle. La deuxième est purement pratique : il n'est pas possible de mesurer la perméabilité partout.

Pour pallier ces difficultés, plusieurs voies ont été empruntées par les hydrogéologues ou les ingénieurs de réservoirs. L'une permet d'éviter le problème de changement d'échelle. Les perméabilités sont déterminées directement sur la grille représentant le modèle d'écoulement par calage manuel ou par des méthodes inverses.

. . .au problème de changement d'échelle

L'autre voie consiste à réaliser un "modèle géologique" décrivant le milieu souterrain avant de simuler l'écoulement. Pour engendrer un modèle géologique, de nombreuses techniques ont été proposées.

Parmi ces techniques, la géostatistique permet, dans un contexte probabiliste, l'estimation des perméabilités dans l'espace à partir de mesures locales. Mais, en toute rigueur, la réalisation du modèle doit être menée à l'échelle du support de la mesure. Sachant que les volumes d'investigation sont de l'ordre du dm^3 pour des mesures de perméabilité en laboratoire, la grille obtenue pourra contenir de 10^{11} à 10^{18} mailles selon la taille du réservoir (Tran 1995).

Une technique radicalement différente consiste à simuler les processus sédimentaires à l'origine des roches réservoirs. Elle aboutit également à des grilles contenant plusieurs millions de mailles.

Or les logiciels de simulation des écoulements sont actuellement limités à quelques millions de mailles au grand maximum et sont le plus souvent utilisés avec quelques milliers de mailles.

Au moins dans les deux cas de modèles géologiques présentés ci-dessus, on est donc contraint à passer à une échelle supérieure, c'est à dire à regrouper des mailles de perméabilités différentes et à affecter à la macro-maille une perméabilité équivalente calculée à partir des perméabilités locales. C'est cette opération qui est appelée changement d'échelle pour la perméabilité. Elle pose problème car la perméabilité n'est pas une grandeur additive : la moyenne des perméabilités dans un volume n'est pas égale à la perméabilité moyenne du volume.

Les domaines d'application

Les techniques de changement d'échelle pour la perméabilité ont deux domaines d'application principaux.

Actuellement, il s'agit essentiellement de l'industrie pétrolière. Les techniques de génération de modèles géologiques et de changement d'échelle y sont utilisées couramment et le plus souvent dans un contexte stochastique de type simulation de Monte-Carlo (figure 1.2). Plusieurs réalisations équiprobables du modèle géologique sont engendrées et pour chacune les écoulements sont simulés. Cette approche permet de quantifier les incertitudes liées à la connaissance partielle du sous-sol, mais elle est très coûteuse en ressources informatiques. Elle nécessite donc des techniques de changement d'échelle qui soient à la fois rapides et précises.

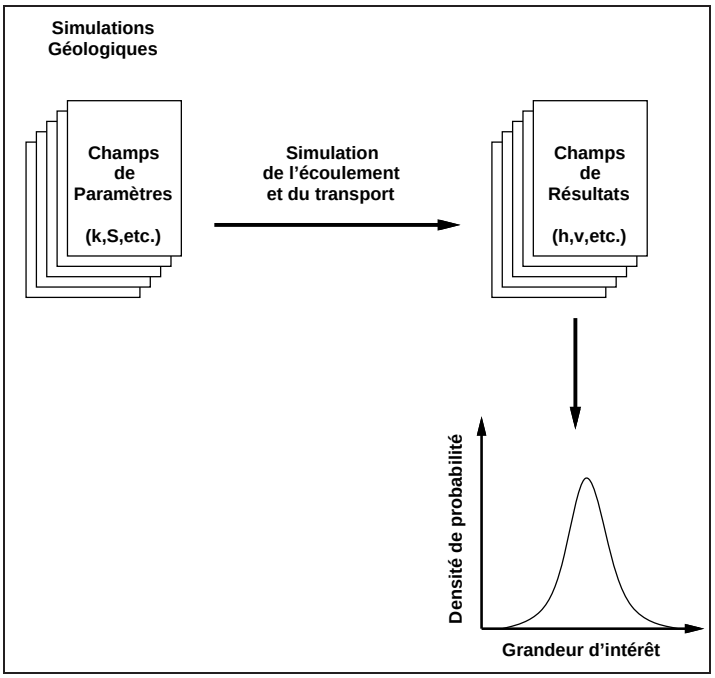


FIG. 1.2 : *Simulations de Monte-Carlo*

En hydrogéologie, le problème de changement d'échelle est contourné par l'emploi de méthodes inverses et/ou par calage du modèle. Toutefois, il est des situations où, comme le fait remarquer Marsily (1994), les données observables pour caler le modèle sont inexistantes, et cette approche est prise en défaut. Il s'agit par exemple des stockages profonds de déchets nucléaires, dans des zones très faiblement perméables, pour lesquels il est nécessaire d'effectuer des calculs prévisionnels sur des durées beaucoup trop longues pour être observables à l'échelle humaine. On peut donc s'attendre à ce que l'approche de type modélisation géologique puis changement d'échelle soit largement utilisée pour de telles applications.

Objectifs

L'objectif est donc de tenter de répondre à la question : "Comment calculer la perméabilité équivalente connaissant les perméabilités locales?". Mais, compte tenu de la taille énorme des modèles géologiques à l'échelle du réservoir et du coût informatique très important des approches stochastiques de type simulation de Monte-Carlo, l'objectif est également de rechercher des techniques qui soient rapides et fiables pour un grand nombre de modèles géologiques différents.

Plan de la thèse

Le chapitre 2 pose le problème et définit la terminologie et les concepts liés aux questions d'échelles, d'hétérogénéité et de perméabilité équivalente. La loi de Darcy est rappelée ainsi que les propriétés mathématiques de la perméabilité.

Les chapitres 3, 4 et 5 sont consacrés à la présentation des méthodes de calcul de la perméabilité équivalente. Le chapitre 3 est une synthèse bibliographique concernant ces méthodes. On y trouvera également une première comparaison des méthodes à partir de résultats de la littérature. Le calcul du tenseur complet de perméabilité et l'étude des différents critères d'équivalence font l'objet du

chapitre 4. Le chapitre 5 présente un nouvelle technique rapide mise au point durant la thèse : la renormalisation simplifiée.

Les méthodes rapides sont basées sur des approximations. Il est donc indispensable de les tester. Pour cela, la première étape consiste à disposer d'une méthode permettant le calcul d'une perméabilité de référence à laquelle seront comparés les résultats des méthodes rapides. Le chapitre 6 présente la méthode numérique utilisée pour calculer la perméabilité de référence et met en valeur les difficultés liées à ce calcul. En particulier le problème du biais lié aux méthodes numériques est étudié. Le chapitre 7 présente la comparaison des méthodes rapides et le chapitre 8 étudie l'applicabilité des techniques pour les écoulements diphasiques.

Chapitre 2

Énoncé du problème et définitions

“ Ne jamais céder à la tentation de prendre au sérieux les problèmes concernant les mots et leur signification. Ce qui doit être pris au sérieux, ce sont les questions qui concernent les faits : les théories et les hypothèses ; les problèmes qu'elles résolvent ; et les problèmes qu'elles soulèvent. ”
K. Popper

Ce chapitre présente en détail le problème traité dans cette thèse et établit la terminologie et les équations qui seront utilisées par la suite.

2.1 Notion d'échelle

Selon Haldorsen and Lake (1982) quatre échelles principales d'étude des milieux poreux peuvent être identifiées :
– *microscopique* : l'échelle de quelques pores ;
– *macroscopique* : la taille des échantillons ;
– *mégascopique* : la taille des mailles dans les modèles ;
– *gigascopique* : la taille de la formation géologique réservoir ou l'échelle régionale.
D'autres terminologies ont été proposées, notamment par Dagan (1986), Lasseter et al. (1986) et Fayers and Hewett (1992). Mais, elles ne présentent pas de différence majeure par rapport aux ordres de grandeurs proposés par Haldorsen and Lake (1982) (figure 2.1).

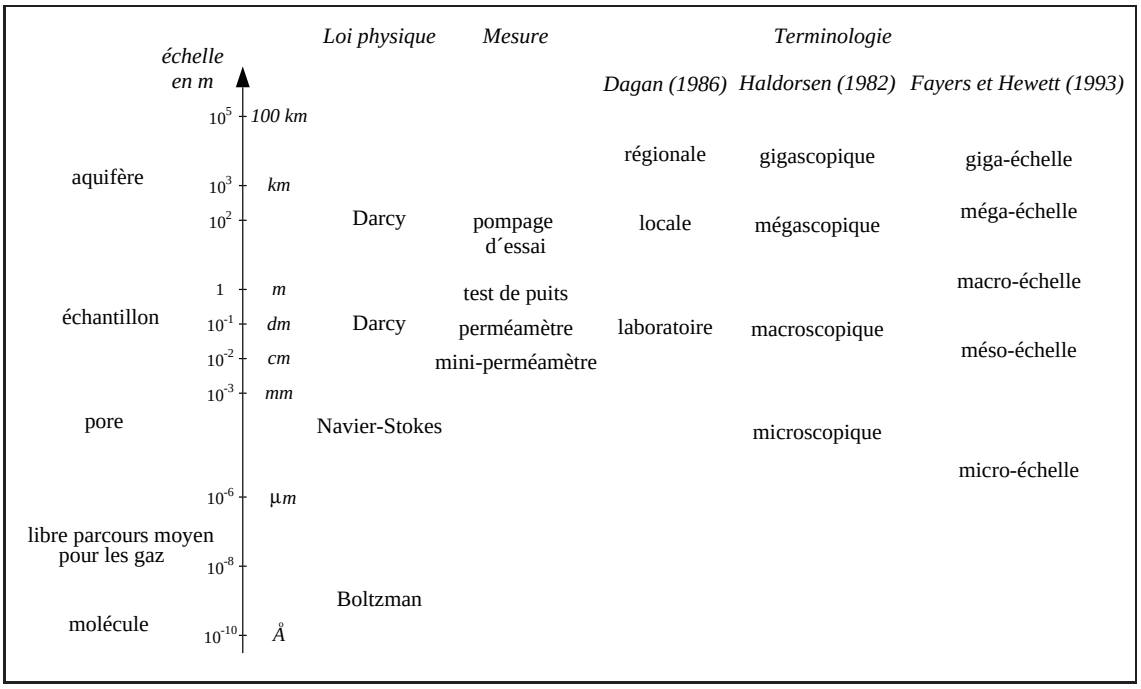


FIG. 2.1 : *Différentes échelles d'étude des milieux poreux*

Ces échelles correspondent à des plages où des instruments de mesures permettent d'appréhender les phénomènes et où des lois physiques sont bien définies. Rubin et al. (1991) par exemple, notent que l'échelle microscopique est l'échelle où dominent les forces visqueuses et capillaires, alors que l'échelle macroscopique serait l'échelle de compétition entre les forces visqueuses, capillaires et gravitaires. L'échelle gigascopique serait la zone où dominent les forces visqueuses et gravitaires.

Selon les échelles d'observation, les lois physiques changent. On passe de la loi de Boltzmann à l'échelle des molécules, aux équations de Navier-Stokes pour les écoulements dans les pores et on arrive à la loi de Darcy au niveau de l'échantillon voire de l'aquifère ou du réservoir. Ces changements d'échelle successifs ont été étudiés de manière théorique et expérimentale par de nombreux auteurs.

Le changement d'échelle qui nous intéresse dans cette thèse est le passage de l'échelle macroscopique à l'échelle mégascopique voire gigascopique. C'est à dire le passage de la loi de Darcy à une échelle donnée à la loi de Darcy à l'échelle supérieure.

2.2 Rappel sur la loi de Darcy et les propriétés de la perméabilité

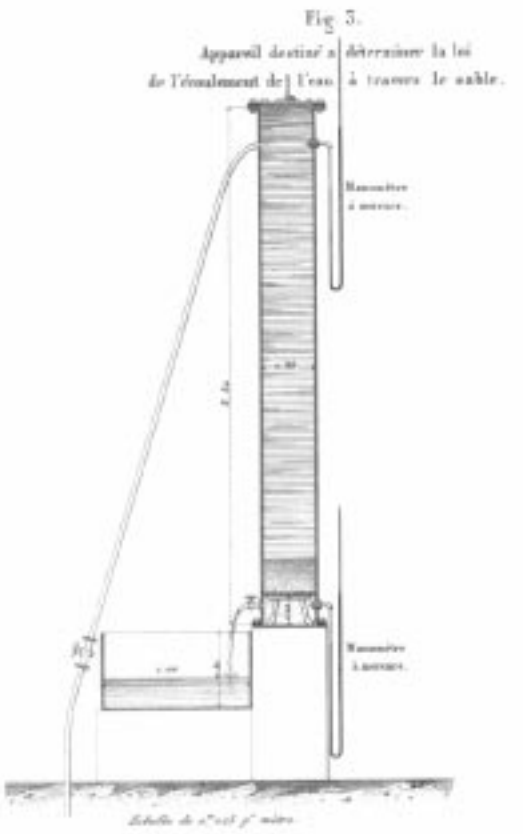


FIG. 2.2 : *Dispositif utilisé par H. Darcy et C. Ritter pour étudier la loi de l'écoulement à travers le sable. (Darcy 1856)*

La loi de Darcy décrit les écoulements monophasiques en milieu poreux. Le paramètre physique qui lui est associé est la perméabilité. Nous allons retracer en quelques étapes sa découverte et son évolution jusqu'à sa forme actuelle. Cela nous permettra d'indiquer quelles sont les propriétés mathématiques du tenseur de perméabilité.

Nous conclurons en donnant les systèmes d'équations utilisés en pratique pour modéliser les écoulements souterrains et nous présenterons notamment l'équation de la diffusivité.

Plusieurs aspects importants ne seront pas évoqués pour des raisons de concision de l'exposé. Une présentation plus complète des différentes formes de la loi de Darcy et de ses limitations peut être trouvée par exemple dans Freeze and Cherry (1979), Marsily (1981) ou Dullien (1992).

2.2.1 Loi de Darcy

Octobre 1855, Dijon

Afin de dimensionner les filtres à sable utilisés pour améliorer la qualité de l'eau distribuée par les fontaines publiques de la ville de Dijon, Henry Darcy, Inspecteur Général des Ponts et Chaussées,

et Charles Ritter étudient les lois de l'écoulement d'un fluide à travers le sable. Pour cela, ils élaborent un dispositif expérimental (figure 2.2) qui consiste en une colonne verticale remplie de sable. La colonne est close à chacune des extrémités, le sable est maintenu sur une cloison horizontale. La colonne est alimentée en eau dans sa partie supérieure et la partie inférieure est ouverte par un robinet. Deux manomètres permettent de mesurer la pression en entrée et en sortie de la colonne et un bac à la sortie du dispositif permet de mesurer les volumes d'eau écoulés et donc le débit.

Les expériences conduites montrent que le débit q traversant la colonne est proportionnel à la différence de niveau d'eau entre la partie supérieure et inférieure du filtre. Une constante de proportionnalité k liée à la perméabilité du milieu est introduite.

Ainsi, Darcy (1856) propose la formule empirique suivante[1] :

$$q = k\frac{s}{e}(h+e) \qquad \text{ou} \qquad v = \frac{q}{s} = \frac{k}{e}(h+e) \tag{2.1}$$

s représente la section du filtre, e son épaisseur, h la hauteur d'eau sur le filtre et $\boldsymbol{v}$ la vitesse de filtration. La perméabilité k a la dimension d'une vitesse. La pression à la base du filtre est supposée être la pression atmosphérique; $h+e$ représente ainsi la différence de pression entre l'entrée et la sortie du filtre, exprimée en hauteur d'eau.

1940, Columbia University

Hubbert (1940) replace la loi de Darcy dans le cadre de la théorie des champs. Il utilise, en tout point de l'espace, le potentiel hydraulique ϕ qui correspond à une énergie par unité de masse $[L^2T^{-2}]$:

$$\phi = gz + \int_{p_0}^{p} \frac{dp}{\rho} + \frac{v^2}{2} \tag{2.2}$$

p représente la pression au point, z la cote du point, ρ la masse volumique du fluide et g l'accélération de la pesanteur. La vitesse $\boldsymbol{v}$ du fluide en un point est proportionnelle au gradient du potentiel (p.819). Et la loi reliant ces deux grandeurs physiques est une loi analogue à la loi d'Ohm ou à la loi de Fick.

$$\boldsymbol{v} = -\frac{k\rho}{\mu}\,\mathbf{grad}\,(\phi) \tag{2.3}$$

μ $[ML^{-1}T^{-1}]$ est la viscosité dynamique du fluide. Le coefficient k, appelé *perméabilité intrinsèque* du milieu, est différent de celui introduit par Darcy. Il ne dépend que du milieu et non du fluide. Sa dimension est une surface $[L^2]$.

1948, École Polytechnique, Paris

En partant de la loi de Poiseuille sur des tubes non parallèles, Ferrandon (1948) montre que l'écoulement moyenné sur tous les tubes obéit à une loi de Darcy généralisée sous forme tensorielle. La perméabilité devient un tenseur et Ferrandon montre que, pour le cas étudié, le *tenseur de perméabilité* est symétrique :

$$\boldsymbol{v} = -\frac{\boldsymbol{k}\rho}{\mu}\,\mathbf{grad}\,(\phi) \qquad \text{avec} \qquad \boldsymbol{k} = \begin{pmatrix} k^{xx} & k^{xy} & k^{xz} \\ k^{xy} & k^{yy} & k^{yz} \\ k^{xz} & k^{yz} & k^{zz} \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

Cette forme de la loi de Darcy permet d'exprimer *l'anisotropie* éventuelle du milieu poreux. Un milieu est *isotrope* lorsque la perméabilité est indépendante de la direction d'écoulement. Dans ce

[1] Le texte original de Darcy est reproduit en annexe A. Le lecteur intéressé par la vie de H. Darcy se référera à (Freeze 1994).

cas, une perméabilité scalaire est suffisante pour décrire le milieu. Dans le cas contraire, le milieu est *anisotrope*, la perméabilité est un tenseur. Cela implique, en particulier, que si la direction du gradient de charge n'est pas une des directions principales du tenseur de perméabilité, alors la direction d'écoulement du fluide et la direction du gradient ne sont pas colinéaires.

2.2.2 Propriétés du tenseur de perméabilité

La démonstration des propriétés mathématiques de la perméabilité est essentiellement due à Matheron (1967). En partant des équations de Navier-Stokes à l'échelle des pores il montre, dans le cas d'un écoulement uniforme, que la loi de Darcy dérive de la linéarité des équations de Navier-Stokes (sous l'hypothèse que la vitesse d'écoulement est faible). Il montre également, à partir de l'équation de Darcy à l'échelle macroscopique et sous la condition que le milieu soit statistiquement homogène et que l'écoulement soit uniforme, qu'il émerge une nouvelle loi de Darcy à l'échelle mégascopique. Aux deux échelles considérées, l'interprétation énergétique de la perméabilité, liée à la dissipation d'énergie par les forces de viscosité, permet à Matheron de montrer que le tenseur de perméabilité est *symétrique, défini et positif.*

Ces caractéristiques impliquent que les vecteurs propres existent et sont non nuls, ce sont les axes principaux d'anisotropie.

Les termes diagonaux du tenseur sont toujours positifs :

$$k^{uu} > 0 \qquad u \in \{x, y, z\} \tag{2.5}$$

Les termes non diagonaux peuvent être négatifs ou nuls, mais ils doivent vérifier les inégalités suivantes :

$$|k^{uv}| \leq \frac{k^{uu} + k^{vv}}{2} \qquad \text{et} \qquad |k^{xy} + k^{xz} + k^{xz}| \leq \frac{k^{xx} + k^{yy} + k^{zz}}{2} \tag{2.6}$$

Enfin, la symétrie implique que :

$$k^{uv} = k^{vu} \qquad u, v \in \{x, y, z\} \tag{2.7}$$

2.2.3 Formulations pratiques

Fluide incompressible

Dans la plupart des applications à des écoulements souterrains, la vitesse du fluide est très faible. L'expression du potentiel ϕ se simplifie car le terme en $\frac{v^2}{2}$ devient négligeable dans l'équation (2.2). En supposant de plus que le fluide est incompressible, on a $\int_0^p \frac{dp}{\rho} = \frac{p}{\rho}$ et la loi de Darcy (équation 2.3) devient :

$$\boldsymbol{v} = -\frac{\boldsymbol{k}}{\mu} \mathbf{grad}\,(p + \rho g z) \tag{2.8}$$

$p + \rho g z$ représente la *pression motrice.*

Hydrogéologie

En hydrogéologie, la loi de Darcy est exprimée en général sous les mêmes hypothèses que précédemment, mais en fonction de la *charge hydraulique* h et non de la pression motrice. De plus la masse volumique et la viscosité de l'eau sont supposées constantes et sont directement introduites dans le *tenseur de conductivité hydraulique* $\boldsymbol{k}_h$ (voir de Marsily, 1981, p.58 pour une discussion concernant ces hypothèses). Finalement la loi de Darcy est exprimée de la façon suivante :

$$\boldsymbol{v} = -\boldsymbol{k}_h \, \mathbf{grad}\,(h) \tag{2.9}$$
$$\boldsymbol{k}_h = \frac{\rho g}{\mu}\boldsymbol{k} \qquad h = \frac{p}{\rho g} + z = \frac{\phi}{g}$$

$\boldsymbol{k}_h$ a la dimension d'une vitesse $[LT^{-1}]$. Dans la suite du texte nous emploierons cette dernière forme de la loi de Darcy (équation 2.9) et par souci de brièveté nous utiliserons le terme de perméabilité pour la conductivité hydraulique et nous la noterons $\boldsymbol{k}$. Elle possède bien sûr les même propriétés que le tenseur de perméabilité intrinsèque et le passage de l'un à l'autre est immédiat.

De plus, une formulation bidimensionnelle est fréquemment employée. En effet, il est courant d'étudier des aquifères de faible épaisseur et de grande extension latérale. On fait alors l'hypothèse que le gradient de charge est constant sur la verticale. On a alors :

$$\frac{Q}{l} = -\left[\int_0^l k_h(z)dz\right] \mathbf{grad}\, h$$

L'intégrale de la perméabilité sur la verticale est dénommée *transmissivité* et s'exprime en $m^2 s^{-1}$.

$$T = \int_0^l k_h(z)dz \tag{2.10}$$

Équation de la diffusivité

En combinant l'équation de conservation, la théorie de la consolidation de Terzaghi et la loi de Darcy, on obtient l'*équation de la diffusivité* (voir de Marsily, 1981, p. 85-92, pour le détail des calculs). C'est l'équation de base des écoulements en milieux poreux à l'échelle macroscopique. Sa forme n'est pas exactement la même pour une nappe libre que pour une nappe captive. Nous donnons ici son expression pour une nappe captive.

$$\mathrm{div}\,[\boldsymbol{k}\,\mathbf{grad}\,(h)] = S_s \frac{\partial h}{\partial t} + q \tag{2.11}$$

S_s est appelé coefficient d'emmagasinement spécifique, sa dimension est l'inverse d'une distance $[L^{-1}]$, q représente un terme source. Dans le cas où l'écoulement est permanent et où il n'y a pas de terme source, elle se simplifie en :

$$\mathrm{div}\,[\boldsymbol{k}\,\mathbf{grad}\,(h)] = 0 \tag{2.12}$$

2.3 Hétérogénéité et Modèle Géologique

Pour résoudre l'équation (2.12), il est nécessaire de connaître, outre les conditions aux limites, la distribution des perméabilités dans l'espace $\boldsymbol{k}(\boldsymbol{x})$. Or les réservoirs aquifères ou pétroliers sont

FIG. 2.3 : *Hétérogénéité à l'échelle macroscopique (Gelhar 1993)*

hétérogènes (figure 2.3) et compte tenu de leur nature souterraine il n'est pas possible de mesurer la perméabilité en chaque point de l'espace.

Pour résoudre cette difficulté majeure, de nombreux auteurs ont fait l'hypothèse que le milieu est homogène à une échelle donnée. Le tenseur de perméabilité $\boldsymbol{k}(\boldsymbol{x})$ est supposé indépendant de $\boldsymbol{x}$. Ainsi Dupuit (1863), Theis (1935) ou Jacob and Lohman (1952) proposent d'estimer la perméabilité moyenne d'un aquifère grâce à l'interprétation des pompages d'essai[2]. Une solution analytique de l'équation de diffusivité en régime permanent ou transitoire est ajustée aux mesures de piézométrie en fonction du temps et permet d'obtenir la perméabilité moyenne de la nappe.

Ces techniques se sont montrées extrêmement utiles et efficaces, et de nombreux problèmes pratiques ont été résolus à l'aide des paramètres ainsi obtenus. Pourquoi alors s'intéresser à la description de la variabilité des perméabilités ?

2.3.1 De l'intérêt de décrire l'hétérogénéité

D'après Anderson (1995), il semble que Theis lui-même (Theis 1967) ait reconnu les limites de son approche, notamment pour modéliser le transport d'éléments en solution :

> " I consider it certain that we need a new conceptual model, containing the known heterogeneities of the natural aquifer, to explain the phenomenon of transport in groundwater"

En effet, l'utilisation d'une perméabilité constante et homogène à travers l'aquifère ne permet pas de décrire finement les trajectoires des éléments en solution. Il est donc très important pour modéliser le transport de pouvoir décrire correctement le champs de vitesse dans le milieu, et cela nécessite une description détaillée des perméabilités dans l'espace.

[2] Une revue complète des méthodes d'interprétation des pompages d'essai est présentée dans Kruseman and de Ridder (1992)

Une autre raison évoquée par Marsily (1993) est que, pour les milieux peu perméables, les tests hydrauliques ne permettent pas d'explorer des volumes suffisamment grands. Les grandeurs obtenues ne sont pas représentatives du milieu. Il est là encore nécessaire d'évaluer l'hétérogénéité du milieu peu perméable à l'aide de modèles pour évaluer ses caractéristiques hydrodynamiques.

2.3.2 Comment définir l'hétérogénéité ?

Nous emploierons la définition courante (voir Freeze and Cherry (1979) par exemple). Si une propriété physique, telle que la perméabilité, est indépendante de sa position dans une formation géologique, alors le milieu est qualifié *d'homogène*. Si la propriété en question dépend de la position alors le milieu est dit *hétérogène*.

Quintard and Whitaker (1987) précisent cette définition en insistant sur le fait que l'homogénéité, ou son contraire l'hétérogénéité, sont définies vis à vis d'un processus et d'une échelle donnée.

> "Un milieu poreux est homogène, relativement à un processus physique et à une échelle donnée, quand les propriétés d'intérêt pour ce processus, vues à cette échelle, sont indépendantes de la position"

Cela implique par exemple qu'un milieu hétérogène à une certaine échelle, peut être homogène à une échelle plus grande et à nouveau hétérogène à l'échelle régionale, par exemple.

Greenkorn and Kessler (1969) notent que les formations géologiques *homogènes* n'existent pas et ils proposent d'utiliser une notion d'homogénéité statistique. Ils qualifient *d'uniformes* les milieux dont la densité de probabilité des perméabilités est unimodale et dont les premiers moments sont indépendants de la position (stationnarité). Cette définition est utilisée par exemple par Freeze (1975), Marsily (1989) ou Lachassagne (1989).

L'idée sous-jacente est extrêmement importante, mais la définition de Greenkorn and Kessler (1969) est trop restrictive. Ainsi, le fait que sous la variabilité apparente puisse exister une régularité statistique permet de démontrer l'existence d'une perméabilité équivalente pour deux types de milieux particuliers : les milieux périodiques et les milieux stationnaires[3]. Les premiers ne sont pas uniformes au sens de Greenkorn and Kessler (1969) ; les seconds pas forcément. Ils peuvent par exemple être multimodaux et donc "non-uniformes". Mais, du point de vue du changement d'échelle, ces milieux ont des propriétés très voisines. De ce fait, nous n'utiliserons pas la terminologie de milieu "non-uniforme" et nous préférerons employer la terminologie plus générale de milieu *statistiquement homogène*.

2.3.3 Comment modéliser l'hétérogénéité ?

De très nombreuses approches existent. On pourra se référer à Haldorsen and Damsleth (1990), Marsily (1993), Anderson (1995) ou Koltermann and Gorelick (1996) pour des synthèses bibliographiques récentes. L'objet de ce paragraphe est de parcourir les grands types d'approches et de montrer pour chacune les caractéristiques des modèles géologiques obtenus.

Koltermann and Gorelick (1992) et (1996) divisent les modèles employés pour décrire quantitativement l'hétérogénéité en deux types : les modèles imitant les processus de formation des réservoirs et ceux imitant la structure des réservoirs.

[3] Il ne suffit pas qu'un milieu soit stationnaire ou périodique pour qu'il ait une permábilité équivalente, mais si un milieu est périodique ou stationnaire et si un certain nombre de conditions sont vérifiées (voir suite) alors il peut avoir une perméabilité équivalente qui soit une propriété intrinsèque du milieu.

Modèles imitant les processus de formation

A l'heure actuelle les *modèles génétiques* sont encore peu utilisés et plutôt à l'état de recherche. Ils nécessitent une grande quantité d'informations et des ressources informatiques importantes.

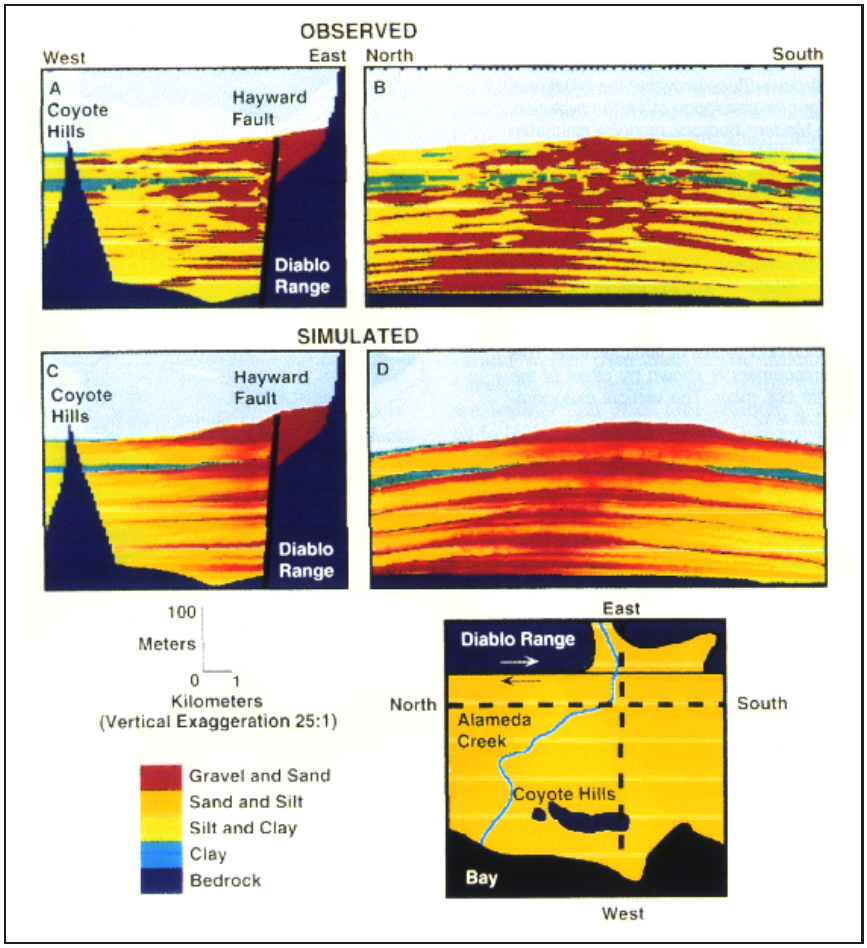


FIG. 2.4 : *Modèle génétique du Sud de la baie de San Francisco, Californie (Kolterman et Gorelick 1992)*

.

Koltermann and Gorelick (1992) modélisent, par exemple, le remplissage d'un cône alluvionnaire de la baie de San Francisco sur une période de 600 000 ans. De nombreux phénomènes sont pris en compte comme le transport des sédiments amenés par la rivière et alimentant le système, la sédimentation, les mouvements tectoniques et les variations du niveau de la mer. Tous ces phénomènes peuvent être modélisés grâce aux équations du transport et du dépôt des matières en suspension. Les conditions aux limites du système sont obtenues à partir des chroniques climatologiques déduites d'analyses isotopiques sur des échantillons. Le résultat est une grille tridimensionnelle contenant environ 10 millions de mailles. La comparaison entre le résultat de la simulation et les observations sur des forages réalisés dans le dépôt alluvionnaire montre que les structures sont bien restituées par le modèle (figure 2.4).

Modèles imitant la structure

Il s'agit en fait de la majorité des modèles géologiques. Ils ont pour objectif d'imiter le milieu naturel tel qu'il apparaît, à partir des mesures effectuées. Ces mesures peuvent concerner la géométrie du réservoir (position de la limites entre deux faciès par exemple) ou ses propriétés pétrophysiques comme la porosité ou la perméabilité.

Modèles géométriques

Les modèles purement géométriques permettent de construire en trois dimensions la géométrie d'un réservoir à partir des données observées dans les forages et des coupes sismiques interprétées (figure 2.5). Ces modèles sont en général construits à l'aide de logiciels interactifs, basés sur une approche de type Conception Assistée par Ordinateur (CAO) et adaptés à la géologie (Mallet et al. 1989; Auerbach and Schaben 1990). L'approche de base est déterministe : pour un jeu de données, un seul modèle de réservoir est engendré. Mais il est possible d'y introduire une composante stochastique, soit en utilisant des techniques géostatistiques pour affecter les propriétés pétrophysiques dans les volumes définis géométriquement, soit pour déterminer plusieurs géométries plausibles vérifiant toutes les données (Wietzerbin and Mallet 1993).

On peut noter que ce type de modèle est en général utilisé pour décrire les structures géologiques à l'échelle mégascopique ou gigascopique. Il ne représente pas l'hétérogénéité à l'échelle qui nous intéresse : l'échelle macroscopique.

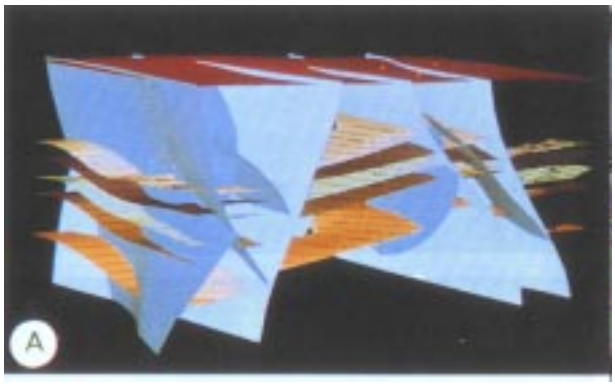
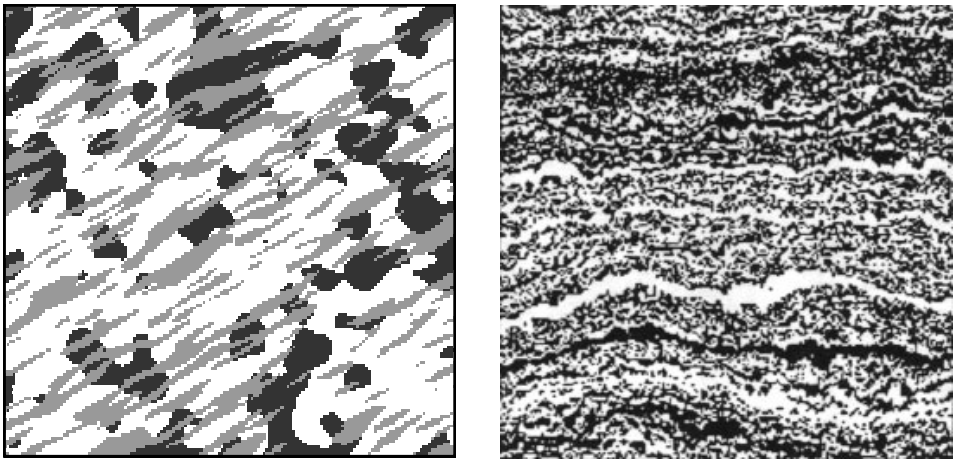


FIG. 2.5 : *Modèle géométrique du Horst de Soultz sous Forêt, Alsace. Les surfaces représentent les failles et les limites entre les couches géologiques sur un volume de* $6 \times 3 \times 2.5\ km^3$ *(Renard et Courrioux 1994)*

Modèles géostatistiques

La géostatistique est issue de l'industrie minière. L'objectif initial était d'estimer, à partir de mesures de teneurs en minerai en certains points, la quantité totale de minerai et les zones les plus favorables à l'exploitation. Pour résoudre ce type de problème, une théorie mathématique, basée sur la théorie des fonctions aléatoires, a été développée (Matheron 1962; Matheron 1965). Elle fournit toute une palette d'outils pour quantifier, analyser et modéliser la variabilité de grandeurs ayant un support spatial (les variables régionalisées). On notera que les techniques développées permettent la modélisation d'une grande diversité de structures spatiales (figure 2.6).

En hydrogéologie, la géostatistique connaît un succès croissant depuis plus d'une quinzaine d'années (Delhomme 1979; Marsily 1986; Dagan 1989; Gelhar 1993). Elle permet en effet d'aborder l'étude



(a) Pluri-Gaussiennes seuillées (Le Loc'h et al. 1994)

(b) Modèle de substitution (Lantuéjoul 1992)

FIG. 2.6 : *Exemples de réalisation de fonctions aléatoires engendrées par des méthodes géostatistiques*

.

des incertitudes liées à la connaissance incomplète du milieu souterrain dans un cadre mathématique rigoureux.

Elle permet également de traiter le problème qui nous intéresse : l'estimation du champ de perméabilité à partir de mesures locales. Mais, le choix du modèle, la détermination de ses paramètres, le krigeage ou les simulations doivent être menés à l'échelle de la mesure quand il n'existe pas de modèle de changement de support. Un rapide calcul montre qu'en procédant de la sorte, on obtient de 10^{11} à 10^{18} mailles pour modéliser un réservoir en partant de mesures sur échantillons.

Notons que, pour les variables additives telle que la porosité, les techniques de régularisation (changement de support) permettent de passer directement de l'échelle de la mesure à l'échelle d'un bloc. Mais la perméabilité n'est pas une variable additive et ces techniques sont donc inutilisables dans notre cas.

Modèles hybrides

Nous avons convenu de regrouper sous cette terminologie, toute une série d'algorithmes qui n'appartiennent pas à la géostatistique mais qui mélangent des approches géométriques et statistiques. Contrairement aux méthodes purement géométriques, ils ne vérifient pas, en général, les données observées dans un cas particulier, mais ils vérifient des géométries types observées dans plusieurs sites correspondant au même contexte géologique.

Ce type de modèle peut être appliqué à toutes sortes d'échelles. Scheibe and Freyberg (1995) modélisent par exemple un dépôt de type *dépôt de banc de convexité*[4] sur un bloc d'un mètre de coté, le modèle résultant contient 16 millions de mailles (figure 2.7).

[4] Dépôt fluviatile s'effectuant dans la partie interne d'un méandre, là où l'énergie de transport est la plus faible.

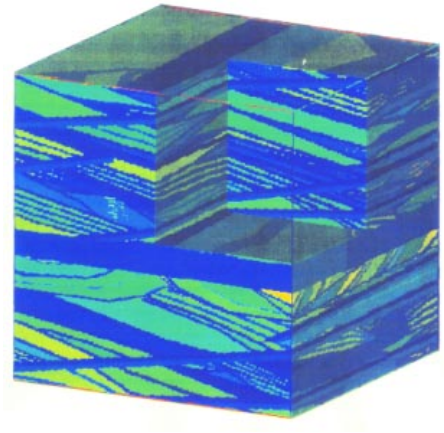


FIG. 2.7 : *Modèle de dépôt de banc de convexité (cube de 1 m de coté) (Scheibe et Freyberg 1995)*

2.3.4 Le compromis à trouver

Parmi les modèles présentés précédemment, les modèles génétiques et géostatistiques permettent une excellente description du milieu à l'échelle macroscopique, mais sont constitués de millions voire de milliards de mailles.

Du point de vue de la simulation de l'écoulement, la limite informatique actuelle est de l'ordre de quelques millions de mailles (Ababou 1995). Il faut donc trouver un compromis entre 1) une description extrêmement détaillée qui pourrait, au moins théoriquement, permettre un calcul précis du champ de vitesse et donc une modélisation correcte du transport, et 2) une description grossière adaptée aux ressources informatiques disponibles et au problème posé.

Ce compromis passe par un changement d'échelle et par la définition d'une perméabilité équivalente.

2.4 Variables d'état et loi de Darcy à l'échelle supérieure

Lors du changement d'échelle, les variables d'état qui permettent de décrire l'écoulement (la charge hydraulique et la vitesse de Darcy pour un écoulement incompressible) doivent être définies à l'échelle mégascopique à partir des variables à l'échelle macroscopique. Selon les auteurs plusieurs définitions sont employées : des espérances mathématiques dans un contexte probabiliste, des moyennes spatiales ou encore des termes du premier ordre dans des développements asymptotiques. Ces différentes définitions seront présentées, dans le chapitre 3, pour chacune des théories correspondantes. Pour l'instant nous nous contenterons de distinguer les variables macroscopiques (notées en minuscules) des variables mégascopiques (notées en majuscules).

Chacune des théories évoquées ci–dessus permet d'aboutir sous certaines hypothèses à une loi de Darcy et à une équation de conservation à grande échelle reliant les variables mégascopiques :

$$\boldsymbol{V} = -\boldsymbol{K}_{eq}\,\mathbf{grad}(H) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{div}(\boldsymbol{V}) = 0 \tag{2.13}$$

$\boldsymbol{K}_{eq}$ représente la perméabilité équivalente, $\boldsymbol{V}$ la vitesse de Darcy et H la charge hydraulique mégascopique.

2.5 Perméabilité équivalente

Dans un contexte général nous utiliserons le terme de *perméabilité équivalente* pour la notion de tenseur de perméabilité constant censé représenter un milieu hétérogène. L'équivalence complète entre le milieu hétérogène réel et le milieu homogène fictif est impossible. On la définit donc, dans un sens restreint, par rapport à des *critères* qui doivent être égaux dans les deux milieux. De plus, le terme de perméabilité équivalente recouvre deux notions différentes : la perméabilité effective et la perméabilité de bloc.

2.5.1 Critères d'équivalence

Le premier critère qui ait été utilisé est *l'égalité des flux* (Cardwell and Parsons 1945; Warren and Price 1961) ; les flux aux frontières du domaine doivent être identiques pour le milieu hétérogène et le milieu homogène équivalent soumis au même gradient de charge. C'est le critère le plus largement utilisé.

$$\int_\Gamma \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n} d\gamma = \int_\Gamma \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} d\gamma \tag{2.14}$$

Le second critère est *l'égalité des énergies consommées* par les forces de viscosité pour le milieu hétérogène et le milieu homogène équivalent (Matheron 1967; Indelman and Dagan 1993). Cette énergie est une puissance consommée, elle est exprimée par unité de volume et de temps à l'échelle macroscopique :

$$e = -\rho g \, \mathbf{grad}\,(h) \cdot \boldsymbol{v} = -\,\mathbf{grad}\,(p + \rho g z) \cdot \boldsymbol{v} \tag{2.15}$$

Le critère énergétique revient donc à écrire que l'énergie dissipée dans un volume Ω est la même pour le milieu hétérogène que pour le milieu homogène.

$$\int_\Omega -\rho g \, \mathbf{grad}\,(H) \cdot \boldsymbol{V} d\omega = \int_\Omega -\rho g \, \mathbf{grad}\,(h) \cdot \boldsymbol{v} d\omega \tag{2.16}$$

Une troisième voie pour définir la perméabilité équivalente est de poser que la perméabilité de bloc doit vérifier l'équation (2.17). Cette définition a été proposée par Rubin and Gómez-Hernández (1990).

$$\int_\Omega \boldsymbol{v} d\omega = -\boldsymbol{K}_b \cdot \int_\Omega \mathbf{grad}\, h d\omega \tag{2.17}$$

Dans certains cas ces critères sont équivalents, par exemple si le bloc est soumis à des conditions aux limites de type périodique (Bøe 1994). Dans d'autres cas, ils ne le sont pas (voir chapitre 4).

2.5.2 Perméabilité effective

La *perméabilité effective* K_{ef} (effective permeability) se réfère à la notion de milieu statistiquement homogène à grande échelle. C'est une grandeur physique intrinsèque. Elle est indépendante des conditions aux limites macroscopiques. Son étude rigoureuse a été menée suivant deux types d'approches : l'approche stochastique (Matheron 1967; Dagan 1989; Gelhar 1993) et les approches de type équations homogènes (Quintard and Whitaker 1987; Sáez, Otero, and Rusinek 1989; Kitanidis 1990). Dans le premier cas la perméabilité est représentée par une fonction aléatoire, en général stationnaire. L'hétérogénéité est caractérisée par des longueurs de corrélation. Dans le

second cas le milieu est supposé spatialement périodique. La géométrie de la cellule de base est supposée connue. Dans les deux cas il y a émergence d'une perméabilité effective à condition que, premièrement, soit la longueur de corrélation, soit la taille de la cellule de base soit très inférieure à la taille du domaine, et que, deuxièmement, l'écoulement soit uniforme (Matheron 1967; Quintard and Whitaker 1987; Auriault 1991; Beckie, Aldama, and Wood 1994). Le tenseur de perméabilité effective possède la propriété d'être un tenseur du second ordre, symétrique, défini et positif, comme nous l'avons déjà évoqué.

2.5.3 Perméabilité de bloc

Dans la plupart des applications d'ingénierie (pétrolière ou hydrogéologique) les conditions d'émergence de la perméabilité effective ne sont pas satisfaites. La *perméabilité de bloc* K_b (block-permeability) ou *perméabilité à grande échelle* (up-scaled permeability) est la perméabilité équivalente d'un bloc de taille finie qui n'est, en général, pas "statistiquement homogène". L'écoulement n'est pas forcément uniforme.

Il en résulte qu'à l'échelle considérée, l'écoulement peut ne pas obéir à la loi de Darcy. Cela se manifeste par le fait que la perméabilité de bloc n'est pas unique. Elle dépend des conditions aux limites. Elle n'est donc pas une propriété intrinsèque du milieu, contrairement à la perméabilité effective.

Cela permet d'expliquer que, sous certaines conditions aux limites, et pour des milieux particuliers, le tenseur de perméabilité de bloc peut être non symétrique, comme cela a été montré par plusieurs auteurs (White and Horne 1987; Zijl and Stam 1992; Neuman and Orr 1993; King 1993).

On remarquera que si le bloc sur lequel on passe à l'échelle supérieure est suffisamment grand, alors la perméabilité de bloc tend vers la perméabilité effective si celle-ci existe.

$$\lim_{\text{bloc}\to\infty} \boldsymbol{K}_b = \boldsymbol{K}_{ef} \tag{2.18}$$

2.6 Énoncé du problème

En conclusion de ce chapitre, la résolution du problème posé est basée sur les hypothèses suivantes :
- Nous supposons que, par utilisation d'une des méthodes de modélisation de l'hétérogénéité du milieu géologique, présentées dans la section 2.3.3, nous disposons d'un champ de perméabilité. Ce champ de perméabilité est hétérogène (les perméabilités varient dans l'espace).
- Nous supposons que le champ de perméabilité est décrit par des valeurs de perméabilité affectées aux mailles d'une grille régulière.
- Nous supposons que les mailles ont une taille correspondant à l'échelle macroscopique, c'est à dire de l'ordre de quelques décimètres.
- Nous supposons qu'à cette échelle, la loi de Darcy est valide. Cela implique que les perméabilités locales sont des tenseurs du second ordre définis et positifs.

Comme les grilles ainsi obtenues peuvent, suivant l'approche utilisée, contenir un nombre de mailles incompatible avec les simulateurs d'écoulement, nous nous intéressons au problème de réduire ce nombre de maille. Comme l'hétérogénéité des perméabilités provoque des phénomènes hydrodynamiques qu'il est utile de quantifier, il est nécessaire de ne pas remplacer la totalité du réservoir hétérogène par un réservoir homogène de perméabilité égale à sa perméabilité effective.

Il s'agit donc de passer de la grille fine décrite ci-dessus à une grille grossière dont les mailles ont une taille correspondant à l'échelle mégascopique. Pour cela, il faut disposer de techniques pour calculer les perméabilités de bloc de chacune des mailles mégascopiques.

Notre objectif est de chercher de telles techniques dans le cadre des hypothèses précédemment citées. De plus, comme nous l'avons déjà évoqué en introduction, ces techniques sont fréquemment utilisées dans des simulations de Monte-Carlo. Il est alors extrêmement utile de disposer de techniques qui soient rapides et fiables.

Chapitre 3

Calcul de la perméabilité équivalente Étude bibliographique

L'objectif de ce chapitre est de faire un état de l'art des théories et des techniques de calcul de la perméabilité équivalente. Il s'agit tout d'abord de les recenser (§ 3.2-3.7) et ensuite d'entreprendre, sur une base bibliographique, une comparaison de ces approches, afin d'évaluer les potentialités et les limites de chacune (§ 3.8).

3.1 Introduction

Techniques	Données	Résultats
Déterministes	Champ de perméabilité et Conditions aux limites	Perméabilité équivalente unique
Heuristiques	Champ de perméabilité	Perméabilité équivalente unique
Statistiques	Loi de probabilité de la perméabilité	Espérance de la perméabilité équivalente
Géostatistiques	Loi spatiale de probabilité de la perméabilité	Loi spatiale de probabilité de la perméabilité équivalente

TAB. 3.1 : *Les groupes de techniques de calcul de la perméabilité équivalente.*

Nous avons choisi de classer les techniques de calcul de la perméabilité équivalente en quatre groupes : les méthodes déterministes, heuristiques, statistiques et géostatistiques.

Les méthodes déterministes et heuristiques supposent le champ de perméabilité connu. A l'opposé, les techniques statistiques et géostatistiques supposent que celui-ci est connu de façon imparfaite et elles adoptent un point de vue probabiliste. Les méthodes statistiques ne prennent pas en compte les statistiques spatiales, de type fonction de corrélation ou variogramme, contrairement aux méthodes géostatistiques.

Nous avons distingué les méthodes déterministes des méthodes heuristiques car les premières résolvent un problème d'écoulement ou un problème associé sur le champ de perméabilité connu avec des conditions aux limites fixées, ce qui n'est pas le cas des secondes. Celles-ci se proposent seulement de fournir des règles empiriques qui permettent d'obtenir des perméabilités équivalentes plausibles.

Ce chapitre est divisé en deux grandes parties. La première (paragraphes 3.2 à 3.7) présente successivement les bornes théoriques de la perméabilité équivalente, les méthodes heuristiques, déterministes, statistiques, géostatistiques et se termine sur la technique des grilles adaptatives. Cette dernière n'est pas une méthode de calcul de la perméabilité équivalente, mais elle tente de réduire les erreurs liées à n'importe quelle technique. La deuxième partie de ce chapitre (paragraphe 3.8) est consacrée à une comparaison des différentes techniques à partir des résultats trouvés dans la bibliographie.

Dans le chapitre précédent nous avions insisté sur la différence entre perméabilité *de bloc* et perméabilité *effective*. Le lecteur sera peut-être surpris de ne pas retrouver cette distinction dans le classement des méthodes de calcul. La raison en est que la plupart de ces méthodes permettent de calculer une perméabilité équivalente qui peut être soit la perméabilité efective, soit la perméabilité de bloc. Ce n'est pas la méthode de calcul qui fait la différence mais la nature du milieu. Ainsi, toutes les techniques acceptables convergent vers la perméabilité effective quand les conditions d'émergence sont vérifiées. Mais si ces conditions d'émergence ne sont pas vérifiés alors elles donnent des résultats différents.

Avant d'entamer ce chapitre, notons que la recherche bibliographique qu'il relate a fait l'objet d'un article (Renard and Marsily 1997) dont le contenu correspond à l'état de ces recherches en Novembre 1995. Par rapport à cet article, le contenu en a été étendu et la classification des techniques a été modifié. Notons également que plusieurs articles de synthèse récents (Mansoori 1994; Abbaszadeh 1995; Wen and Gómez-Hernández 1996; Renard and Marsily 1997) traitent, au moins en partie, du problème du calcul de la perméabilité équivalente. Mansoori (1994) survole assez rapidement la question. Le travail le plus complet sur le sujet est proposé par Wen and Gómez-Hernández (1996). Abbaszadeh (1995) propose un article en deux volets : le premier est consacré à la perméabilité équivalente, le second aux écoulements diphasiques. Enfin, Hashin (1983), dans

un excellent travail de synthèse sur la physique des milieux hétérogènes, consacre quelques paragraphes au calcul de la conductivité équivalente et notamment de ses bornes. Dans ces articles, le classement des techniques de changement d'échelle est en général différent de celui adopté ici : techniques analytiques ou numériques, perméabilité de bloc ou perméabilité effective, locales ou non-locales[1], exactes ou approchées.

[1] Pour les méthodes non-locales (Cushman 1990), la perméabilité d'un bloc dépend à la fois des valeurs de perméabilité situées à l'intérieur et à l'extérieur du bloc. Pour les méthodes locales, elle ne dépend que des valeurs des perméabilités élémentaires situées à l'intérieur du bloc. Il faut noter que la majorité des méthodes sont des méthodes locales.

3.2 Inégalités pour la perméabilité équivalente

3.2.1 Bornes de Wiener

La perméabilité équivalente est comprise entre la moyenne harmonique et la moyenne arithmétique des perméabilités locales.

$$\mu_h \leq K_{ef} \leq \mu_a \tag{3.1}$$

avec μ_h = moyenne harmonique et μ_a = moyenne arithmétique.

Cette inégalité est appelée *inégalité fondamentale* car elle est toujours vérifiée. Elle a été démontrée par de nombreux auteurs : Wiener (1912), Cardwell and Parsons (1945), Matheron (1967), Le Loc'h (1987) et Dagan (1989) par exemple.

3.2.2 Bornes de Hashin et Shtrikman

Pour un milieu binaire, constitué de deux phases de perméabilité k_0 et k_1, si $k_0 < k_1$ et si le milieu est isotrope on a (Hashin and Shtrikman 1963) :

$$\mu_a - \frac{f_1 f_0 (k_1 - k_0)^2}{(D - f_0)k_0 + f_0 k_1} \leq K_{ef} \leq \mu_a - \frac{f_1 f_0 (k_1 - k_0)^2}{(D - f_1)k_1 + f_1 k_0} \tag{3.2}$$

avec f_0 représente la fraction de milieu peu perméable (perméabilité k_0) et f_1 la fraction du milieu plus perméable (k_1), μ_a représente la moyenne arithmétique, dans ce cas elle vaut $f_0 k_0 + f_1 k_1$.

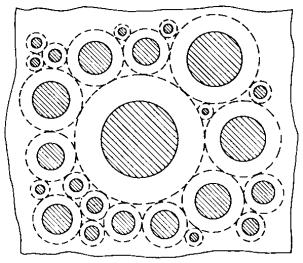
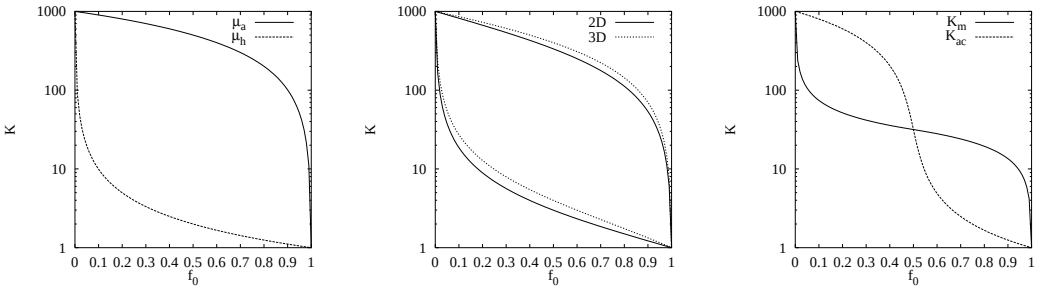


FIG. 3.1 : *Exemple de milieu binaire isotrope particulier : assemblage de sphères composites (d'après Hashin, 1985).*

La démonstration de Hashin et Shtrikman est basée sur un modèle de milieu constitué de sphères composites (cf. figure 3.1). Chaque sphère a une perméabilité constante k_{sph} et est entourée d'une enveloppe de perméabilité k_{env}. En appliquant la méthode des milieux auto-cohérents (voir section 3.5.1), il est possible de calculer une valeur approchée de la perméabilité du milieu. La perméabilité maximale s'obtient en supposant que les sphères constituent le milieu de faible perméabilité et que les enveloppes constituent le milieu de forte perméabilité ($k_{sph} = k_0, k_{env} = k_1$). La perméabilité minimale s'obtient en intervertissant ces perméabilités : sphères conductrices et enveloppes résistantes ($k_{sph} = k_1, k_{env} = k_0$). Une démonstration plus rigoureuse basée sur un principe variationnel donne le même résultat, ce qui amène Hashin et Shtrikman à conclure que ces bornes sont les meilleures bornes possibles en terme de fraction volumique (Hashin and Shtrikman 1963; Hashin 1983).

L'exemple de la figure 3.2 montre toutefois que l'écart entre ces bornes reste quasiment aussi fort que celui entre les bornes de Wiener.



(a) Wiener (b) Hashin et Shtrikman (c) Matheron

FIG. 3.2 : *Bornes pour la perméabilité équivalente d'un milieu binaire ($k_0 = 1,\ k_1 = 1000$) en fonction de la proportion f_0 de milieu peu perméable. On notera que l'écart entre les bornes supérieure et inférieure de Wiener ou de Hashin et Shtrikman est nettement plus important qu'entre les bornes de Matheron*

3.2.3 Bornes de Matheron

Des bornes plus précises sont proposées par Matheron (1993) dans le cas d'une mosaïque aléatoire[2] bidimensionnelle isotrope à deux phases (voir figure 3.2) :

$$\begin{aligned} &f_0 > 0.5 \Rightarrow K_{ef} \geq K_{ac} \\ &f_0 < 0.5 \Rightarrow K_{ef} \leq K_{ac} \\ &f_0 = 0.5 \Rightarrow K_{ef} = \sqrt{k_0 k_1} \end{aligned} \tag{3.3}$$

$$K_{ac} = \frac{1}{2}\left[(f_1 - f_0)(k_1 - k_0) + \sqrt{(f_1 - f_0)^2 (k_1 - k_0)^2 + 4 k_0 k_1}\right]$$

Cette relation reste valable si la mosaïque est invariante par rotation de 90 degrés. Matheron (1993) montre de plus :

$$\begin{aligned} f_0 \geq 0.5 \Rightarrow K_{ef} \leq K_m &= \frac{f_1 k_0 k_1 + f_0 \mu_a \sqrt{k_0 (2\mu_a - k_0)}}{f_1 \mu^\star + f_0 \sqrt{k_0 (2\mu_a - k_0)}} \\ f_0 \leq 0.5 \Rightarrow K_{ef} \geq K_m &= k_0 k_1 \frac{f_0 \mu_a + f_1 \sqrt{k_0 (2\mu^\star - k_0)}}{f_0 k_0 k_1 + f_1 \mu^\star \sqrt{k_0 (2\mu^\star - k_0)}} \end{aligned} \tag{3.4}$$

Comme précédemment, f_0 représente la fraction de milieu peu perméable (perméabilité k_0) et f_1 la fraction du milieu plus perméable (k_1). $\mu^\star$ est définit par $\mu^\star = f_1 k_0 + f_0 k_1$, la moyenne arithmétique et la variance de la perméabilité s'expriment ainsi : $\mu_a = f_1 k_1 + f_0 k_0$, $\sigma^2 = f_1 f_0 (k_1 - k_0)^2$.

La méthode employée par Matheron consiste à chercher des inégalités pour les dérivées partielles de la perméabilité équivalente par rapport aux perméabilités locales. Cette méthode permet également de retrouver les bornes de Wiener et de Hashin et Shtrikman.

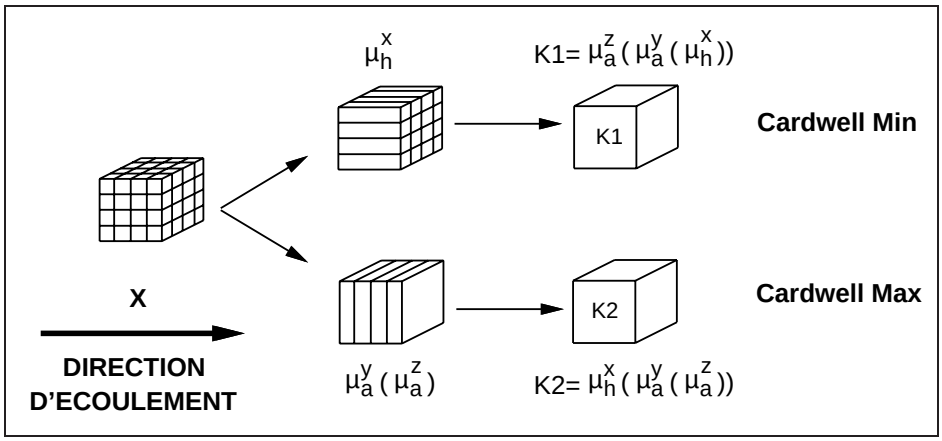


FIG. 3.3 : *Calcul des bornes de Cardwell et Parsons pour un écoulement en x.*

3.2.4 Bornes de Cardwell et Parsons

Dans le cas d'un milieu hétérogène représenté par un assemblage de mailles de perméabilités constantes sur une grille régulière, Cardwell and Parsons (1945) utilisent une analogie électrique et un raisonnement physique et Le Loc'h (1987) utilise une méthode variationnelle pour montrer que la perméabilité équivalente dans une direction donnée est comprise entre :
- la moyenne arithmétique des moyennes harmoniques des perméabilités ponctuelles, calculées sur chaque ligne de cellule parallèle à la dite direction (minorant) ;
- la moyenne harmonique des moyennes arithmétiques des perméabilités ponctuelles calculées sur chaque tranche de cellule perpendiculaire à la direction étudiée (majorant).

$$K_2 = \mu_a^z(\mu_a^y(\mu_h^x)) \leq K_{ef}^{xx} \leq K_1 = \mu_h^x(\mu_a^z(\mu_a^y)) \tag{3.5}$$

On notera que ces bornes sont atteintes pour des cas limites d'anisotropie (Kruel-Romeu 1994, p. 115).

En effet, si $k^{yy} \ll k^{xx}$ et $k^{zz} \ll k^{xx}$ dans chaque maille, l'écoulement se fait suivant des tubes parallèles. La perméabilité équivalente tend vers la moyenne arithmétique des moyennes harmoniques des perméabilités le long des tubes (K_2).

Si maintenant, $k^{yy} \gg k^{xx}$ et $k^{zz} \gg k^{xx}$ alors la charge hydraulique s'homogénéise sur les surfaces perpendiculaires à la direction x, comme pour un milieu stratifié en série. La perméabilité équivalente tend vers la moyenne harmonique des moyennes arithmétiques de chaque tranche (K_1).

[2] Une mosaïque aléatoire est un milieu hétérogène, homogène par morceau. A chaque région ou morceau est affectée une perméabilité constante. Les régions peuvent, par exemple, être délimitée par des droites poissonniennes.

3.3 Méthodes heuristiques

Nous regroupons sous la terminologie "méthode heuristique", les techniques qui permettent d'obtenir une valeur plausible de la perméabilité équivalente, mais qui ne résolvent pas un problème d'écoulement. Ce sont des méthodes plus ou moins empiriques et fréquemment utilisées dans la pratique.

Les techniques recensée dans ce groupe sont : l'échantillonnage, les moyennes de puissance (appliquées en dehors des hypothèses pour lesquelles elles ont été calculées) et les formules de composition de bornes théoriques.

3.3.1 Échantillonnage

La première des techniques consiste à affecter à un bloc la perméabilité mesurée en son centre. Cette technique extrêmement simple permet de passer d'une mesure à l'échelle décimétrique à un bloc d'échelle métrique en supposant que la mesure est représentative de la perméabilité du bloc (Tran 1996).

Ce type de technique est également utilisé en analyse d'images. Pour diminuer la taille occupée en mémoire par une image on ne prend qu'un pixel sur n et une ligne sur n. Le nombre de pixels est alors réduit d'un facteur n^2. Ce type d'algorithme extrêmement frustre peut être amélioré en fonction des objectifs recherchés (Decencière-Ferrandière 1995).

3.3.2 Moyenne de puissance

Journel, Deutsch, and Desbarats (1986) proposent que la perméabilité de bloc K_b soit égale à une moyenne de puissance, aussi appelée moyenne d'ordre p, dont l'exposant p est compris entre -1 et +1, en fonction de la répartition spatiale des perméabilités.

$$\mu_p =< k^p >^{\frac{1}{p}} = \left(\frac{1}{V} \int_V k(x)^p dV \right)^{\frac{1}{p}} \tag{3.6}$$

On remarquera que $p = -1$ correspond à la moyenne harmonique, que la limite de μ_p lorsque p tend vers 0 est la moyenne géométrique μ_g et que $p = 1$ correspond à la moyenne arithmétique.

Dans le cas des milieux statistiquement homogènes et isotropes on a (Matheron 1967; Desbarats 1992; Nœtinger 1994) :

$$p = 1 - \frac{2}{D} \tag{3.7}$$

Ce cas particulier sera traité plus en détail dans la section 3.6.2, page 46.

Dans le cas d'un milieu log-normal, Ababou and Wood (1990) notent que :

$$\mu_p = \mu_g \exp\left(\frac{p\sigma^2_{\ln k}}{2} \right)$$

Pour un milieu binaire l'équation (3.6) devient :

$$\mu_p = [f_0 k_0^p + f_1 k_1^p]^{\frac{1}{p}} \tag{3.8}$$

Deutsch (1989) recommande l'emploi de ce type de formule pour la perméabilité de bloc, avec p qui se calcule par calage sur des résultats d'expériences numériques.

3.3.3 Composition de bornes théoriques

Bornes fondamentales

Matheron (1967) suggère une formule où la perméabilité effective est une moyenne pondérée des bornes de Wiener.

$$K_{ef} = (\mu_a)^{\alpha}(\mu_h)^{1-\alpha}, \quad \text{avec} \quad \alpha \in [0,1] \tag{3.9}$$

Dans le cas d'un milieu statistiquement homogène et isotrope on aurait :

$$\alpha = \frac{D-1}{D}$$

Ce modèle est rigoureusement exact dans le cas d'une perméabilité factorisée (Matheron 1993). C'est-à-dire de la forme :

$$K(\boldsymbol{x}) = k_1(x_1)k_2(x_2)\ldots k_D(x_D)$$

Dans le cas d'un milieu anisotrope mais statistiquement homogène Ababou (1995) propose de prendre :

$$\begin{aligned} K_{ef}^{ii} &= (\mu_a)^{\alpha_i}\,(\mu_h)^{1-\alpha_i} \\ \alpha_i &= \frac{(D - l_h/l_i)}{D} \end{aligned} \tag{3.10}$$

avec l_i la longueur de corrélation dans la direction considérée et l_h la moyenne harmonique des longueurs de corrélations dans les directions principales d'anisotropie.

Bornes de Cardwell et Parsons

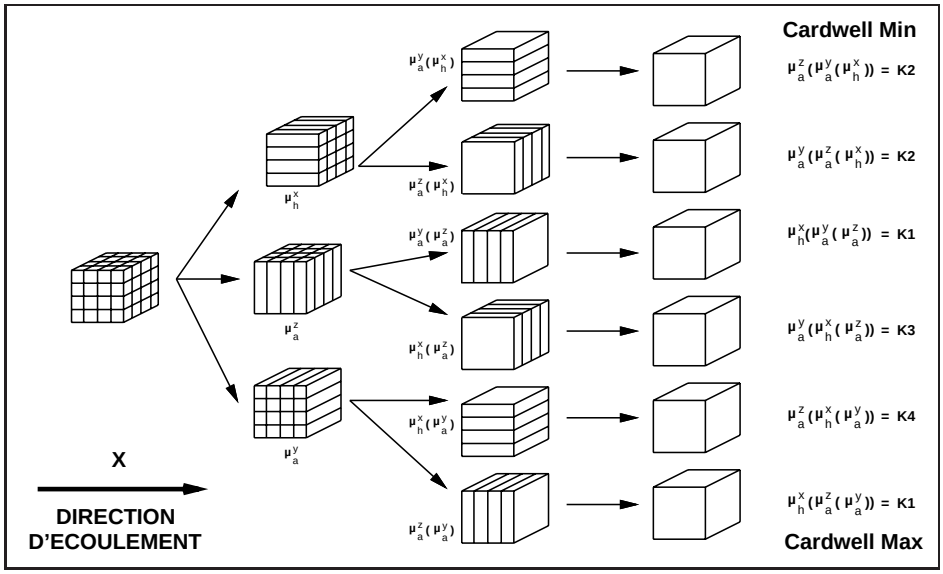


FIG. 3.4 : *Calculs des bornes de Cardwell et Parsons et des valeurs intermédiaires K_3 et K_4 en trois dimensions.*

Guérillot, Rudkiewicz, Ravenne, Renard, and Galli (1990) propose de prendre la moyenne géométrique des deux bornes de Cardwell et Parsons (notées K_1 et K_2). Selon Kruel-Romeu (1994), Lemouzy (1991) généralise cette idée et utilise les valeurs intermédiaires K_3 et K_4 que l'on peut calculer en modifiant l'ordre de regroupement dans le calcul des bornes de Cardwell et Parsons (figure 3.4). Il propose ainsi pour les milieux tridimensionnels :

$$K_b^{xx} = \sqrt[6]{K_1^2 K_2^2 K_3 K_4}$$

avec :

$$\begin{aligned}
K_1 &= \mu_h^x(\mu_a^y(\mu_a^z)) = \mu_h^x(\mu_a^z(\mu_a^y)) = \frac{n_x}{n_y n_z}\left[\sum_{i=1}^{n_x}\left(\sum_{j=1}^{n_y}\sum_{k=1}^{n_z} k_{i,j,k}^{xx}\right)^{-1}\right]^{-1} \\
K_2 &= \mu_a^y(\mu_a^z(\mu_h^x)) = \mu_a^z(\mu_a^y(\mu_h^x)) = \frac{n_x}{n_y n_z}\sum_{j=1}^{n_y}\sum_{k=1}^{n_z}\left[\sum_{i=1}^{n_x}\left(k_{i,j,k}^{xx}\right)^{-1}\right]^{-1} \\
K_3 &= \mu_a^y(\mu_h^x(\mu_a^z)) = \frac{n_x}{n_y n_z}\sum_{j=1}^{n_y}\left[\sum_{i=1}^{n_x}\left(\sum_{k=1}^{n_z} k_{i,j,k}^{xx}\right)^{-1}\right]^{-1} \\
K_4 &= \mu_a^z(\mu_h^x(\mu_a^y)) = \frac{n_x}{n_y n_z}\sum_{k=1}^{n_z}\left[\sum_{i=1}^{n_x}\left(\sum_{j=1}^{n_y} k_{i,j,k}^{xx}\right)^{-1}\right]^{-1}
\end{aligned}$$

Kruel-Romeu (1994) introduit des puissances contrôlant l'influence de l'anisotropie :

$$K_b^{xx} = K_1^{(\theta_{y2}\theta_{z3}+\theta_{z2}\theta_{y3})} K_2^{(1-\theta_{y3}-\theta_{z3})} K_3^{(1-\theta_{y2})\theta_{z3}} K_4^{(1-\theta_{z2})\theta_{y3}} \tag{3.11}$$

avec :

$$\theta_{y2} = \frac{\arctan\sqrt{a_y}}{\pi/2} \qquad \theta_{z2} = \frac{\arctan\sqrt{a_z}}{\pi/2} \qquad \theta_{y3} = \frac{\theta_{y2}(1-\theta_{z2})}{1-\theta_{y2}\theta_{z2}} \qquad \theta_{z3} = \frac{\theta_{z2}(1-\theta_{y2})}{1-\theta_{y2}\theta_{z2}}$$

$a_y = \frac{k^{yy}}{k^{xx}}\left(\frac{dx}{dy}\right)^2$ et $a_z = \frac{k^{zz}}{k^{xx}}\left(\frac{dx}{dz}\right)^2$ représentent les facteurs d'anisotropies dus à l'aplatissement du maillage (dx, dy et dz représentent les tailles des mailles dans chaque direction) et à l'anisotropie des perméabilités locales (qui est supposée constante sur toutes les mailles).

3.4 Méthodes déterministes

Dans l'approche déterministe, le champ de perméabilité $\boldsymbol{k}(x)$ et les conditions aux limites sont supposés connus. Si le champ de perméabilité est suffisamment simple (milieu stratifié par exemple) il existe des solutions analytiques exactes. Dans le cas plus général, il est nécessaire de résoudre numériquement soit l'équation de la diffusivité, soit un problème associé (méthodes aux équations homogènes). Ces calculs peuvent être extrêmement coûteux en temps calcul. Un ensemble de techniques approchées (tube de courant, renormalisation) ont donc été développée.

3.4.1 Solution analytique de l'équation de la diffusivité

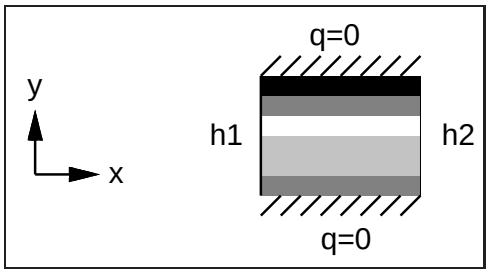


FIG. 3.5 : *Exemple de milieu stratifié.*

La résolution analytique de l'équation de la diffusivité ($\operatorname{div}[\boldsymbol{k}\,\mathbf{grad}\,h] = 0$) est possible dans le cas des écoulements uniformes dans les milieux stratifiés. Les deux résultats les plus connus sont que la perméabilité équivalente pour un écoulement perpendiculaire aux strates est la moyenne harmonique μ_h des perméabilités locales et, pour un écoulement parallèle aux strates, la moyenne arithmétique μ_a.

$$\begin{aligned} \mu_a &= (x_2 - x_1)^{-1} \int_{x_1}^{x_2} k(x)dx \\ \mu_h &= (x_2 - x_1) \left[\int_{x_1}^{x_2} \frac{\mathrm{dx}}{k(x)} \right]^{-1} \quad \text{si } \forall x,\ k(x) \neq 0 \end{aligned} \tag{3.12}$$

Si l'on suppose que les variations de k suivant x sont discrètes, c'est à dire que le milieu est constitué de n couches, chacune d'épaisseur e_i et de perméabilité k_i alors les moyennes arithmétique et harmonique s'écrivent :

$$\begin{aligned} \mu_a &= \left(\sum_{i=1}^{n} e_i \right)^{-1} \sum_{i=1}^{n} k_i e_i \\ \mu_h &= \left(\sum_{i=1}^{n} e_i \right) \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{e_i}{k_i} \right)^{-1} \quad \text{si } \forall\ k_i,\ k_i \neq 0 \end{aligned} \tag{3.13}$$

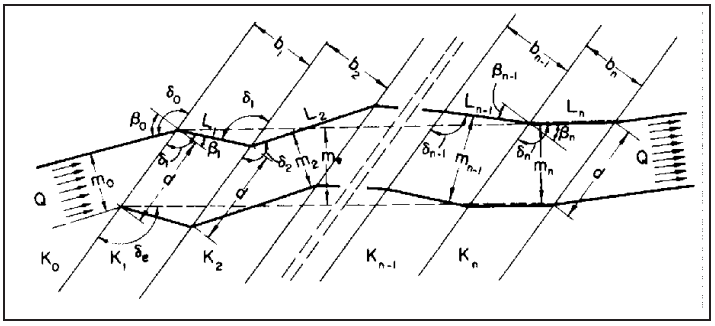


FIG. 3.6 : *Écoulement dans une direction donnée à travers un milieu stratifié (d'après Bear 1972)*

En se basant sur les lois de réflexion-réfraction à l'interface entre deux milieux de perméabilités différentes, Marcus et Evenson (1961) obtiennent une formule qui permet de calculer la perméabilité équivalente K_b^δ en fonction de l'angle que fait la direction moyenne d'écoulement avec la stratification δ. Cette formule est tirée de Bear (1972).

$$\frac{K_b^\delta}{1+(\frac{K_b^\delta}{K_0})^2\cot^2\delta_0} = \frac{\sum_{i=1}^n b_i}{\sum_{i=1}^n \frac{b_i}{K_i \sin^2\delta_i}} \tag{3.14}$$

Les résultats précédents ne sont valables que si les perméabilités locales sont scalaires. Dans le cas où elles sont tensorielles, Quintard and Whitaker (1987) montrent que pour un milieu stratifié composé de deux phases de perméabilités tensorielles $\boldsymbol{k}_0$ et $\boldsymbol{k}_1$ le tenseur de perméabilité effective s'exprime par :

$$\boldsymbol{K} = f_0\boldsymbol{k}_0 + f_1\boldsymbol{k}_1 + \frac{f_0 f_1 (\boldsymbol{k}_0 - \boldsymbol{k}_1)\cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot (\boldsymbol{k}_1 - \boldsymbol{k}_0)}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot (f_0\boldsymbol{k}_1 + f_1\boldsymbol{k}_0) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \tag{3.15}$$

avec $f_0 = \frac{V_0}{V_{tot}}$ la fraction de milieu de perméabilité $\boldsymbol{k}_0$ et f_1 la fraction de milieu de perméabilité $\boldsymbol{k}_1$. Le même résultat a été obtenu par Kasap and Lake (1990) en calculant, en deux dimensions, la perméabilité équivalente d'un bloc constitué de deux parallélépipèdes de perméabilités (tensorielles) différentes, en supposant que les lignes de courant qui traversent ce système sont des droites. L'annexe B généralise ce calcul en trois dimensions.

3.4.2 Résolution numérique de l'équation de la diffusivité

Plusieurs techniques existent pour résoudre numériquement des équations différentielles : les différences finies, les éléments finis, les éléments finis mixtes, les éléments spectraux, etc. Dans le cas de l'équation de la diffusivité, ces techniques permettent le calcul d'une solution approchée ($h(x,y,z)$ et $\boldsymbol{u}(x,y,z)$) pour n'importe quel champ de perméabilité et n'importe quelles conditions aux limites.

Les méthodes de calcul de la perméabilité équivalente par résolution de l'équation de la diffusivité sont appelées parfois *méthodes inverses* (Bachu and Cuthiell 1990; Dykaar and Kitanidis 1992b).

Méthodes locales et conditions aux limites

Perméabilité directionnelle

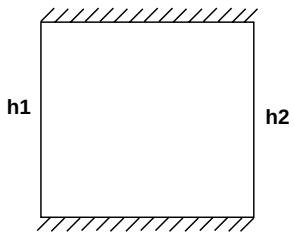


FIG. 3.7 : *Conditions limites "de type perméamètre"*

On emploie des *conditions aux limites* de type *perméamètre* : on impose une charge constante h_1 sur la face d'entrée du bloc, une charge constante h_2 sur la face opposée, et un flux nul sur les autres faces (figure 3.7). Le différence de charge est notée $\Delta H = h_2 - h_1$. On simule, avec ces conditions aux limites et à l'aide d'un modèle numérique, l'écoulement dans le bloc. On obtient ainsi les débits sur les éléments de discrétisation. La sommation des débits élémentaires permet d'obtenir le débit total Q qui traverse le bloc. La perméabilité du bloc est alors donnée par :

$$K_b = -\frac{Q}{S}\frac{L}{\Delta H} \tag{3.16}$$

avec L la distance entre les deux faces à charge imposée, ΔH la différence de charge et S la section traversée par le débit Q. En faisant tourner les conditions aux limites et en simulant à nouveau l'écoulement on obtient la perméabilité suivant les trois directions x, y et z. Ce type de calcul a été appliqué dès les débuts de l'emploi des méthodes numériques (Warren and Price 1961).

Perméabilité tensorielle

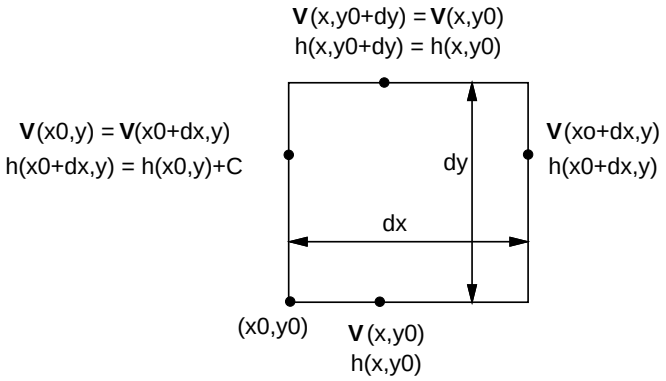


FIG. 3.8 : *Conditions limites de type périodique*

De nombreux auteurs ont fait remarquer l'importance d'utiliser un tenseur complet de perméabilité équivalente (White and Horne 1987; Durlofsky 1991; Pickup et al. 1994). En effet, il n'y a pas de raison de supposer que les directions principales de la perméabilité équivalente sont toujours parallèles aux axes de la grille utilisée. De plus, d'une maille de la grille à la suivante les directions principales d'anisotropie peuvent changer. Et ce, même si les perméabilités macroscopiques sont isotropes. Les termes croisés de la perméabilité équivalente sont difficiles à mesurer sur échantillon et à grande échelle. Mais leur calcul par des méthodes numériques ne pose pas de difficultés majeures. Il n'y a donc pas de raison de les négliger.

Durlofsky (1991) propose d'utiliser des *conditions aux limites périodiques* (figure 3.8). Un gradient de charge constant et l'égalité des vitesses sont imposés point à point sur les faces opposées du domaine – cela revient à supposer que le milieu est périodique dans l'espace.

On peut alors calculer, pour un gradient dans une direction donnée, les flux dans toutes les directions. Le tenseur de perméabilité s'exprime alors :

$$K_b^{uv} = -\frac{Q_u^v}{S}\frac{L}{\Delta H^v} \tag{3.17}$$

Avec Q_u^v le débit dans la direction u résultant d'un gradient de charge dans la direction v (ΔH^u). L'emploi de conditions aux limites périodiques permet d'obtenir un tenseur de perméabilité qui est toujours symétrique et qui vérifie outre l'égalité des flux l'égalité des énergies dissipées (Bøe 1994).

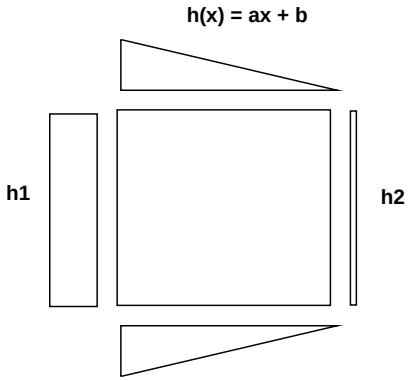


FIG. 3.9 : *Conditions limites de type uniforme*

Dans le même esprit, des *conditions aux limites uniformes* (figure 3.9) ont été employées pour le calcul du tenseur de perméabilité (Long et al. 1982; Billaux 1990; Ababou et al. 1994; Holden and Lia 1992; Bierkens and Weerts 1994; Gallouët and Guérillot 1994). La charge varie linéairement sur les six faces du bloc $h(x,y,z) = ax+by+cz+d$. Cela revient à immerger le bloc dans un milieu homogène soumis à un écoulement uniforme et à supposer que le bloc ne modifie pas l'écoulement extérieur. Ce qui n'est pas le cas dès que le champ de perméabilité dans le bloc n'est pas homogène. Ainsi, ces conditions aux limites ne sont pas très réalistes physiquement.

On remarquera que les conditions aux limites de type uniforme ne donnent pas un tenseur de perméabilité symétrique contrairement aux conditions de type périodique.

Madsen (1994) propose une méthode dans le cas de maillages constitués d'éléments finis triangulaires ou tétraédriques réguliers. En utilisant le critère d'égalité des énergies dissipées et des conditions aux limites de types uniformes, sa technique permet d'obtenir un tenseur complet de perméabilité qui est toujours symétrique.

Méthodes non-locales

General Tensor Scaling

Cette technique est la première méthode non-locale qui ait été proposée (White and Horne 1987). La technique est décrite en 2D([3], mais elle est aisément généralisable en 3D (Annexe 4.1.6). Elle permet le calcul des tenseurs de *transmissivité de passage* à grande échelle.

Avant d'entrer plus en détail dans la méthode, nous rappelons le principe de base de la discrétisation de la loi de Darcy avec la technique des différences finies, cela nous permet d'introduire la notion de transmissivité de passage. La charge hydraulique est discrétisée au centre de chaque maille (figure 3.10). Le gradient de charge entre deux mailles est approché par la différence des charges, aux centres des mailles, divisée par la distance entre les centres des mailles.

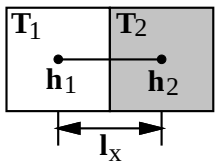


FIG. 3.10 : *Formulation aux différences finies*

$$(\mathbf{grad}\, h)_x = \frac{h_2 - h_1}{l_x}$$

La vitesse de Darcy entre deux mailles est exprimée à l'aide de la *transmissivité de passage* T_p, qui est une moyenne pondérée des transmissivité des deux mailles – fréquemment, on suppose que les deux mailles sont en séries et on utilise une moyenne harmo-

[3] Ainsi White and Horne (1987)) s'intéressent aux transmissivités et non aux perméabilités.

nique.

$$u_x = -T_p \frac{h_2 - h_1}{l_x} \qquad \text{avec} \qquad T_p = \frac{2T_1T_2}{T_1 + T_2}$$

Pour appliquer le General Tensor Scaling, il faut simuler l'écoulement sur le domaine entier à l'échelle de la grille fine avec plusieurs jeux de conditions aux limites. Cela peut paraître prohibitif, mais dans un contexte pétrolier où la grille de perméabilité après changement d'échelle sera utilisée pour simuler des écoulements polyphasiques, très coûteux en temps calcul, cela devient intéressant.

Ces simulations permettent d'avoir les champs de charges hydrauliques $h(x, y, i)$ et de vitesses $\boldsymbol{u}(x, y, i)$ à l'échelle fine pour $i = 1, \ldots, n$ conditions aux limites différentes. Les charges à grande échelle $H(x, y, i)$ sont calculées par prise de moyenne volumique pondérée par l'emmagasinement à l'intérieur de chaque bloc de la grille grossière.

$$H(x, y, i) = \frac{\int_V h(x, y, i) S(x, y) dV}{\int_V S(x, y) dV}$$

Cette charge est affectée au centre de la maille grossière. Les vitesses à grande échelle sont calculées en faisant la moyenne des vitesses obtenues à petite échelle.

$$\boldsymbol{U}(x, y, i) = \frac{1}{A} \int_A \boldsymbol{u}(x, y, i) dA$$

avec A l'aire de la surface séparant les deux blocs. Ainsi munis des vitesses et des charges à grande échelle, on peut écrire, pour chaque interface séparant deux blocs, une équation de Darcy tensorielle mégascopique.

$$\boldsymbol{U}(x, y, i) = \boldsymbol{T}_b \ \mathbf{grad}\,(H(x, y, i)), \quad \boldsymbol{T}_b = \begin{pmatrix} T_{xx} & T_{xy} \\ T_{yx} & T_{yy} \end{pmatrix}$$

Les inconnues sont alors les composantes du tenseur $\boldsymbol{T}_b$. On remarquera que White et Horne n'imposent pas, a priori, que le tenseur soit symétrique. Ils proposent d'utiliser la méthode des moindres carrés pour résoudre ce problème en minimisant l'écart sur les flux. Le critère des moindres carrés peut s'écrire alors :

$$\zeta = \sum_{i=1}^{n} \left(\boldsymbol{U}(i) - \boldsymbol{T}_{ge} \boldsymbol{I}(i)\right)^2 = \text{minimum}$$

avec $\boldsymbol{I}$ le gradient de charge entre les deux blocs voisins. Pour une interface séparant deux blocs, White et Horne calculent le gradient ainsi :

$$\begin{aligned} I_x(x + 1/2, y, i) &= \frac{H(x + 1, y, i) - H(x, y, i)}{\Delta x} \\ I_y(x + 1/2, y, i) &= \frac{1}{2}\left[\frac{H(x + 1, y + 1, i) - H(x + 1, y - 1, i)}{\Delta y} + \frac{H(x, y + 1, i) - H(x, y - 1, i)}{\Delta y}\right] \end{aligned}$$

La minimisation de ζ conduit à résoudre un système linéaire dont les composantes du tenseur $\boldsymbol{T}_b$ sont solutions. Par exemple, T_{xx} et T_{xy} sont solutions de :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} T_{xx} \\ T_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \end{pmatrix} \tag{3.18}$$

avec

$$a = \sum_{i=1}^{n} I_x(i)^2 \qquad b = \sum_{i=1}^{n} I_x(i) I_y(i) \qquad d = \sum_{i=1}^{n} I_y(i)^2$$

et

$$S_1 = \sum_{i=1}^{n} I_x(i)U_x(i) \qquad S_2 = \sum_{i=1}^{n} I_y(i)U_x(i)$$

Un système voisin permet de déterminer T_{yx} et T_{yy}. Il suffit de remplacer T_{xx} par T_{yx} et T_{xy} par T_{yy} et de changer la définition de S_1 et S_2 dans le second membre de l'équation (3.18) :

$$S_1 = \sum_{i=1}^{n} I_x(i)U_y(i) \qquad S_2 = \sum_{i=1}^{n} I_y(i)U_y(i)$$

Utilisation du voisinage

Gómez-Hernández and Journel (1990) proposent d'utiliser seulement une "peau" autour du bloc considéré (figure 3.11) Les conditions ne sont pas imposées directement sur la frontière du bloc (S sur la figure 3.11) mais le bloc est *immergé* dans le milieu hétérogène réel qui l'entoure et les conditions sont imposées aux frontières de ce domaine (E sur la figure). Gómez-Hernández and Journel (1990) utilisent des conditions limites de type uniformes sur E.

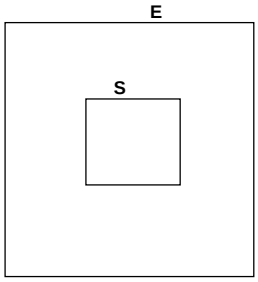


FIG. 3.11 : *Utilisation du voisinage*

La taille des calculs est ainsi réduite par rapport au General Tensor Scaling tout en maintenant la prise en compte de l'effet non local et le calcul du tenseur de perméabilité par la méthode des moindres carrés. Holden and Lia (1992) utilisent la même technique. Ils remarquent que le calcul du tenseur de perméabilité semble converger plus rapidement que le calcul de la solution en charge hydraulique. Ils proposent donc de modifier le programme de résolution numérique de l'équation de la diffusivité pour que le critère de convergence soit sur la perméabilité équivalente. Cela rendrait la méthode numérique plus performante, selon ces auteurs.

3.4.3 Équations homogènes

Wen and Gómez-Hernández (1993) regroupent les techniques dites d'homogénéisation, de prise de moyenne spatiale et la méthode des moments sous la terminologie : *méthodes aux équations homogènes*. Ce groupe de techniques est d'un intérêt théorique majeur. Il pose le problème de changement d'échelle sous des formalismes mathématiques différents, mais qui permettent tous de passer des équations à une échelle donnée aux équations à une échelle plus grossière, contrairement aux autres techniques (mise à part l'approche géostatistique) qui supposent que la loi de Darcy à grande échelle existe et qui cherchent seulement à calculer la perméabilité équivalente. Une comparaison de la théorie de l'homogénéisation et de la prise de moyenne spatiale est présentée dans l'article de Bourgeat, Quintard, and Whitaker (1988).

Théorie de l'homogénéisation

La méthode des échelles multiples dite *théorie de l'homogénéisation* se définit comme l'analyse asymptotique pour les milieux périodiques. Plusieurs ouvrages traitent du sujet (Bensoussan et al. 1978; Ene and Poliševski 1987; Sanchez-Hubert and Sanchez-Palencia 1992).

Cette approche connaît actuellement des développements pour les milieux aléatoires stationnaires (non périodiques). Par exemple, Bourgeat, Kozlov, and Mikelić (1995) développent la théorie dans le cas des écoulements diphasiques. Ils proposent un algorithme qui permet de déterminer

la perméabilité équivalente absolue d'un milieu aléatoire, ainsi que la taille minimale du volume qu'il faut homogénéiser pour obtenir une valeur représentative. Une application de cet algorithme est montré par exemple dans (Badea and Bourgeat 1995). On regrettera que les contrastes de perméabilités employés soient faibles et que l'approche ne soit pas comparée à des méthodes plus classiques. Un résultat théorique avec le même type d'approche est proposé par Kozlov (1993) pour les milieux aléatoires isotropes. Ce résultat est décrit dans la section 3.6.2 page 47.

Dans la suite, nous ne traiterons que de l'approche de base pour les milieux périodiques. Les deux caractéristiques principales de ce formalisme sont :

1. L'existence d'un petit paramètre, en général noté ϵ, qui permet une analyse de type développement asymptotique. La justification de l'existence de ce petit paramètre est que les milieux hétérogènes présenteraient deux échelles spatiales distinctes. L'hétérogénéité fine de longueur caractéristique l est incluse dans un système de variations à grande échelle de longueur caractéristique L. L peut par exemple être la taille du volume étudié. On décrit alors les phénomènes dans deux systèmes de coordonnées, $\boldsymbol{x}$ pour les variations macroscopiques et $\boldsymbol{y} = \frac{\boldsymbol{x}}{\epsilon}$ pour les variations microscopiques, avec ϵ définit par $\epsilon = \frac{l}{L}$.
2. Le milieu est supposé périodique et, par voie de conséquence, les phénomènes qui s'y produisent également. Cela est introduit dans la méthode en supposant que les différents termes des développements asymptotiques sont périodiques par rapport à la variable $\boldsymbol{y}$. La période étant le petit paramètre ϵ introduit précédemment.

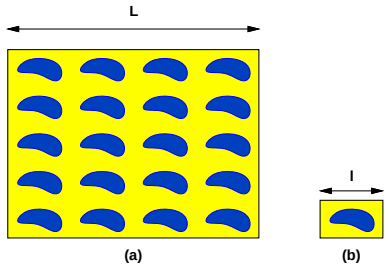


FIG. 3.12 : *Milieu périodique constitué de deux phases (a) et cellule unitaire du milieu périodique (b).*

Pourquoi étudier des milieux périodiques alors que l'on sait pertinemment que les milieux naturels ne le sont pas ? Tout d'abord, pour de tels milieux il existe des outils mathématiques permettant de prouver l'existence et l'unicité de la solution. Ensuite cette hypothèse permet d'obtenir des résultats nouveaux concernant les équations macroscopiques. Enfin, il est raisonnable de penser que des conditions aux limites de type périodique ne sont pas plus arbitraires que des conditions de type perméamètre ou uniforme. Ces dernières correspondant en fait à d'autres hypothèses tout aussi contraignantes sur la nature du milieu (voir discussion page 86). De plus, si le calcul s'effectue dans le cas où une perméabilité effective émerge, alors celle-ci doit être indépendante des conditions aux limites, et l'emploi des conditions périodiques n'a alors plus aucune importance.

La méthode d'homogénéisation donne un cadre théorique cohérent pour le calcul de la perméabilité effective. On remarquera que le calcul des paramètres effectifs nécessite la résolution numérique de la formule résultant des développements mathématiques. L'avantage par rapport aux méthodes numériques directes serait une meilleure connaissance de l'erreur d'approximation commise.

Cette méthode a été appliquée à de nombreux problèmes de changement d'échelle différents. Ainsi, elle permet le passage des équations de Navier-Stokes à celle de Darcy (Mei and Auriault 1989), l'étude des écoulements monophasiques (Sáez et al. 1989; Otero et al. 1990), polyphasiques en milieu poreux (Sáez et al. 1989) et fracturés (Bourgeat 1984).

Pour illustrer la méthode dans le cas d'un écoulement monophasique, nous reprenons les principales étapes du calcul en suivant l'article de Njifenjou (1994). Le point de départ est l'écriture des équations de continuité et de la loi de Darcy. Il est alors postulé que la pression peut être développée sous la forme :

$$p = p_0(\boldsymbol{x}) + \epsilon p_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + \epsilon^2 p_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + \ldots, \quad \boldsymbol{y} = \frac{\boldsymbol{x}}{\epsilon}$$

Il en résulte que la vitesse dans le milieu poreux s'exprime par :

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0(\boldsymbol{x}) + \epsilon \boldsymbol{v}_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + \epsilon^2 \boldsymbol{v}_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + \dots$$
$$\text{avec} \quad \boldsymbol{v}_k = -\frac{\boldsymbol{k}}{\mu} \left(\mathbf{grad}_x p_k + \mathbf{grad}_y p_{k+1} \right), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$\mathbf{grad}_x$ représente le gradient par rapport à $\boldsymbol{x}$ et $\mathbf{grad}_y$ le gradient par rapport à $\boldsymbol{y}$.

Lorsque ϵ tend vers 0 on obtient les équations homogénéisées :

$$\operatorname{div} < \boldsymbol{v}_0 > = 0 \tag{3.19}$$
$$< \boldsymbol{v}_0 > = -\frac{\boldsymbol{K}_{ef}}{\mu} \mathbf{grad}_x p_0 \tag{3.20}$$

Les crochets <> représentent l'opérateur prise de moyenne volumique sur la période de référence (par rapport à la variable $\boldsymbol{y}$), et la perméabilité effective s'exprime par la formule (Sáez, Otero, and Rusinek 1989; Njifenjou 1994) :

$$K_{ef}^{ij} = < k^{ij} > + < \sum_{m=1}^{D} k^{im} \frac{\partial b_j}{\partial y_m} > \quad i, j = 1, \dots, D \tag{3.21}$$

Le vecteur *auxiliaire* $\boldsymbol{b}$ est défini par ses composantes $b_i(\boldsymbol{y})$, solutions du système d'équations :

$$\operatorname{div}_y \left(\boldsymbol{k} \ \mathbf{grad}_y b_i \right) = -\operatorname{div}_y \boldsymbol{k}_i \quad \text{dans } \Omega \tag{3.22}$$
$$b_i \text{ périodique sur } \Gamma \tag{3.23}$$

Le second membre désigne la divergence de la $i$ème composante du tenseur $\boldsymbol{k}$. L'existence et l'unicité de $\boldsymbol{b}$ ont été montrées par Bensoussan et al. (1978). On a $< \boldsymbol{b} >= 0$ dans Ω. Le terme $< \sum_{m=1}^{D} k^{im} \frac{\partial b_j}{\partial y_m} >$ est parfois appelé *tortuosité* et noté $\boldsymbol{\tau}$.

En posant $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{y}) + \boldsymbol{y}$, Njifenjou (1994, équation 34) donne une expression équivalente à l'équation (3.21) :

$$K_{ef}^{ij} = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \boldsymbol{k} \, \mathbf{grad} \, u_i \cdot \mathbf{grad} \, u_j \ d\omega, \quad i, j = 1, \dots, D$$

$$\text{avec} \quad \begin{cases} \operatorname{div} (\boldsymbol{k} \, \mathbf{grad} \, u_i) = 0 \quad \text{dans } \Omega \\ u_i(\boldsymbol{x}) - x_i \quad \Omega \text{ périodique sur } \Gamma \end{cases}$$

L'avantage de cette formulation est qu'elle permet de montrer directement la symétrie de $\boldsymbol{K}_{ef}$ et qu'elle se prête plus facilement a un traitement numérique. Njifenjou utilise pour résoudre le problème en $\boldsymbol{b}$ une méthode d'éléments finis mixtes.

Il remarque également que $\operatorname{div} (u_j \boldsymbol{k} \, \mathbf{grad} \, u_i) = \boldsymbol{k} \, \mathbf{grad} \, u_i \cdot \mathbf{grad} \, u_j + u_j \operatorname{div} (\boldsymbol{k} \, \mathbf{grad} \, u_i)$ et en appliquant le théorème de la divergence il obtient (Njifenjou 1993) :

$$K_{ef}^{ij} = -\frac{1}{\Omega} \int_{\Gamma} u_j (\boldsymbol{k} \, \mathbf{grad} \, u_i \cdot \boldsymbol{n}) d\gamma \quad i, j = 1, \dots, D$$

Cette méthode pour calculer le tenseur de perméabilité équivalent est très proche de celle proposée par Bamberger (1977) cité par Njifenjou (1993, p. 178) La seule différence avec la formule proposée par Njifenjou réside dans le choix des conditions aux limites définissant le vecteur $\boldsymbol{u}$. Pour Bamberger, qui étudie un milieu poreux hétérogène non périodique, on remplace la condition de périodicité sur u_i par :

$$u_i(\boldsymbol{x}) = x_i \quad i = 1, 2, \dots, D \quad \text{sur } \Gamma$$

Prise de moyenne spatiale

La dénomination complète est "prise de moyenne des équations par intégration sur un grand volume et résolution du problème de fermeture".

La méthode de prise de moyenne avec fermeture s'est développée en même temps que la théorie de l'homogénéisation. Ses objectifs sont semblables mais le formalisme mathématique est différent. Les valeurs moyennes sont définies comme des moyennes spatiales. Si l'on s'intéresse par exemple à une grandeur Ψ on note $<\Psi>$ la grandeur mesurable c'est-à-dire la moyenne à l'échelle locale et $\{<\Psi>\}$ la moyenne à grande échelle, celle-ci est définie par :

$$\{<\Psi>\} = \frac{1}{\Omega}\int_{\Omega} <\Psi> d\omega \tag{3.24}$$

Les grandeurs mesurables sont écrites comme étant égales à la valeur à grande échelle plus une déviation.

$$<\Psi> = \{<\Psi>\} + \hat{\Psi} \tag{3.25}$$

Ces définitions sont introduites dans les équations décrivant le phénomène. Les équations obtenues sont simplifiées à l'aide du théorème de la prise de moyenne spatiale (Howes and Whitaker 1985). Et des approximations sont rendues possibles par l'hypothèse que l'inégalité suivante est vérifiée.

$$l \ll r_0 \ll L \tag{3.26}$$

avec L la taille du domaine, r_0 la longueur caractéristique du volume de prise de moyenne Ω et l la taille des hétérogénéités. On obtient alors des relations reliant les déviations aux variables à grande échelle. Pour obtenir une *fermeture* du problème il faut déterminer les équations différentielles qui régissent les déviations et les résoudre, le plus souvent numériquement. L'avantage de remplacer le problème initial par le problème de fermeture est que ce dernier est numériquement plus stable. La solution ainsi obtenue serait plus fiable que la solution obtenue par résolution directe du problème d'écoulement sur le milieu hétérogène.

Cette méthode appliquée au passage à l'échelle supérieure est appelée *prise de moyenne à grande échelle*, dans le cas du passage de l'échelle microscopique à l'échelle macroscopique on parle de *prise de moyenne locale*. Ses principales applications ont été le passage des équations de Navier-Stokes à l'équation de Darcy (Whitaker 1986a; Anguy, Bernard, and Ehrlich 1995), aux équations des écoulements multiphasiques (Whitaker 1986b) et aux équations de transport de masse (Quintard and Whitaker 1994a). La prise de moyenne à grande échelle a été appliquée aux écoulements monophasiques (Quintard and Whitaker 1987) et polyphasiques (Quintard and Whitaker 1988; Ahmadi and Quintard 1996).

La définition des variables à grande échelle par prise de moyenne spatiale (équation 3.24) est sujette à discussion (Marle 1967; Hassanizadeh and Gray 1979; Narasimhan 1983; Marsily 1989). Il est clair que la prise de moyenne ne peut se faire que si ΨdV est une grandeur additive. Dans notre cas, cela pose un problème pour la charge hydraulique ou la pression motrice. Certains auteurs proposent de garder la prise de moyenne volumique, mais de passer à une grandeur additive en multipliant la pression par l'emmagasinement (Narasimhan 1980). Ce point de vue est contesté par Hassanizadeh and Gray (1979) et Gray (1980) qui rappellent que la pression est définie par unité de surface et qu'il faut donc faire la prise de moyenne sur une surface et non sur un volume.

Une définition des variables macroscopiques plus générale que l'équation (3.24) est proposée par Matheron (1965) et reprise par Marle (1967), Baveye and Sposito (1984), Cushman (1984), Marsily (1989), Quintard and Whitaker (1994b), etc. L'idée est d'utiliser une *fonction de pondération* dans la prise de moyenne :

$$\{<\Psi>\}(\boldsymbol{x}) = \int_{\Omega} <\Psi>(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}')m(\boldsymbol{x}')d\boldsymbol{x}' \tag{3.27}$$

La fonction de pondération m est positive et son intégrale étendue à l'infini vaut 1. Cette technique permet de prendre en compte la nature de la variable physique et de son processus de mesure. Par exemple il est aisé de transformer l'intégrale volumique en intégrale surfacique, simplement par le choix d'un fonction m non nulle uniquement sur une surface. On notera que cette approche permet d'éliminer des hypothèses contraignantes sur la taille du volume de prise de moyenne (notion de Volume Élémentaire Représentatif). Mais, même si en théorie cette approche est générale, en pratique le choix de la fonction de pondération reste arbitraire (Marsily 1989).

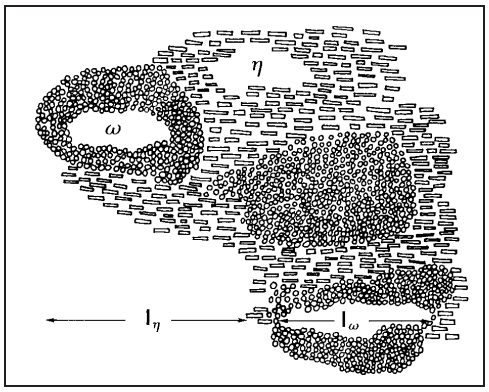


FIG. 3.13 : *Milieu poreux à deux phases (d'après Quintard, 1987).*

Pour illustrer la méthode de prise de moyenne avec fermeture, nous reprenons la démarche exposée par Quintard and Whitaker (1987) pour un écoulement monophasique dans un milieu constitué de deux phases (voir figure 3.13). Ils partent des équations de Darcy et de continuité à l'échelle locale dans chaque phase :

$$\left.\begin{array}{c} \mathrm{div} < \boldsymbol{v} >_\omega = 0 \\ < \boldsymbol{v} >_\omega = -\frac{\boldsymbol{k}_\omega}{\mu} (\mathbf{grad} < p >_\omega - \rho \boldsymbol{g}) \end{array}\right\} \quad \text{dans } \omega$$

$$\left.\begin{array}{c} \mathrm{div} < \boldsymbol{v} >_\eta = 0 \\ < \boldsymbol{v} >_\eta = -\frac{\boldsymbol{k}_\eta}{\mu} (\mathbf{grad} < p >_\eta - \rho \boldsymbol{g}) \end{array}\right\} \quad \text{dans } \eta$$

avec comme conditions aux limites aux interfaces :

$$\left.\begin{array}{c} \boldsymbol{n}_{\omega\eta} \cdot < \boldsymbol{v} >_\omega = \boldsymbol{n}_{\omega\eta} \cdot < \boldsymbol{v} >_\eta \\ < p >_\omega = < p >_\eta \end{array}\right\} \quad \text{sur } A_{\omega\eta}$$

Après introduction des déviations et application du théorème de prise de moyenne spatiale, en supposant de plus que les contraintes sur les échelles des hétérogénéités sont respectées, ils obtiennent que l'écoulement à grande échelle est régi par les équations :

$$\mathrm{div} \{< \boldsymbol{v} >\} = 0$$
$$\{< \boldsymbol{v} >\} = -\frac{1}{\mu} \left[\{\boldsymbol{k}\} (\mathbf{grad} \{< p >\} - \rho \boldsymbol{g}) + \left\{ \hat{\boldsymbol{k}} \, \mathbf{grad} \, \hat{p} \right\} \right]$$

Pour obtenir la fermeture du problème il faut connaître les déviations $\hat{p}$. En supposant qu'il est suffisant d'étudier les déviations dans une cellule représentative du milieu, ils calculent les déviations uniquement sur une maille élémentaire dans un système spatialement périodique dont les vecteurs de bases sont notés $\mathbf{1}_1, \mathbf{1}_2$ et $\mathbf{1}_3$. Ils montrent alors que le terme contenant les déviations peut s'exprimer à l'aide d'un vecteur arbitraire $\boldsymbol{b}$ définit par le problème de fermeture suivant :

$$\boldsymbol{k}_\omega : \boldsymbol{\nabla\nabla b_\omega} = 0 \quad \text{dans } \omega$$
$$\boldsymbol{k}_\eta : \boldsymbol{\nabla\nabla b_\eta} = 0 \quad \text{dans } \eta$$

sous les conditions aux limites :

$$\left.\begin{array}{c} \boldsymbol{n}_{\omega\eta}\cdot\boldsymbol{k}_{\omega}\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{b}_{\omega}=\boldsymbol{n}_{\omega\eta}\cdot\boldsymbol{k}_{\eta}\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{b}_{\eta}+\boldsymbol{n}_{\omega\eta}\cdot(\boldsymbol{k}_{\eta}-\boldsymbol{k}_{\omega}) \\ \boldsymbol{b}_{\omega}=\boldsymbol{b}_{\eta} \end{array}\right\} \quad \text{sur } A_{\omega\eta}$$

$$\begin{array}{l} \boldsymbol{b}_{\omega}(\boldsymbol{r}+\mathbf{1}_i)=\boldsymbol{b}_{\omega}(\boldsymbol{r}) \\ \boldsymbol{b}_{\eta}(\boldsymbol{r}+\mathbf{1}_i)=\boldsymbol{b}_{\eta}(\boldsymbol{r}) \end{array} \qquad i=1,2,3 \quad \text{(périodicité)}$$

et l'équation de Darcy à grande échelle devient

$$\{<\boldsymbol{v}>\}=-\frac{\boldsymbol{K}_{ef}}{\mu}\left(\mathbf{grad}\,\{<p>\}-\rho\boldsymbol{g}\right) \tag{3.28}$$

avec

$$\boldsymbol{K}_{ef}=\epsilon_{\omega}\boldsymbol{k}_{\omega}+\epsilon_{\eta}\boldsymbol{k}_{\eta}+(\boldsymbol{k}_{\eta}-\boldsymbol{k}_{\omega})\cdot\left(\frac{1}{V_{\infty}}\int_{A_{\omega\eta}}\boldsymbol{n}_{\boldsymbol{\omega\eta}}\boldsymbol{b}_{\boldsymbol{\omega}}\right) \tag{3.29}$$

$\epsilon_{\omega}=\frac{V_{\omega}}{V_{\infty}}$ est la fraction de la phase ω dans le milieu et, de même, ϵ_{η} est la fraction de la phase η.

Le problème de fermeture est résolu analytiquement dans le cas d'un milieu stratifié (voir équation 3.15, page 31). Dans le cas général, le problème de fermeture doit être résolu numériquement. Un exemple est donné dans le cas d'un milieu à hétérogénéités rectangulaires périodiques.

Méthode des moments

Kitanidis (1990) utilise la méthode des moments de Taylor-Aris, généralisée par Brenner (Brenner 1980; Brenner 1982) pour obtenir des équations homogénéisées dans le cas d'un milieu périodique. Cette méthode est aussi parfois appelée méthode numérique spectrale.

Comme pour les deux techniques décrites précédemment, le calcul de la perméabilité effective se fait en deux étapes. On résout tout d'abord le problème aux limites concernant les variables auxiliaires $b_1,\ b_2,\ldots,b_D$. Ici il s'exprime ainsi :

$$\mathrm{div}\,(\boldsymbol{k}\,\mathbf{grad}\,b_i)=\mathrm{div}\,\boldsymbol{k}_i$$

soumis à des conditions aux limites périodiques, avec $\boldsymbol{k}_i$ la $i^{\text{ème}}$ colonne de la matrice $\boldsymbol{k}$. Ces équations différentielles sont résolues par une méthode numérique spectrale (Dykaar and Kitanidis 1992a).

Le calcul des termes du tenseur de perméabilité équivalente se fait ensuite avec la formule :

$$K_{ef}^{ij}=-\frac{1}{2V}\int_V\left(\boldsymbol{K}_i\cdot\mathbf{grad}\,b_j+\boldsymbol{k}_j\cdot\mathbf{grad}\,b_i\right)dV+\frac{1}{V}\int_V k^{ij}dV \tag{3.30}$$

3.4.4 Tube de courant

La méthode des tubes de courant permet de calculer la perméabilité verticale d'un système binaire sable-argile. Les formations argileuses sont décrites par des rectangles (en 2D) ou des parallélépipèdes (en 3D) aplatis et de perméabilité nulle. La perméabilité à grande échelle est obtenue en calculant les pertes de charge, le long d'un tuyau tortueux circulant dans la matrice sableuse isotrope (Haldorsen and Lake 1982; Martin and Cooper 1984). Une amélioration de la méthode consiste en l'incorporation de paramètres statistiques sur la taille et l'abondance des inclusions argileuses, et sa généralisation aux milieux stratifiés (Begg and King 1985). Le sable est supposé

de perméabilité anisotrope k_{hj} et k_{vj}. La perméabilité équivalente est exprimée en fonction de la longueur des lignes de courant dans le milieu. Les lignes de courant sont approchés par des lignes verticales et horizontales (figure 3.14). La formule proposée est tirée de l'article de synthèse de Fayers and Hewett (1992) :

$$K_v = \frac{(1-F_s)H^2}{N_S} \sum_{i=1}^{N_S} \frac{1}{S_i S_{ei}} \tag{3.31}$$

avec F_S fraction d'inclusions argileuses, H l'épaisseur de la formation, N_S nombre de lignes de courant sélectionnées, S_i la longueur de la $i^{\text{ème}}$ ligne de courant et S_{ei} la longueur pondérée par la perméabilité :

$$S_i = \sum_j^{N_j} \left(h_j + \sum_j^{n_j} d_{ijk} \right) \qquad S_{ei} = \sum_j^{N_j} \left(\frac{h_j}{k_{vj}} + \sum_j^{n_j} d_{eijk} \right)$$

n_j est le nombre d'inclusions imperméables rencontrées dans la couche j.

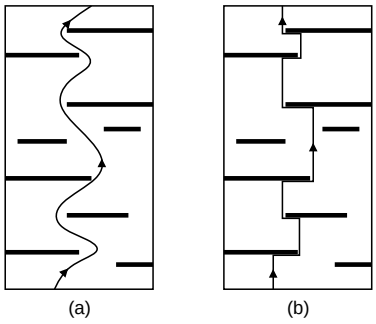


FIG. 3.14 : *Méthode approchée pour calculer la longueur du tube de courant : (a) vraie ligne de courant ; (b) approximation par des segments de droites (d'après Begg and King, 1985).*

La longueur horizontale du $k^{\text{ième}}$ pas de la $i^{\text{ème}}$ ligne de courant dans la $j^{\text{ème}}$ couche est donnée par :

$$\begin{aligned} d_{ijk} &= r_{1ijk} l_{ijk} \quad \text{ou} \quad r_{2ijk} w_{ijk} \\ d_{eijk} &= \frac{r_{1ijk} l_{ijk}}{k_{xj}} \quad \text{ou} \quad \frac{r_{2ijk} w_{ijk}}{k_{yj}} \end{aligned}$$

où r_{1ijk} et r_{2ijk} sont des nombres aléatoires uniformes, et l_{ijk} et $wijk$ sont la longueur et l'épaisseur des inclusions.

Cette équation peut être approchée dans le cas de système complexe par :

$$K_v = \frac{(1-F_S)H^2}{\sum_j^{N_j}(h_j + f_j d_j) \sum_j^{N_j} (\frac{1}{k_{vj}} + \frac{f_j}{k_{hj}\bar{d}_j})} \tag{3.32}$$

où f_j est le nombre d'inclusions argileuses par mètre dans la couche j et

$$\bar{d}_j = \frac{\bar{w}_j}{6\bar{l}_j}(3\bar{l}_j - \bar{w}_j)$$

3.4.5 Renormalisation dans l'espace réel

D'un point de vue historique, la renormalisation est issue de la physique statistique (Kadanoff 1966; Wilson 1975). La renormalisation est utilisée fréquemment dans le contexte de la théorie de la percolation (cf. § 3.5.2 page 45) et dans une approche statistique pour prévoir par exemple les seuils de percolation (voir Sahimi 1994 pour une synthèse récente). Ici, les techniques présentées sont uniquement appliquées au calcul de la perméabilité équivalente pour un milieu donné, dans ce contexte *renormalisation* doit être entendu comme *procédure d'aggrégation itérative*. Cette utilisation de la renormalisation est généralement associée à King (1989). Toutefois, une méthode du même type est proposée dans la thèse de Le Loc'h (1987, p. 107-110).

La renormalisation est un algorithme itératif. La perméabilité équivalente d'une grille finement discrétisée est déterminée par une série d'agrégations successives. Par exemple, on passe dans un espace de dimension D, d'une grille constituée de 2^{nD} mailles à une autre plus grossière contenant

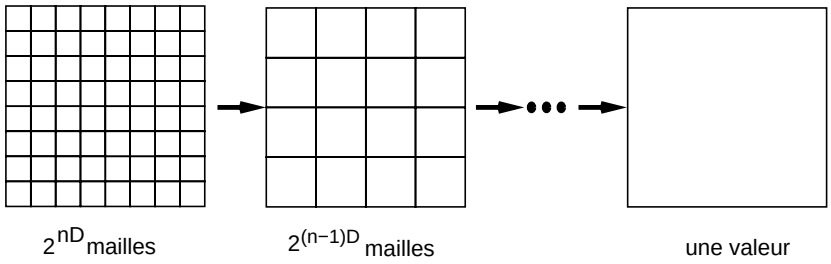


FIG. 3.15 : *Principe général de la renormalisation.*

$2^{(n-1)D}$ mailles. Puis on répète cette opération jusqu'à obtenir le maillage de la taille voulue, éventuellement une seule maille (figure 3.15).

Dans ce cas, l'opération de base est le calcul de la perméabilité équivalente d'une cellule de 2^D mailles. Comme il n'existe pas de formule exacte en 2 et 3D il faut faire un calcul approché. King (1989) utilise pour cela un réseau électrique analogue du milieu poreux. L'obtention de la perméabilité se fait par des transformations triangle-étoile successives (figure C.3 page 199). Cette formulation est en fait équivalente à une résolution du problème d'écoulement par une méthode de différence finie avec un schéma centré (figure 3.16).

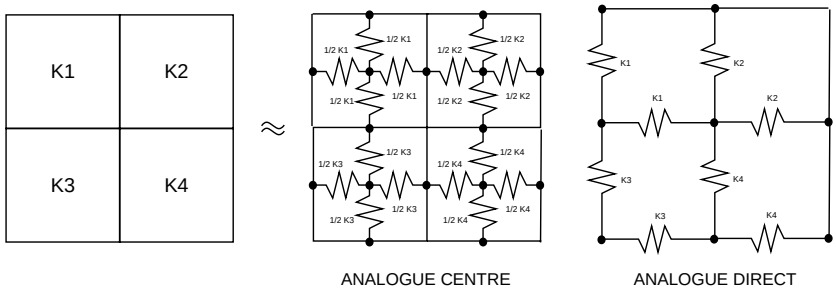


FIG. 3.16 : *Analogues électriques permettant le calcul de la perméabilité équivalente d'une cellule de base.*

Plusieurs variantes ont été proposées. Elles portent essentiellement sur le type de schéma aux différence finies et sur les conditions aux limites. Par exemple, un schéma direct semble plus précis (Kruel-Romeu 1994). En utilisant des conditions aux limites périodiques, Gautier and Nœtinger (1997) calculent un tenseur complet. Ils utilisent de plus cette méthode pour calculer le champ des vitesses dans le milieu. Enfin, Le Loc'h (1987) propose une méthode originale où les mailles ne sont associées que deux à deux. Cette dernière méthode est présentée dans le chapitre 5.

Nous décrivons ici uniquement les formules permettant la mise en œuvre de la renormalisation standard et tensorielle en deux dimensions. Les équations en trois dimensions sont présentées en Annexe C.

Renormalisation standard

En deux dimensions le calcul peut être mené soit par transformations triangle-étoile successives soit en posant un système linéaire de type différences-finies. Les deux formulations sont équivalentes et aboutissent à la formule :

$$K_{xx} = \frac{4(k_1+k_3)(k_2+k_4)\left[k_2k_4(k_1+k_3)+k_1k_3(k_2+k_4)\right]}{\left[k_2k_4(k_1+k_3)+k_1k_3(k_2+k_4)\right]\left[k_1+k_2+k_3+k_4\right]+3(k1+k_2)(k_3+k_4)(k_1+k_3)(k_2+k_4)} \tag{3.33}$$

Hinrichsen et al. (1993) fournissent dans leur article le programme Fortran qui permet le calcul en deux et trois dimensions.

Renormalisation tensorielle

Gautier and Nœtinger (1997) proposent, dans la même lignée, une méthode qui permet le calcul du tenseur complet. Les conditions aux limites sont de type périodique et le schéma direct.

Soit un réseau carré de quatre mailles numérotées de 1 à 4 (voir figure 3.16). Pour simplifier la présentation, les mailles sont supposées carrées. On écrit le bilan en chacun des quatre nœuds. Puis on factorise les coefficients sur les charges. Le résultat est un système de quatre équations dont les inconnues sont les charges. En remarquant que le système est lié, on peut fixer une des valeurs (par exemple $h_4 = 0$) et résoudre un système 3×3.

$$A \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_2^{xx} & k_3^{yy} \\ k_4^{xy} - k_2^{xx} - k_2^{xy} & k_4^{yy} \\ k_4^{xx} & k_4^{xy} - k_3^{xy} - k_3^{yy} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta H_x \\ \Delta H_y \end{pmatrix}$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} k_1^{xx} + k_2^{xx} + k_1^{yy} + k_3^{yy} + 2k_1^{xy} & -(k_1^{xx} + k_2^{xx} + k_1^{xy} + k_2^{xy}) & -(k_1^{yy} + k_3^{yy} + k_1^{xy} + k_3^{xy}) \\ -(k_1^{xx} + k_3^{xx} + k_1^{xy} + k_2^{xy}) & k_1^{xx} + k_4^{yy} + k_2^{xx} + 2k_2^{xy} + k_2^{yy} & k_1^{yy} + k_4^{xy} \\ -(k_1^{yy} + k_3^{yy} + k_1^{xy} + k_3^{xy}) & k_1^{xy} + k_4^{xy} & k_1^{yy} + k_4^{xx} + k_3^{xx} + 2k_3^{xy} + k_3^{yy} \end{pmatrix}$$

Ce système permet de calculer les charges aux nœuds du réseau en se fixant les ΔH. On peut remarquer que ce système est lié et donc qu'il est possible de se fixer une des valeurs de pression (par exemple $h_1 = 0$) et résoudre seulement un système 3×3. Ensuite on calcule les débits globaux à travers le domaine :

$$\begin{cases} U_x &= (k_3^{xy} - k_1^{xx} - k_1^{xy})\ h_1 + k_1^x\ h_2 - (k_3^{xx} + k_3^{xy})\ h_3 - k_3^{xy}\ \Delta H_y \\ U_y &= (k_2^{xy} - k_1^{yy} - k_1^{xy})\ h_1 + (k_1^{xy} - k_2^{yy} - k_2^{xy})\ h_2 + k_1^{yy}\ h_3 - k_2^{xy}\ \Delta H_x \end{cases}$$

Grâce à ces équations on sait exprimer de façon complexe U_x en fonction de ΔH_x et ΔH_y, de même pour U_y. Pour obtenir le tenseur équivalent, on écrit donc :

$$\begin{pmatrix} K^{xx} & K^{xy} \\ K^{yx} & K^{yy} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta H_x \\ \Delta H_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_x(\Delta H_x, \Delta H_y) \\ U_y(\Delta H_x, \Delta H_y) \end{pmatrix}$$

et on prend les solutions particulières $\Delta H_x = 1, \Delta H_y = 0$ et $\Delta H_x = 0, \Delta H_y = 1$. On trouve :

$$\boldsymbol{K}_b = \begin{pmatrix} U_x(1,0) & U_y(1,0) \\ U_x(0,1) & U_y(0,1) \end{pmatrix} \tag{3.34}$$

3.5 Méthodes statistiques

3.5.1 Théorie des milieux effectifs

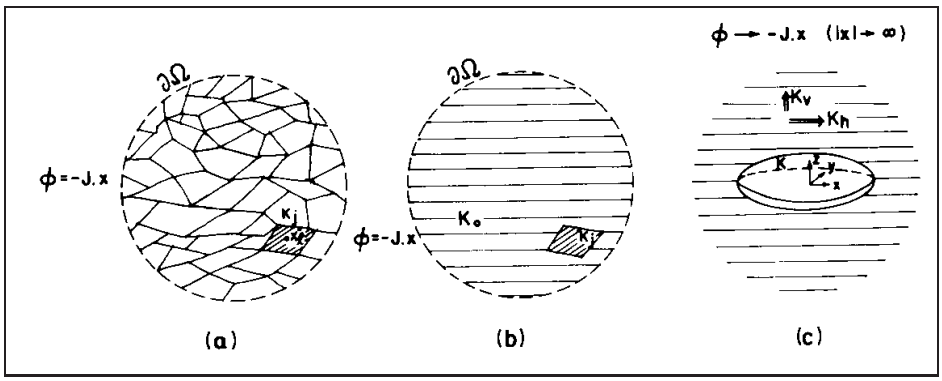


FIG. 3.17 : *Représentation schématique d'un milieu auto-cohérent, d'après Dagan (1989). (a) Milieu hétérogène constitué de plages de perméabilité constante, (b) Inclusion immergée dans une matrice uniforme de perméabilité K_o. (c) Inclusion représentée par un sphéroïde immergé dans un milieu infini.*

En anglais la dénomination équivalente est Effective Medium Theory (EMT) mais d'autres terminologies sont utilisées : milieu auto-cohérent (self-consistent approach) ou encore embedding matrix method.

La méthode est illustrée par la figure 3.17. Un milieu hétérogène constitué de la juxtaposition de blocs homogènes est remplacé par une seule inclusion de perméabilité K_j insérée dans une matrice homogène de perméabilité inconnue K_o. Les conditions aux limites sont suffisamment éloignées de l'inclusion pour supposer que le gradient de potentiel, et donc le flux, sont constants autour de l'inclusion. Si l'inclusion est de forme simple, alors il existe une solution analytique pour le champ de potentiel à l'intérieur et à l'extérieur de l'inclusion. Les hypothèses sont que les perturbations du champ de potentiel dues à n'importe quelle inclusion n'interfèrent pas avec les perturbations dues à une autre inclusion et que $K^o = K_{ef}$. Le calcul dans le cas d'inclusions sphériques donne (Dagan 1979; Dagan 1989) :

$$K_{ef} = \frac{1}{D}\left[\int_0^\infty \frac{f(k)dk}{(D-1)K_{ef}+k}\right]^{-1} \tag{3.35}$$

avec $f(k)$ la fonction densité de probabilité de la perméabilité. Cette équation peut s'intégrer numériquement en incrémentant K_{ef} jusqu'a obtenir l'égalité. Dagan (1989) et Poley (1988) donnent également une expression dans le cas d'inclusions ellipsoïdales. Il obtiennent ainsi un tenseur de perméabilité effective anisotrope.

King (1989) élimine la fonction densité de probabilité de k et propose la formule itérative suivante :

$$\begin{aligned} K_{n+1} &= \frac{1}{D\left\langle (k+(D-1)K_n)^{-1}\right\rangle} \\ K_{ef} &= \lim_{n\to\infty} K_n \end{aligned} \tag{3.36}$$

avec $< >$ l'opérateur prise de moyenne, k la perméabilité locale, K_n la perméabilité effective estimée à la $n^{\text{ième}}$ itération et K_{n+1} celle estimée à l'itération suivante. D est la dimension d'espace.

Dans le cas des milieux binaires, l'équation (3.35) s'exprime :

$$K_{ef} = \frac{1}{D}\left[\frac{f_0}{k_0 + (D-1)K_{ef}} + \frac{f_1}{k_1 + (D-1)K_{ef}}\right]^{-1}$$

Selon Desbarats, cette formule donne satisfaction pour $f_0 < 0.6$. La phase 0 représentant la phase de plus faible perméabilité.

3.5.2 Théorie de la percolation

La théorie de la percolation traite, d'un point de vue statistique, du problème de la communication à travers des systèmes complexes constitués d'objets qui peuvent être en relation ou non.

Un exemple classique (de Gennes 1976) est celui d'une mer parsemée d'îles. Si le niveau de la mer baisse, les îles grandissent. Petit à petit certaines îles sont reliées entre elles par des cordons littoraux. Si le niveau continue de baisser, un continent va apparaître pour une valeur critique du niveau de la mer. Il existe alors un chemin continu à travers le réseau de cordons littoraux qui permet d'aller d'un bord à l'autre du domaine. Cette transition est appelée *transition de percolation*, et la valeur critique est dénommée *seuil de percolation*.

Ce type de transition apparaît dans une très grande variété de problèmes : viscosité de matériaux polymérisés, conduction dans des milieux hétérogènes, diffusion d'une information ou d'un virus dans une population, etc. Plus spécifiquement Guyon, Hulin, and Lenormand (1984) et plus récemment Berkowitz and Balberg (1993) étudient l'ensemble des applications de cette théorie à la physique des milieux poreux.

En ce qui concerne la perméabilité équivalente, la théorie de la percolation s'est intéressée aux matériaux constitués de deux phases dont l'une est non perméable. Soit n la proportion de milieu perméable. Au voisinage du seuil de percolation n_c, on a :

$$\begin{array}{lll} n < n_c & \longrightarrow & K_{ef} = 0 \\ n > n_c & \longrightarrow & K_{ef} = A \times (n - n_c)^{\mu} \end{array} \tag{3.37}$$

avec μ qui est sensé ne dépendre que de la dimension d'espace, A et n_c qui dépendent de la géométrie du réseau (voir tableau 3.2).

On peut noter que cette théorie s'applique assez bien à l'échelle du pore où l'on a réellement une phase imperméable (la matrice) et une phase perméable (les pores), ou pour les milieux fracturés (Sahimi 1994; Bour 1996).

type de milieu	A	n_c	μ	Référence
2D isotrope		0.5	1.1	(Sykes and Essam 1964)
2D	dépend milieu	dépend milieu	1.1	(de Gennes 1976)
3D	dépend milieu	dépend milieu	1.6	(de Gennes 1976)
3D	dépend milieu	dépend milieu	1.8	(Guyon, Hulin, and Lenormand 1984)

TAB. 3.2 : *Quelques valeurs des exposants et du seuil de percolation intervenant dans l'équation (3.37).*

3.6 Méthodes géostatistiques

Pour traiter l'incertitude liée à la connaissance partielle du sous-sol, l'approche géostatistique considère les variables étudiées comme des fonctions aléatoires de l'espace.

Dans ce contexte, les variables d'état à grande échelle sont définies par des espérances mathématiques des variables d'états à l'échelle inférieure. Matheron (1967) montre avec ce formalisme que dans le cas d'un écoulement régi par la loi de Darcy à l'échelle macroscopique, à condition que cet écoulement soit quasi-uniforme à l'échelle mégascopique (gradient de charge constant sur des domaines suffisamment grands), alors à l'échelle mégascopique émerge une nouvelle loi de Darcy reliant les variables mégascopiques :

$$E(\boldsymbol{v}) = -\boldsymbol{K}_{ef} E(\mathbf{grad}(h)) \tag{3.38}$$

où $E(\boldsymbol{v})$ représente l'espérance mathématique de la vitesse d'écoulement dans le domaine et $E(\mathbf{grad}(h))$ l'espérance du gradient de charge. $\boldsymbol{K}_{ef}$ est la perméabilité effective.

La détermination de la loi de probabilité de la perméabilité équivalente se trouve alors posée en terme d'équation différentielle stochastique, c'est à dire sous forme d'une équation différentielle reliant plusieurs variables aléatoires. La résolution complète reviendrait à déterminer pour chaque fonction aléatoire sa loi de probabilité en tous points. Cela est en général impossible. On se contente de calculer les premiers moments (espérance, variance, covariance, etc.) ou au moins leur approximation. Pour cela un grand nombre de méthodes – dont la description détaillée sort du cadre de cette thèse – ont été employées : méthode spectrale, méthode des perturbations, théorie des champs, méthode de Monte Carlo, etc. Nous nous intéressons uniquement aux principaux résultats. Le lecteur voulant se familiariser à l'approche stochastique pourra se référer à Matheron (1967), Dagan (1989), et Gelhar (1993) et il trouvera une revue critique des différentes méthodes dans Kitanidis (1995) .

3.6.1 Règle de pondération géométrique

Un des rares résultats exacts est la règle de pondération géométrique. Elle a été démontrée par Matheron (1967). La démonstration, extrêmement élégante, repose sur le fait que dans un espace à deux dimensions une rotation de 90^o transforme un vecteur gradient en un vecteur conservatif et réciproquement. Sous les conditions que la perméabilité k et son inverse $h = \frac{1}{k}$ sont des fonctions aléatoires qui admettent les mêmes lois de distribution, et que ces fonctions sont invariantes par rotation de 90^o, alors la perméabilité effective se met sous la forme :

$$K_{ef} = \mu_g = \exp\left[E(\log k)\right] \tag{3.39}$$

Les hypothèses énoncées ci-dessus sont vérifiées dans le cas particulier d'un milieu log-normal isotrope ou d'un damier.

3.6.2 Résultats analytiques approchés et conjectures

Conjecture de Matheron

Landau and Lifshitz (1960), pour les équations de l'électrodynamique puis Matheron (1967) pour les écoulements uniformes en milieu poreux isotrope et stationnaire, suggèrent d'employer une formule qui est l'approximation au premier ordre de la perméabilité effective.

$$K_{ef} = \mu_a^{\frac{D-1}{D}} \mu_h^{\frac{1}{D}} \tag{3.40}$$

En trois dimensions et pour le cas des milieux log-normaux, cette formule se met sous la forme :

$$K_{ef} = \mu_g \exp\left[\sigma^2_{\ln k}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{D}\right)\right] \tag{3.41}$$

avec $\sigma^2_{\ln k}$ qui représente la variance du logarithme de la perméabilité. De nombreux auteurs se sont intéressés à la validité de cette formule. En particulier Gutjahr et al. (1978) effectuent des calculs par la méthode des perturbations, en supposant que $\sigma^2_{\ln(k)}$ est petit ils trouvent :

$$K_{ef} = \mu_g \left[1 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{D}\right)\sigma^2_{\ln(k)}\right] \tag{3.42}$$

L'équation (3.42) est une approximation des résultats classiques (moyenne harmonique, moyenne géométrique) en une et deux dimensions. Dagan (1993) pousse les calculs à l'ordre quatre et il obtient :

$$K_{ef} = \mu_g \left[1 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{D}\right)\sigma^2_{\ln(k)} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{D}\right)^2 \sigma^4_{\ln(k)}\right] \tag{3.43}$$

Les équations (3.42) et (3.43) correspondent aux premiers termes du développement de Taylor de l'exponentielle. Elles ont donc été utilisées pour justifier la conjecture (3.41). L'avantage de l'équation (3.41), par rapport aux équations (3.42) et (3.43), est qu'elle n'est pas limitée aux petites variances. King (1987) puis Nœtinger (1994) utilisent la théorie des champs et un formalisme de fonctions de Green ; Nœtinger (1994) montre qu'une sous-série du développement perturbatif peut être re-sommée à tous les ordres. Il montre alors que l'équation (3.41) est valide pour un milieu log-normal isotrope non corrélé, la formule reste toutefois une approximation. De plus, il indique que l'équation (3.41) peut se mettre sous la forme :

$$K_{ef} = < k^{1-\frac{2}{D}} >^{(1-\frac{2}{D})^{-1}} \tag{3.44}$$

Toutefois, ce sujet n'est pas encore clos. Abramovich and Indelman (1995) et De Wit (1995) montrent par des développements perturbatifs que, pour des milieux isotropes corrélés, le coefficient en $\sigma^6_{\ln(k)}$ dépend de la forme de la fonction de corrélation. Ce qui est contraire à la conjecture de Matheron.

En revanche, Kozlov (1993) montre que la formule 3.44 est asymptotiquement exacte à partir d'une hypothèse originale sur la nature du milieu. Son modèle considère l'existence de n échelles d'hétérogénéité emboîtées :

$$k_n(\boldsymbol{x}) = k_0 \exp\left\{\frac{1}{\sqrt{n}} F_n(x)\right\}$$

$$F_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$$

avec $f_k(x)$ des champs indépendants, statistiquement homogènes et de longueurs de corrélation $\lambda_k \to \infty$ quand $k \to \infty$ avec $\frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k}$ converge aussi vers l'infini. Kozlov (1993) remarque alors que par application du théorème central limite $\frac{1}{\sqrt{n}} F_n(x)$ converge en loi vers une distribution normale quand n tend vers l'infini. Ainsi, si le nombre d'échelles n est suffisamment grand, k_n peut être considéré comme log-normal. Sous ces hypothèses et en appliquant la théorie de l'homogénéisation aux variables aléatoires, Kozlov montre que la perméabilité effective d'un tel milieu tend asymptotiquement vers la moyenne de puissance $1/3$ en trois dimensions lorsque n tend vers l'infini.

Prise en compte de l'anisotropie

Dans le cas d'un milieu anisotrope de covariance exponentielle, on peut calculer les perméabilités effectives dans les directions principales d'anisotropie par la formule (Gelhar and Axness 1983;

Gelhar 1993) développée au premier ordre en $\sigma^2_{\ln(k)}$:

$$K_{ef}^{ii} = \mu_g \left[1 + \sigma^2_{\ln(k)} \left(\frac{1}{2} - g_{ii}\right)\right] \tag{3.45}$$

avec

$$g_{ii} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k_i^2}{k^2} \frac{l_1 l_2 l_3 dk_1 dk_2 dk_3}{\pi^2(1 + l_1^2 k_1^2 + l_2^2 k_2^2 + l_3^2 k_3^2)}, \quad \sum_{i=1,2,3} g_{ii} = 1$$

avec l_i la longueur de corrélation dans la direction i et k_i la perméabilité locale dans la direction i. Cette formule n'est valable que pour $\sigma^2_{\ln(k)}$ petit. Comme précédemment, si on considère l'équation précédente comme une série de Taylor de la fonction exponentielle tronquée au premier ordre en $\sigma^2_{\ln(k)}$, une généralisation plausible pour les fortes valeur de $\sigma^2_{\ln(k)}$ est :

$$K_{ef}^{ii} = \mu_g \exp\left[\sigma^2_{\ln(k)} \left(\frac{1}{2} - g_{ii}\right)\right] = \mu_a \exp\left(-g_{ii}\sigma^2_{\ln(k)}\right) \tag{3.46}$$

Ababou (1995) propose de prendre en compte l'anisotropie avec une formule simplifiée :

$$K_{ef}^{ii} = \mu_g \exp\left(\sigma^2_{\ln(k)} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{D}\frac{l_h}{l_i}\right]\right) \tag{3.47}$$

avec l_i la longueur de corrélation dans la direction considérée et l_h la moyenne harmonique des longueurs de corrélation dans les directions principales d'anisotropie.

Le même type de formule est également proposé par Neuman (1994) :

$$K_{ef} = \mu_g \exp\left(\sigma^2_{\ln(k)} \left[\frac{1}{2} - \frac{\beta}{D}\right]\right) \tag{3.48}$$

avec $0 \leq \beta \leq D$. Plus précisément $\beta = 1$ dans le cas infini isotrope, $0 \leq \beta \leq 1$ dans le cas fini isotrope et $1 \leq \beta \leq D$ dans le cas infini anisotrope Mais il n'indique pas comment calculer a priori β.

Le développement à l'ordre deux en $\sigma^2_{\ln(k)}$ (Indelman and Abramovich 1994) aboutit à une formule dont le coefficient d'ordre deux dépend de la variance et de la dimension d'espace, mais encore de la forme de la fonction de covariance $C(\boldsymbol{r}) = \sigma^2_{\ln(k)}\rho(\boldsymbol{r})$ et non seulement des rapports d'anisotropie. $\rho(\boldsymbol{r})$ est la fonction d'autocorrélation.

$$K_{ef}^{ii} = \mu_g \left\{1 + \left(\frac{1}{2} - \alpha_i\right)\sigma^2_{\ln(k)} + \left[\left(\frac{1}{2} - \alpha_i\right)^2 + \gamma_i\right]\sigma^4_{\ln(k)}\right\} \tag{3.49}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_i &= \int \frac{d\boldsymbol{p}}{(2\pi)^2}\frac{k_i^2}{k^2}\tilde{\rho}(\boldsymbol{p}) \quad i = 1, \ldots, D \\
\gamma_i &= \frac{1}{2}\int\int \frac{d\boldsymbol{q}d\boldsymbol{p}}{(2\pi)^{2D}}\tilde{\rho}(\boldsymbol{q})\tilde{\rho}(\boldsymbol{p})\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{p}\frac{q^2+p^2}{(\boldsymbol{q}+\boldsymbol{p})^2}\left(\frac{q_i}{q^2} + \frac{p_i}{p^2}\right)^2
\end{aligned}$$

avec $\tilde{\rho}$ représente la transformé de Fourrier de la fonction d'autocorrélation : $\tilde{\rho} = \int \rho(\boldsymbol{r}) \exp(i\boldsymbol{K}\boldsymbol{r})d\boldsymbol{r}$. On notera que $g_{ii} = \alpha_i$ dans le cas où la covariance est exponentielle. La conjecture de Gelhar and Axness (1983) (équation 3.46) n'est donc pas vérifiée à l'ordre deux.

Mise en garde

Les résultats indiqués précédemment pourraient faire croire en l'existence de règles simples de calcul de la perméabilité effective. Cela n'est vrai que de façon approchée. Pour illustrer cette idée, Matheron (1968) effectue des calculs par la méthode de Schwydler qui consiste à poser :

$$\frac{k(x)}{E(k)} = 1 + \gamma(x) \qquad \text{avec} \qquad E(\gamma) = 0$$

et à rechercher l'expression de K_{ef} sous forme de développements limités. Matheron (1968) étudie trois modèles de milieux différents. Le premier est un "mot croisé aléatoire". Le second un milieu découpé en polygones convexes aléatoires par des droites poissonniennes. Le dernier est un milieu à loi infiniment divisible. Il obtient, à l'ordre trois en γ, pour les trois modèles :

$$\begin{aligned} 1) \quad & K_{ef} = m[1 - \tfrac{E(\gamma^2)}{2} + 0.279E(\gamma^3)] \\ 2) \quad & K_{ef} = m[1 - \tfrac{E(\gamma^2)}{2} + 0.307E(\gamma^3)] \\ 3) \quad & K_{ef} = m[1 - \tfrac{E(\gamma^2)}{2} + 0.250E(\gamma^3)] \end{aligned}$$

On notera que dans les trois cas le coefficient du terme d'ordre 3 est différent. Ainsi, pour Matheron, il n'existe pas de règle simple de composition des perméabilités uniformément valable, même dans le cas des milieux aléatoires isotropes.

Cette remarque va dans le même sens que les calculs d'Indelman and Abramovich (1994) pour les milieux anisotropes présentés dans le paragraphe précédent et que ceux d'Abramovich and Indelman (1995) ou De Wit (1995) pour les milieux isotropes log-normaux.

3.6.3 Perméabilité de bloc

Gómez-Hernández est le premier à avoir étudié le problème de la perméabilité de bloc d'un point de vue stochastique.

En prenant comme critère le débit moyen sur le bloc, Rubin and Gómez-Hernández (1990) définissent la perméabilité de bloc grâce à l'équation suivante :

$$\frac{1}{V}\int_V \boldsymbol{v}(x)dv = -\boldsymbol{K}_b \frac{1}{V}\int_V \mathbf{grad}\,(h)dv \tag{3.50}$$

V représente le volume du bloc étudié.

L'objectif principal de ce travail était d'exprimer l'espérance et la covariance de la perméabilité de bloc et la covariance croisée entre la perméabilité de bloc et la perméabilité locale, à partir de la loi de distribution de la perméabilité. Ces expressions ont été obtenues analytiquement en deux dimensions pour la transmissivité de bloc (Rubin and Gómez-Hernández 1990) dans le cas où la perméabilité locale est isotrope et son logarithme suit une loi multi-gaussienne; les hypothèses sont que le milieu est infini, l'écoulement uniforme et la variance du logarithme de k petite. En trois dimensions, pour la perméabilité on a (Gómez-Hernández 1991) :

$$E(K_b) = \mu_g \left[1 + \frac{\sigma^2_{\ln(k)}}{2} + \frac{1}{J_a}\left(\sigma^2_{\ln(k),J_x} - \bar{C}_{\ln(k),J_x}\right)\right] \tag{3.51}$$

$$C_{K_b}(\boldsymbol{r}) = \mu_g^2 \bar{C}_{\ln(k)}(V, V_{+\boldsymbol{r}}) \tag{3.52}$$

$$C_{K_b,\ln(k)}(V, \boldsymbol{r}) = \mu_g \bar{C}_{\ln(k)}(V, \boldsymbol{r}) \tag{3.53}$$

$\boldsymbol{r}$ est un vecteur de translation, J_a est le module de la moyenne arithmétique du vecteur gradient hydraulique ($\boldsymbol{J}$), J_x est la composante en x de $\boldsymbol{J}$. Les covariances moyennes ($\bar{C}$) s'expriment par :

$$\begin{aligned}
\bar{C}_{\ln(k),J_x} &= \frac{1}{V^2}\int_V\int_V C_{\ln(k),J_x}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\ d\boldsymbol{x}\ d\boldsymbol{x}' \\
\bar{C}_{\ln(k)}(V,V_{+\boldsymbol{r}}) &= \frac{1}{V^2}\int_V\int_{V+\boldsymbol{r}} C_{\ln(k)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')\ d\boldsymbol{x}\ d\boldsymbol{x}' \\
\bar{C}_{\ln(k)}(V,\boldsymbol{r}) &= \frac{1}{V}C_{\ln(k)}(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r})\ d\boldsymbol{x}\ d\boldsymbol{x}'
\end{aligned}$$

La covariance croisée entre le logarithme de la perméabilité et le gradient hydraulique $C_{\ln(k),J_x}$ peut s'exprimer à partir des résultats de Dagan (1989, sec. 3.7). Ces résultats analytiques sont confirmés par des simulations de Monte-Carlo.

D'un point de vue qualitatif on notera que, en deux dimensions d'espace :

$$\begin{aligned}
\lim_{V\to 0} K_b &= \mu_a \\
\lim_{V\to \infty} K_b &= \mu_g
\end{aligned}$$

La variance de K_b diminue quand V augmente, mais elle reste non négligeable pour des volumes importants. La covariance de K_b est différente de celle des perméabilités locales. L'intérêt majeur de cette approche est qu'elle rend possible le conditionnement des perméabilités de bloc par des mesures locales de charge et de perméabilité. Rubin and Gómez-Hernández (1990) remarquent que l'effet du conditionnement par h est plus faible que celui du conditionnement par $\ln(k)$. Dans les deux cas la variance de K_b diminue, mais elle diminue plus fortement pour un conditionnement par $\ln(k)$.

Plus récemment, Fenton and Griffiths (1993) étudient le même problème en deux dimensions à l'aide de simulations de Monte-Carlo. Ils font varier la taille des mailles, cela leur permet d'explorer l'effet de l'anisotropie sur les perméabilités de bloc. Pour les blocs non aplatis, ils concluent que les perméabilités de blocs ont vraisemblablement une loi de distribution log-normale. Ils donnent dans ce cas des expressions pour l'espérance et la variance de la perméabilité de bloc.

$$E(\ln(K_b)) = E(\ln(k)) \tag{3.54}$$

$$\sigma_{\ln(K_b)} = \sigma_{\ln(k)}\sqrt{\gamma_R} \tag{3.55}$$

$\gamma_R = \gamma(R,R)$ est la fonction de variance. R est le rapport d'anisotropie des mailles $R = \sqrt{dx/dy}$. Ils remarquent également que le facteur d'aplatissement a une influence maximale quand la taille des blocs est égale à la longueur de corrélation.

Dans le cas d'un milieu non log-normal pouvant présenter des anisotropies, Gómez-Hernández et Journel proposent une approche numérique (Gómez-Hernández and Journel 1990; Gómez-Hernández 1991). L'idée est de réaliser quelques simulations fines du champ de perméabilité. Pour toutes les simulations, on calcule les tenseurs de transmissivité de passage entre blocs par résolution numérique de l'équation de la diffusivité ; la méthode employée est celle décrite précédemment dans le paragraphe "utilisation du voisinage". Ces transmissivités à l'échelle des blocs servent à obtenir l'espérance et la covariance de T_b et la covariance croisée $C_{T_b,\ln(k)}$. Ensuite, il est possible de simuler directement les transmissivités de passage des blocs. Cette méthode est reprise par Tran (1996).

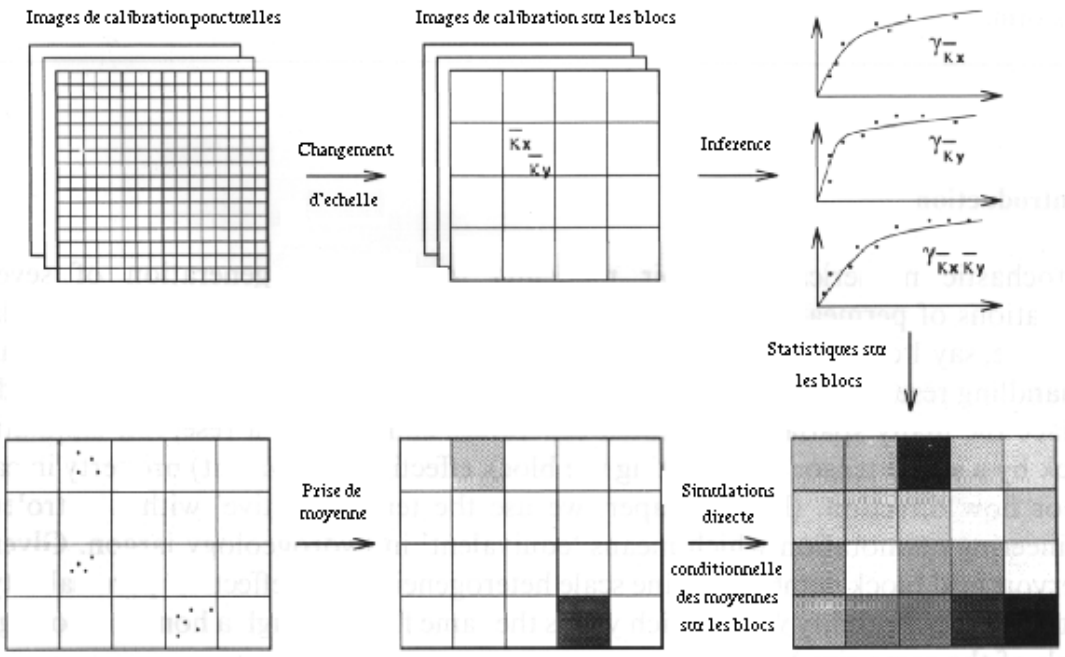


FIG. 3.18 : *Simulation "directe" des perméabilités de blocs (d'après Tran, 1996)*

3.7 Grille adaptative

Une difficulté liée à toutes les méthodes de calcul des perméabilités de bloc est que plus la variabilité de la perméabilité est grande dans le volume de prise de moyenne, plus l'incertitude sur la perméabilité à grande échelle est grande. Pour pallier cela, une idée est d'adapter automatiquement le maillage grossier de façon à minimiser l'erreur. Cette approche a été initiée par Garcia (Garcia, Journel, and Aziz 1990; Garcia 1991) et semble en plein essor, notamment dans l'industrie pétrolière. Récemment Durlofsky et al. (1994), Tran and Journel (1995), Yamada (1995) et Wen and Gómez-Hernández (1996) ont montré des applications de cette technique aux écoulements multiphasiques et au transport de particules.

On peut distinguer plusieurs types de grilles adaptatives. Il y a tout d'abord des grilles dont la géométrie ne dépend que du champ de perméabilité, d'autre qui prennent en compte les conditions d'écoulement. Certaines grilles sont des grilles régulières déformées, d'autres sont plutôt du type mailles emboîtées (Espedal and Sævareid 1994).

3.8 Comparaison des techniques et discussion

3.8.1 Peut on appliquer la conjecture de Matheron ?

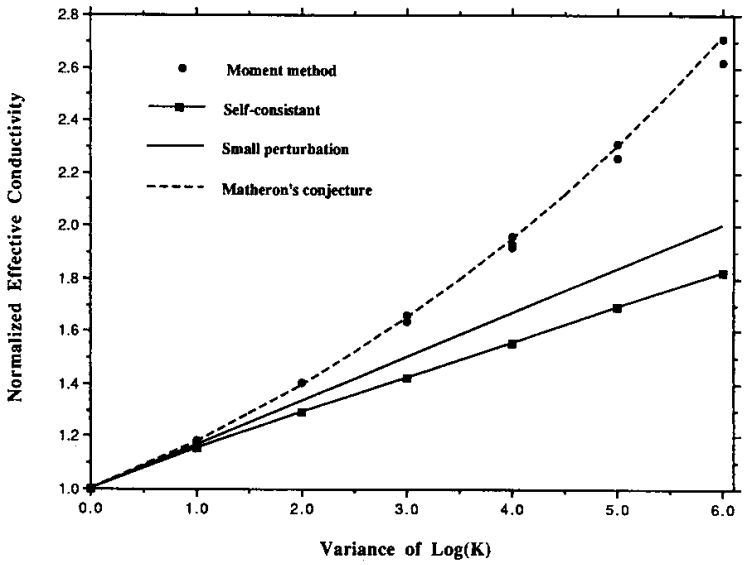


FIG. 3.19 : *Comparaison entre les perméabilités effectives obtenues par la théorie des milieux effectifs (***self-consistent** *sur la figure), la méthode des perturbations (***small-perturbation***), celle des moments (***moment method***) et la conjecture de Matheron pour un milieu 3D log-normal isotrope. On constate le bon accord entre les résultats numériques (moments) et la conjecture de Matheron (d'après Dykaar 1992b).*

Bien que la conjecture de Matheron (équation 3.41) soit sujette à de nombreuses discussions, elle a été testée avec succès par de nombreux auteurs y compris pour des milieux présentant des corrélations supérieures à la taille des mailles. Ainsi Desbarats (1992) étudie la moyenne de puissance et trouve expérimentalement qu'en trois dimensions, l'exposant vaut 1/3 pour un milieu de type log-normal. Ce qui correspond à la formule proposée par Nœtinger (équation 3.44). Dykaar and Kitanidis (1992b) montrent un écart de seulement 4% entre des calculs réalisés par la méthode numérique spectrale et la conjecture de Matheron (cf. figure 3.19). Ces résultats sont aussi confirmés par Neuman and Orr (1993) jusqu'à des valeurs de $\sigma^2_{\ln k} = 7$. Sànchez-Vila, Girardi, and Carrera (1995) comparent les résultats obtenus par trois méthodes a priori différentes : l'approche par résolution numérique de l'équation de la diffusivité avec des conditions aux limites de type perméamètre, la méthode de Rubin et Gómez-Hernández (équation 3.50) et la conjecture de Matheron. Ils montrent numériquement que ces trois approches donnent des résultats comparables pour un milieu log-normal avec $\sigma^2_{\ln k} < 1$. Notamment, ces trois approches vérifient le critère d'égalité des énergies dissipées. Enfin, des comparaisons avec des mesures de perméabilité effectuées à plusieurs échelles sur des échantillons de grès et de calcaire sont également positives (Nœtinger and Jacquin 1991).

En conclusion, il semble que la conjecture de Matheron s'applique avec un degré de précision tout à fait acceptable pour les milieux log-normaux isotropes en trois dimensions, si la taille du domaine étudié est suffisamment grande par rapport aux longueurs de corrélation.

3.8.2 Perméabilité effective ou perméabilité de bloc ?

Dans le choix d'une technique de changement d'échelle, un des premiers choix consiste à décrire le milieu hétérogène par une seule valeur : la perméabilité effective ou par un ensemble de valeurs : des perméabilités de bloc. Une étude qui permet de donner un début de réponse à cette alternative a été menée par Durlofsky (1992). Il compare trois méthodes en deux dimensions pour des milieux log-normaux corrélés. Les trois méthodes sont 1) une technique dite globale : on remplace le milieu hétérogène par une perméabilité effective uniforme, 2) la technique d'échantillonnage, et 3) une technique locale qui consiste à calculer la perméabilité de bloc en faisant la moyenne géométrique des valeurs dans le bloc.

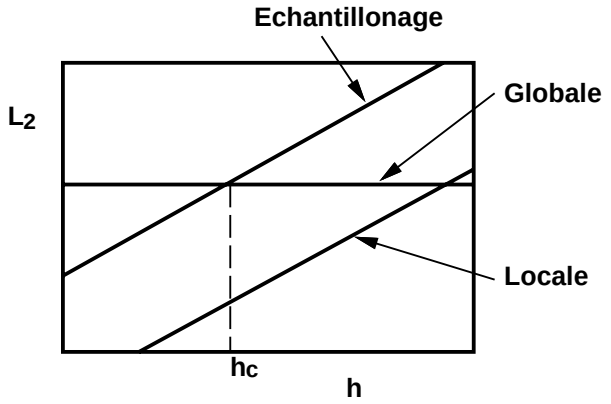


FIG. 3.20 : *Évolution de l'erreur quadratique (L_2) en fonction de la taille des blocs (h) pour trois techniques de passage à l'échelle supérieure. h_c est la valeur critique pour la technique d'échantillonnage. Si $h > h_c$ alors la méthode globale est plus précise que l'échantillonnage (d'après Durlofsky, 1992).*

Durlofsky calcule une solution de référence sur le milieu hétérogène initial par simulation différences finies. Puis, pour chaque méthode de changement d'échelle, un résultat de simulation donne la distribution de pression et de flux dans le milieu. Les erreurs quadratiques entre la solution de référence et les solutions après changement d'échelle sont étudiées en fonction du type de conditions limites, de la longueur de corrélation, de la tailles des blocs et de la variance du logarithme de la perméabilité. Il constate que l'erreur quadratique peut être approchée par $L_2 = ah^b$. L'erreur dans le cas de la perméabilité effective est indépendante de la taille des blocs. Il détermine ainsi, pour chaque configuration, une valeur critique h_c pour la technique d'échantillonnage et une pour la méthode locale (voir figure 3.20).

Il conclut :
- Pour les écoulements résultants de conditions aux limites sans terme source, la méthode par échantillonnage est plus précise que la méthode globale quand la taille des blocs est inférieure à la longueur de corrélation ($h_c = \lambda$). Ce résultat est indépendant de la variance du logarithme de la perméabilité ($\sigma^2_{\ln K}$).
- Pour un écoulement avec terme source uniforme, la valeur critique h_c est plus petite que lorsqu'il n'y a pas de terme source, une résolution plus fine est nécessaire pour que l'échantillonnage reste plus précis que la méthode globale. De plus, h_c décroît avec $\sigma^2_{\ln K}$.
- La méthode de prise de moyenne locale est plus précise que l'échantillonnage et en général que la méthode globale.

En d'autres termes, avec une méthode de calcul de la perméabilité de bloc un tant soit peu correcte, la perméabilité de bloc donne une meilleure précision. Par contre avec une méthode beaucoup plus frustre (l'échantillonnage), si les blocs ont une taille supérieure à la longueur de corrélation, il vaut mieux utiliser une perméabilité effective uniforme.

TAB. 3.3 : *Comparaisons des techniques de passage à l'échelle supérieure. Dans la colonne "Vitesse", les + indiquent que la méthode est rapide est facile à mettre en œuvre, à l'opposé les − indiquent la lourdeur d'une technique. La colonne "Tenseur" indique si la technique ne calcule pas de tenseur (non), et dans le cas contraire si celui-ci est diagonal (diag), symétrique (sym) ou non symétrique (n.s.).*

Méthode	Hypothèses		Vitesse	Tenseur	Remarques
	milieu	écoulement			
Inégalités pour la perméabilité équivalente					
Bornes de Wiener	aucune	uniforme	++	non	Résultats analytiques exacts
Bornes de Cardwell et Parsons	aucune	uniforme	+++	diag.	
Bornes de Hashin et Shtrikman	binaire isotrope	uniforme	++	non.	
Bornes de Matheron	mosaïque aléatoire isotrope 2D	uniforme	++	non	
Méthodes heuristiques					
Échantillonnage	aucune	aucune	+ + +	non	La méthode la plus pratiquée et la moins étudiée.
Composition de bornes	aucune	aucune	++	diag.	donne une barre d'erreur.
Moyenne de puissance	aucune	aucune	++	diag.	nécessite le calage d'un exposant.
Résolution analytique de l'équation de la diffusivité					
Moyenne arithmétique	stratifié	parallèle aux strates	++	non	Résultats exacts dans le cadre très limité des hypothèses, c'est à dire les milieux stratifiés.
Moyenne harmonique	stratifié	perpendiculaire aux strates	++	non	
Formule de Quintard et Whitaker	stratifié binaire	uniforme	++	sym.	méthode générale, risque de biais numérique
Résolution numérique de l'équation de la diffusivité					
cond. lim. perméamètre	aucune		–	diag.	
cond. lim. périodique	périodique	uniforme	–	sym.	Les conditions périodiques se révèlent robustes quelques soient les conditions réelles d'utilisation.
cond. lim. uniforme	aucune		–	n. s.	
cond. lim. perturbée	aucune		–	oui	
General Tensor Scaling (GTS)	aucune	aucune	– – –	n. s.	Prend en compte la totalité du système hétérogène, conduit parfois à des termes principaux négatifs.
Utilisation du voisinage	aucune		– –	n. s.	Prend en compte l'effet non-local tout en étant moins lourd que le GTS.
Équations homogènes					méthodes générales et rigoureuses
Homogénéisation	périodique	périodique	–	sym.	Ces trois méthodes nécessitent la résolution numérique d'équations aux dérivées partielles.
Prise de moyenne avec fermeture	périodique	périodique	–	sym.	
Méthode des moments	périodique	périodique	–	sym.	
Méthodes approchées					
Tube de courant	binaire, une phase imperméable	vertical	++	non	Ne calcule que la perméabilité verticale, précis que si la fraction de matériau imperméable est faible.
Renormalisation					Calculs itératifs approchés
Simplifiée	localement isotrope	aucune	++	diag.	Pas encore vraiment testée.
Standard	localement isotrope	aucune	+	diag.	comparable à différences finies si anisotropie faible.
Tensorielle	aucune	aucune	+	sym.	Pas encore vraiment testée.
Méthodes statistiques					
Théorie des milieux effectifs	les hétérogénéités n'inter-agissent pas	uniforme	++	diag.	Limité aux milieux faiblement hétérogènes.
Théorie de la percolation	proximité du seuil de percolation	?	++	non	Trois paramètres a caler.
Approche géostatistiques					
Moyenne géométrique	2D, $\boldsymbol{K}$ et son inverse suivent la même loi et sont invariantes par rotation de 90°	uniforme	++	non	Résultats analytiques généraux. Résultat exact, cas particulier : milieu log-normal isotrope et le damier.
Moyenne de puissance 1/3	3D log-normal isotrope	uniforme	++	non	Résultat approché valable même pour les fortes variances.
Perturbation	faible variance	uniforme	++	diag.	Résultats approchés seulement pour les faibles variances.

3.8.3 Méthode analytique ou numérique ?

Par méthode analytique, on entend les moyennes algébriques simples par opposition aux méthodes numériques qui requièrent la résolution numérique d'équations aux dérivées partielles.

Comme on peut le voir sur le tableau 3.3, qui donne pour toutes les techniques décrites les hypothèses sur le type de milieu et le type d'écoulement, les techniques analytiques ont un spectre d'application beaucoup plus limité que les numériques. Ainsi, elles ne donnent des résultats précis et utiles que pour les milieux stratifiés ou log-normaux isotropes avec des écoulements uniformes. Dans les autres cas, elles ne sont pas utilisables sans risques. A l'opposé, les techniques numériques sont les plus générales. Elles peuvent s'appliquer sur n'importe quel champ de perméabilité. Leur défaut est qu'elles sont coûteuses en espace mémoire et temps calcul.

Le choix analytique ou numérique est donc simple : si l'on est dans l'un des cas pour lesquels les méthodes analytiques ont été développées, il suffit d'appliquer la formule théorique. Sinon, il faut avoir recours au numérique. Évidemment, du fait de la taille du problème, il peut être impossible d'utiliser les méthodes numériques. On peut alors s'orienter soit vers une technique heuristique, soit vers des techniques d'approximation. Parmi ces dernières, la plus générale est la renormalisation.

3.8.4 Au sujet de la renormalisation

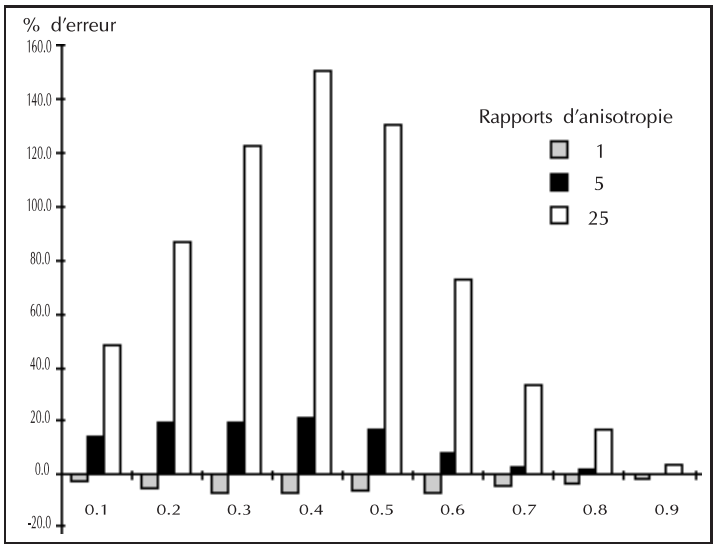


FIG. 3.21 : *Écart entre la perméabilité obtenue par résolution de l'équation de la diffusivité et par la renormalisation standard pour des milieux binaires, en fonction de la densité de milieu peu perméable pour trois rapports d'anisotropie des mailles (d'après Malick et Hewett, 1995).*

L'avantage de la renormalisation est d'être moins coûteuse que les techniques numériques mais plus générale que les techniques analytiques. Les résultats obtenus sont voisins de ceux obtenus par les techniques numériques de type différences finies, à condition que les lignes de courant ne soient pas trop tortueuses (King 1989). Quand cette condition n'est pas vérifiée, l'écart peut devenir important. Malick and Hewett (1995) montrent cet effet sur des milieux anisotropes. Ils étudient cet écart sur des milieux binaires et log-normaux, en faisant varier l'aplatissement du maillage. Ils concluent que l'erreur est d'autant plus forte que les mailles sont anisotropes. Pour les milieux binaires, l'erreur est maximale pour des densités moyennes de milieu peu perméable

Distribution log-normale isotrope 2D

$\sigma^2_{\ln k}$	0.5	10
Référence : μ_g	2.0	2.0
Théorie des milieux effectifs	2.0	2.0
Simulation différences finies	1.9	1.3
Renormalisation standard	1.8	1.3
Renormalisation tensorielle	2.0	2.1

Distribution log-normale isotrope 3D

$\sigma^2_{\ln k}$	0.5	10
μ_g	2.0	2.0
Référence : $\mu_{1/3}$	2.2	10.6
Théorie des milieux effectifs	2.1	4.7
Simulation différences finies	2.0	3.3
Renormalisation standard	2.1	3.1

TAB. 3.4 : *Résumé des résultats de King (1989) et de Gautier et Nœtinger (1997).*

(voir figure 3.21). Pour les milieux log-normaux, l'erreur augmente avec la variance. Selon Malick and Hewett (1995), cela est dû aux conditions aux limites de type perméamètre employées dans la renormalisation standard.

Une autre interprétation possible des différences observés est avancée par Gautier and Nœtinger (1997) qui s'appuient sur Kruel-Romeu and Nœtinger (1995). Ils notent que la renormalisation standard a tendance à sous-estimer la perméabilité (comme les différences finies). Par exemple pour un milieu log-normal en deux dimensions, on sait que la perméabilité équivalente est la moyenne géométrique (μ_g). Les résultats de King (1989), reportés dans le tableau 3.4, montrent que, pour un milieu log-normal 2D isotrope, les différences finies et la renormalisation standard donnent une perméabilité équivalente inférieure au résultat théorique exact. En revanche, les résultats de (Gautier and Nœtinger 1997) (tableau 3.4) montrent que la renormalisation tensorielle est nettement plus précise, notamment pour les fortes variances.

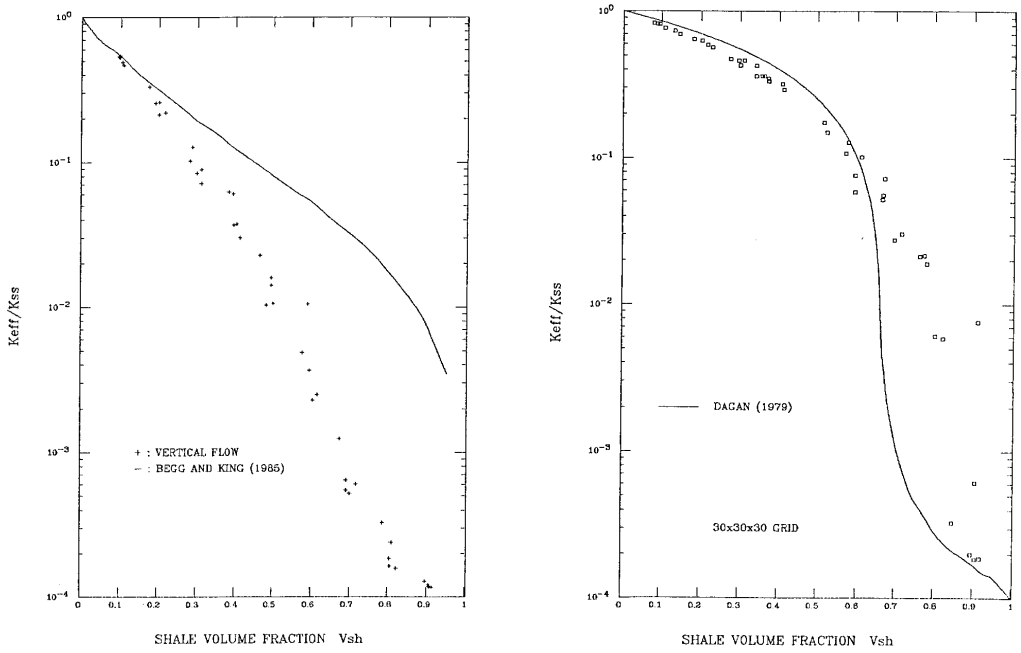
Le biais de la renormalisation standard et de la simulation par différences finies s'observent également en trois dimensions où le résultat théorique approché est la conjecture de Matheron (tableau 3.4). Bien que ne disposant pas de valeur théorique pour le cas général, on peut supposer que le même problème existe.

Pour conclure sur la renormalisation, c'est une méthode qui a connu un fort engouement mais, dans sa forme standard, elle souffre de deux maux importants : le biais systématique tout comme les différences finies et les conditions aux limites arbitraires. Les modifications proposées par Gautier and Nœtinger (1997) permettent une amélioration notable.

3.8.5 Quel domaine d'application pour les méthodes d'approximation ?

Nous regroupons sous cette terminologie, la méthode des tubes de courant, la théorie des milieux effectifs, la méthode des perturbations et la théorie de la percolation. Cette dernière ne propose une formule qu'à proximité du seuil de percolation et est donc d'un intérêt limité.

La méthode des tubes de courant se propose de calculer la perméabilité verticale dans un milieu perméable (grès-sable) contenant des inclusions horizontales peu perméables (argiles). Des tests réalisés par Begg, Carter, and Dranfield (1989) semblent montrer qu'elle donne de bons résultats.



(a) Milieu anisotrope

(b) Milieu isotrope

FIG. 3.22 : *Milieux binaires. Comparaison entre les perméabilités équivalentes obtenues par résolution numérique de l'équation de la diffusivité et deux méthodes d'approximation en fonction de la proportion de milieu peu perméable (V_{sh}). (a) comparaison entre la perméabilité verticale numérique (+) et le résultat de la méthode des tubes de courant (ligne continue). (b) comparaison des résultats numériques (□) et du résultat de la théorie des milieux effectifs (ligne continu) avec la formule de Dagan (1979). D'après Desbarats, 1987.*

Mais, pour Desbarats (1987) cette technique ne donne des résultats comparables aux résultats numériques que pour de très faibles proportions de milieu imperméable (voir figure 3.22-a).

Desbarats (1987) montre également que la formule issue de la théorie des milieux effectifs pour les milieux binaires (Dagan 1979) est comparable aux résultats numériques pour des quantités d'argile inférieures à 60 % (voir figure 3.22-b). Pour Dykaar and Kitanidis (1992b), la même formule, appliquée à des milieux binaires déterministes (voir figure 3.25), montre une bonne concordance avec la méthode numérique des moments. On pourra remarquer quand même que les milieux étudiés ont une proportion d'argile toujours inférieure à 50 %. Il ne se trouve donc pas dans les cas les plus défavorables décrits par Desbarats (1987).

Pour les milieux log-normaux, la théorie des milieux effectifs et les formules issues des calculs par perturbation ne donnent un résultat correct que si les perturbations sont faibles (Dykaar and Kitanidis 1992b). On remarque sur la figure 3.19 que la formule de Dagan donne des résultats moins bons que les calculs perturbatifs. Dans ce cas, l'hypothèse de non interaction entre les inclusions hétérogènes ne serait pas valide.

Il semble donc que les techniques d'approximations soient valables essentiellement dans le cas d'hétérogénéité pas trop importante. C'est à dire une variance faible pour les milieux log-normaux et une proportion de milieu peu perméable inférieure à 50 % pour les milieux binaires.

3.8.6 Les méthodes heuristiques ont elles un intérêt ?

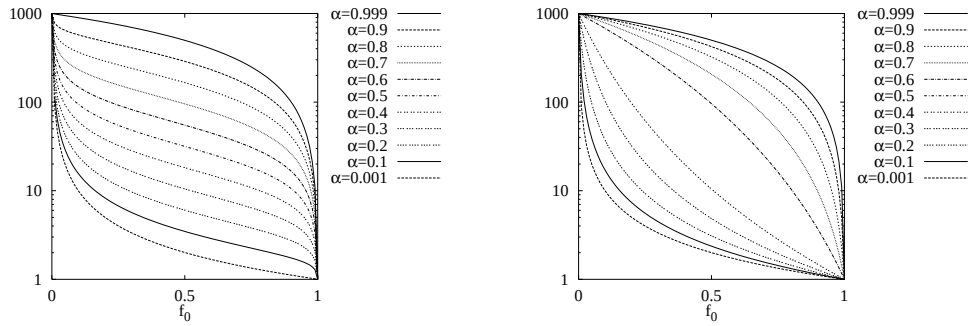
Les méthodes heuristiques sont essentiellement la moyenne de puissance et les formules de composition de moyennes.

Il est bon de remarquer tout d'abord que le comportement de ces moyennes est très différent. Par exemple, on peut comparer pour un milieu binaire le modèle de composition des moyennes arithmétique et harmonique (équation 3.9) et la moyenne de puissance p (équation 3.6) . L'exposant α du modèle de composition des moyennes est compris entre 0 et 1 et p entre -1 et 1. Pour que p et α varient dans le même intervalle, on peut écrire $p = 2\alpha - 1$. Nous avons tracé les courbes $K_b(f_0)$ avec les deux moyennes pour différentes valeurs de α pour $k_0 = 1$ et $k_1 = 1000$. La figure 3.23 montre clairement les différences de comportement. Quel que soit l'exposant, l'allure de la courbe est assez différente des résultats numériques exposés par Desbarats (1987) (voir figure 3.22) et Deutsch (1989). Cela signifie qu'avec ces deux modèles, même en ajustant l'exposant sur des mesures, on ne pourra pas décrire correctement l'évolution de la perméabilité en fonction de la proportion de milieu imperméable.

Les expériences numériques menées par Deutsch (1989) montrent que pour des proportions de milieu peu perméable inférieures à 40 %, la moyenne de puissance peut être calée correctement sur les résultats numériques. Il montre également que la formule de la théorie de la percolation peut être bien ajustée aux points expérimentaux, mais il faut alors ajuster trois paramètres. Il conclut en recommandant plutôt l'emploi de la moyenne de puissance. La limitation de cette approche est qu'il est nécessaire de faire un certain nombre de calculs avec des méthodes numériques pour caler l'exposant.

Ababou (1995) propose des exposants qui sont fonction des longueurs de corrélation mais leur applicabilité reste à démontrer.

Les méthodes de composition de moyenne ont l'avantage de fournir en plus de la valeur moyenne un intervalle de confiance : les deux bornes théoriques qui servent à calculer la moyenne. Les deux bornes les plus générales et les plus serrées sont les bornes de Cardwell et Parsons; on aura donc intérêt à préférer leur emploi aux bornes de Wiener. Njifenjou (1993, 1994) compare la méthode d'homogénéisation à la composition des bornes de Cardwell et Parsons. Il constate des erreurs



(a) $K_{eq} = \mu_a^{\alpha} \mu_h^{1-\alpha}$

(b) $K_{eq} =< k^p >^{1/p}$, $p = 2\alpha - 1$

FIG. 3.23 : *Comparaison de la moyenne de puissance et de la composition des moyennes arithmétique et harmonique ($k_0 = 1$, $k_1 = 1000$).*

importantes sur les flux à grande échelle (50%) alors que les techniques d'homogénéisation ou numérique directe donnent des erreurs maximales de l'ordre de 10 % pour des milieux aléatoires ou déterministes. Des tests d'écoulements diphasiques sur des milieux périodiques montrent également la supériorité attendue de la méthode numérique (voir figure 3.24). Là encore, on peut regretter l'absence de comparaison avec des méthodes approchées comme par exemple la renormalisation.

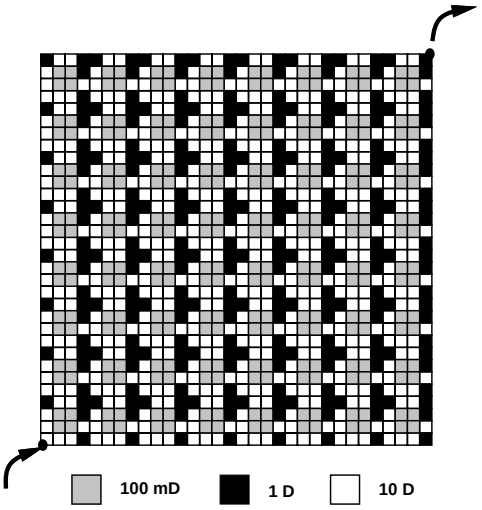
Enfin, la formule proposée par Kruel-Romeu (1994) pour prendre en compte l'anisotropie semble particulièrement intéressante. Les tests réalisés (Duquerroix, Lemouzy, Nœtinger, and Kruel-Romeu 1993; Kruel-Romeu 1994) sont positifs, mais mériteraient d'être complétés.

3.8.7 Quelle méthode numérique ?

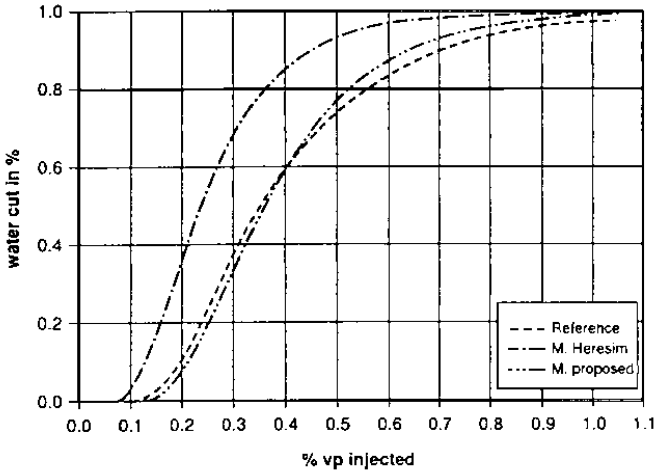
Il y a deux grands types de méthodes numériques : celles qui résolvent directement l'équation de la diffusivité et celles qui résolvent des équations sur des variables auxiliaires issues des techniques des équations homogènes (théorie de l'homogénéisation, prise de moyenne avec fermeture ou la méthode des moments).

La première question est de choisir entre ces deux types de techniques. Les méthodes directes font l'hypothèse que la loi de Darcy existe à grande échelle. Les secondes montrent que, sous certaines conditions (périodicité, taille de la période très inférieure à la taille du domaine), alors une loi de Darcy émerge à grande échelle avec un paramètre équivalent qui s'obtient en résolvant numériquement un système d'équation différentielle. Cette dernière approche est plus rigoureuse que la première. Mais les résultats sont-ils différents en pratique ?

Sur les milieux binaires étudiés par Bachu and Cuthiell (1990) et représentés sur la figure 3.25, Dykaar and Kitanidis (1992b) montrent des résultats très voisins entre la méthode numérique par résolution de l'équation de la diffusivité appliquée par Bachu et Cuthiell et la méthode des moments (figure 3.26). Comme nous l'avons déjà évoqué, Njifenjou (1993) compare plusieurs méthodes de type équations homogènes et la méthode numérique directe de Gallouët and Guérillot (1994) sur des milieux aléatoires ou déterministe. Il constate que ces techniques donnent des résultats voisins quant au flux traversant le milieu. Ces résultats sont nettement meilleurs que ceux obtenus avec une méthode heuristique. La comparaison est ensuite menée sur des milieux périodiques. Dans ce cas, la technique de type équation homogène montre sa supériorité sur la technique numérique directe. Il faut toutefois noter que la méthode numérique testée utilisait des conditions aux limites



(a) Champ de perméabilité



(b) Courbes de production

FIG. 3.24 : *Test d'écoulement five-spot diphasique sur milieu périodique : comparaison des courbes de production d'eau. Les trois courbes sont : la solution de référence simulée sur la grille fine et les courbes obtenues après passage à l'échelle supérieure avec la méthode d'homogénéisation et la composition des moyennes : "Heresim" (d'après Njifenjou, 1994).*

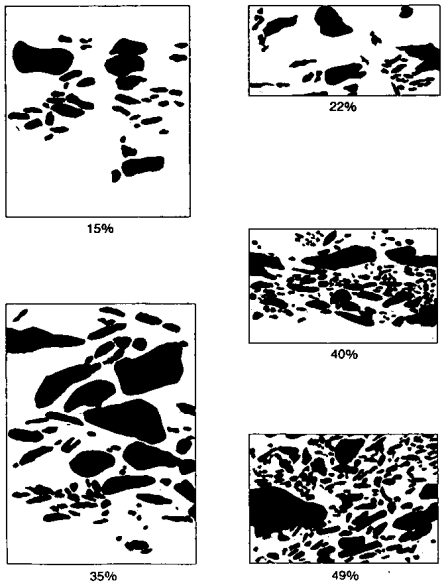


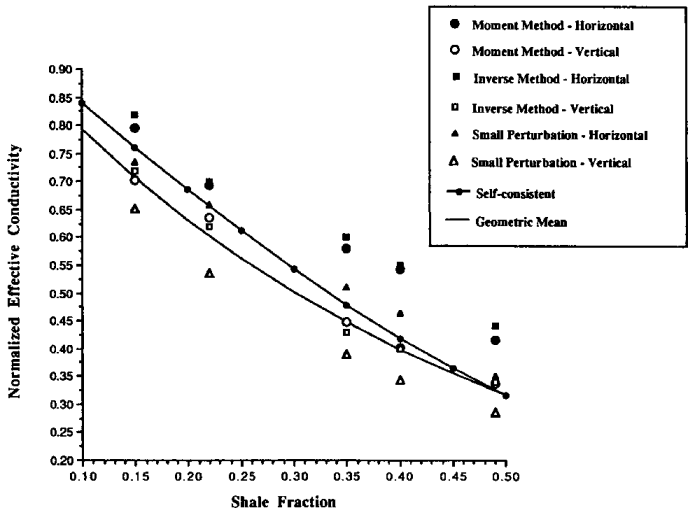
FIG. 3.25 : *Milieux binaires utilisés par Bachu et Cuthiell (1990) puis Dykaar et Kitanidis (1992) pour comparer les techniques de passage à l'échelle supérieure.*

de type uniforme qui ne sont pas spécialement adaptées aux milieux périodiques. Qu'aurait donné la comparaison avec la méthode de Durlofsky (1992) ?

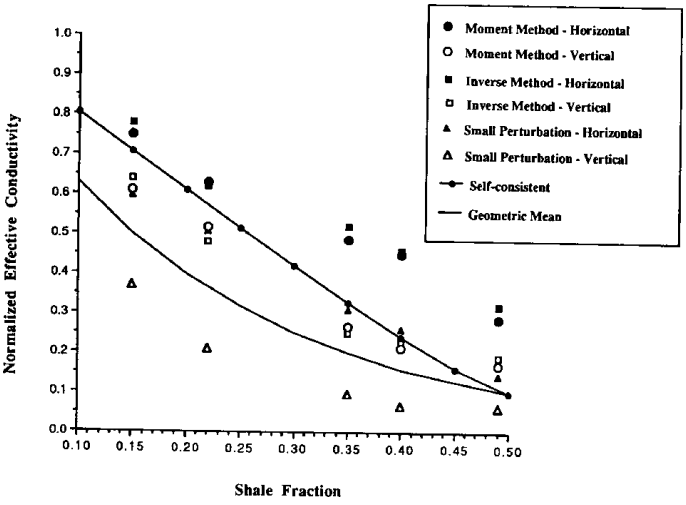
Finalement, on peut dire que les techniques de type équation homogène sont certainement plus robustes. Mais leur mise en œuvre nécessite de développer un code de résolution numérique du problème aux limites pour les variables auxiliaires. Par contre, les méthodes numériques par résolution de l'équation de la diffusivité peuvent être mise en œuvre en utilisant les logiciels de simulations d'écoulement monophasique déjà existant. Donc, sauf pour le cas particulier d'un milieu périodique, les méthodes par résolution numérique de l'équation de la diffusivité semblent préférables.

Le deuxième point important pour les méthodes numériques est le choix des conditions aux limites. Dans le cas des équations homogènes, il s'agit essentiellement de conditions périodiques à l'exception de la méthode dite de Bamberger. Dans le cas des méthodes par résolution numérique de l'équation de la diffusivité, on assiste actuellement à un passage des conditions de type perméamètre à des conditions permettant le calcul d'un tenseur. La différence essentielle entre les conditions uniformes et périodiques est que les conditions uniformes aboutissent à un tenseur de perméabilité qui peut être non symétrique. Les conditions périodiques donnent toujours un tenseur symétrique. La comparaison des différents types de conditions aux limites à été mené par Pickup et al. (1994). La figure 3.27 (a) montre la technique de comparaison utilisée, et les figures 3.27 (b-c) montrent le résultat dans deux cas : emploi de conditions aux limites de type perméamètre ou périodique pour calculer la perméabilité des blocs. L'ensemble des tests de ce type effectués parPickup et al. (1994) montre que les conditions de type périodique sont les plus robustes.

Lachassagne (1989) montre que les techniques numériques, même si elles sont les plus générales, peuvent être biaisées. Il étudie des milieux log-normaux bi-dimensionnels dont la perméabilité effective théorique est connue : c'est la moyenne géométrique. Il montre que la perméabilité équivalente calculée par éléments finis ou différences finies s'écarte de la théorie lorsque la variance du logarithme de la perméabilité augmente (figure 3.28 a). Il montre de plus que, avec la méthode des différences finies, le biais dépend de la technique de calcul des transmissivités de passage entre deux mailles voisines (figure 3.28 b).



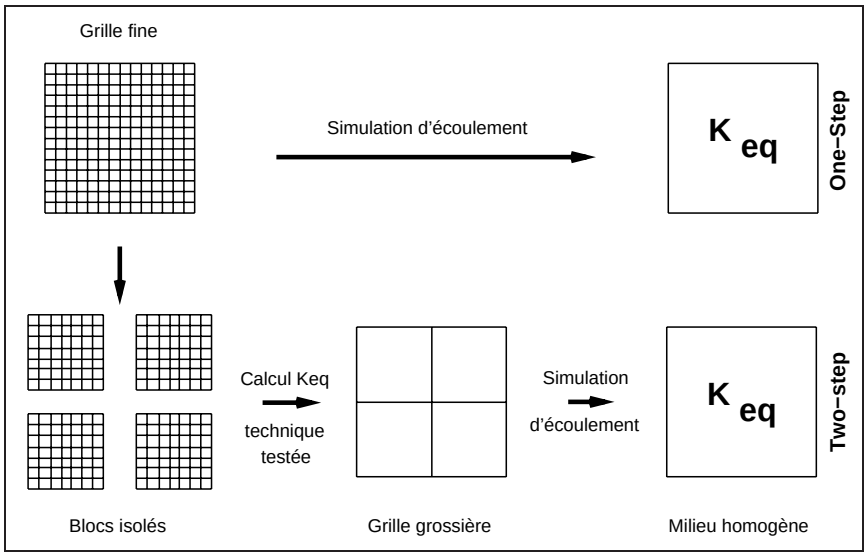
(a) Contraste de perméabilité de 10



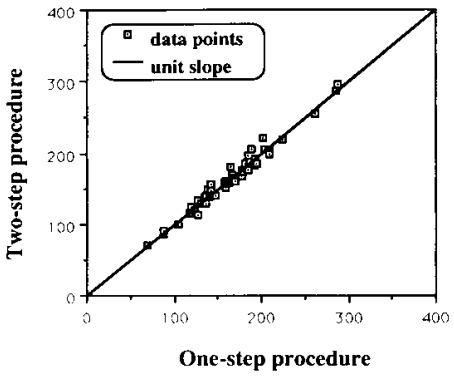
(b) Contraste de perméabilité de 100

FIG. 3.26 : *Comparaison des perméabilités équivalentes des milieux binaires de la figure 3.25 calculées par diverses méthodes : la méthode des moments, la résolution numérique de l'équation de la diffusivité (*Inverse Method *sur les figures), etc. (Dykaar et Kitanidis 1992b)*

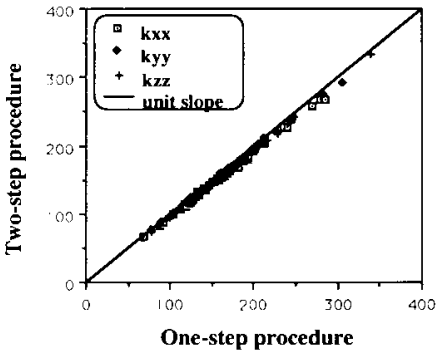
Nous avons déjà vu une illustration de ce fait dans les résultats de King (tableau 3.4). Kruel-Romeu and Nœtinger (1995) approfondissent cette question et montrent, par des expériences numériques et des développements analytiques de type perturbation, que le biais est fonction de la discrétisation et de la méthode de calcul de la transmissivité de passage entre deux mailles dans le cas des différences finies. Notons r le raffinement. C'est le nombre de fois que l'on divise une maille dans chaque direction, lorsque l'on sur-discrétise un maillage. La figure 3.29 montre l'évolution du biais en fonction du raffinement $(1/r)$ pour des transmissivités de passage calculées par différentes moyennes. Le schéma direct est le seul qui soit sans biais pour les différents types d'hétérogénéité 2D et 3D étudiés. Toutefois, ce schéma présente l'inconvénient d'être non symétrique.



(a) Méthodologie

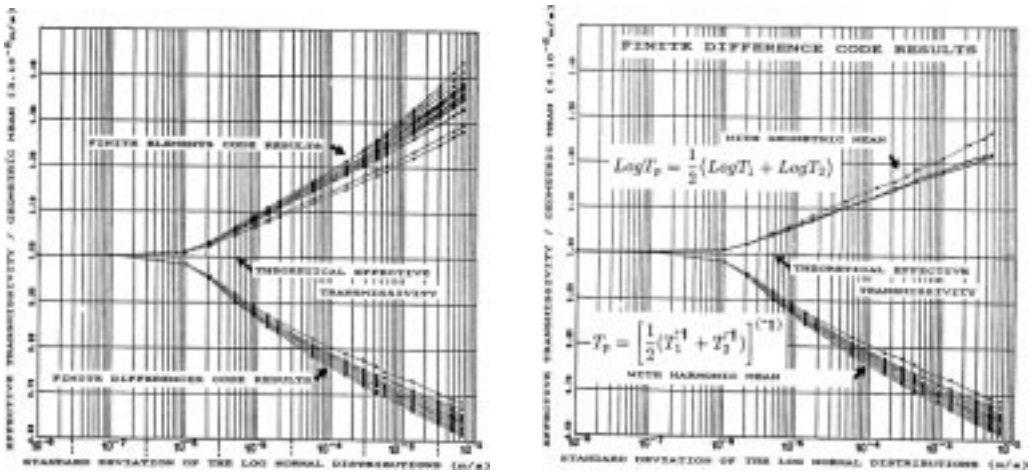


(b) Conditions aux limites de type perméamètre



(c) Conditions aux limites de type périodique

FIG. 3.27 : *Comparaison pour des perméabilités obtenues par méthode numérique en une étape et celles obtenues en deux étapes en imposant des conditions aux limites de type perméamètre (b) ou périodique (c). Le milieu est de type log-normal corrélé (d'après Pickup, 1994).*



(a) Comparaison éléments finis et différences finies

(b) Effet de la méthode de calcul de la transmissivité de passage (T_p) en différence finies avec un schéma centré

FIG. 3.28 : *Mise en évidence des biais numériques pour des milieux log-normaux bidimensionnels de différentes variances (Lachassagne 1990)*

Le problème du biais se pose pour toutes les techniques numériques (avec plus ou moins d'acuité). C'est un problème présent dés que l'on utilise des outils de simulations numériques.

Enfin, on ne peut pas parler des méthodes numériques sans évoquer les méthodes non-locales. L'avantage de ces techniques, par rapport aux précédentes, est qu'elles prennent en compte le voisinage du bloc. L'exemple type est le General Tensor Scaling (GTS) (White and Horne 1987). Un test présenté par Fayers and Hewett (1992) montre la supériorité du GTS par rapport à une méthode numérique négligeant les termes non-diagonaux du tenseur de perméabilité (voir figure 3.30). On peut toutefois critiquer cette comparaison, car elle est forcément défavorable à la technique non-tensorielle, l'écoulement étant du type five-spot. Il serait intéressant, pour évaluer uniquement l'effet non-local, de comparer le GTS à une méthode directe avec conditions aux limites périodiques par exemple. Enfin, il faut noter que, avec le GTS, des termes négatifs peuvent apparaître dans les termes principaux du tenseur de perméabilité.

Toujours dans les méthodes non-locales, Gómez-Hernández (1991) a comparé la technique qui consiste à calculer la perméabilité en prenant en compte une peau autour du bloc considéré aux méthodes numériques locales. Il observe que les flux calculés sur la grille grossière sont plus proches des flux calculés sur la grille fine avec sa méthode qu'avec les méthodes numériques traditionnelles.

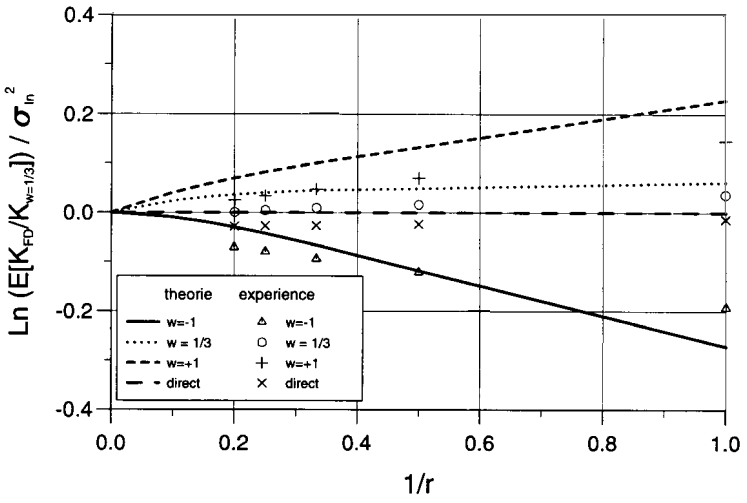
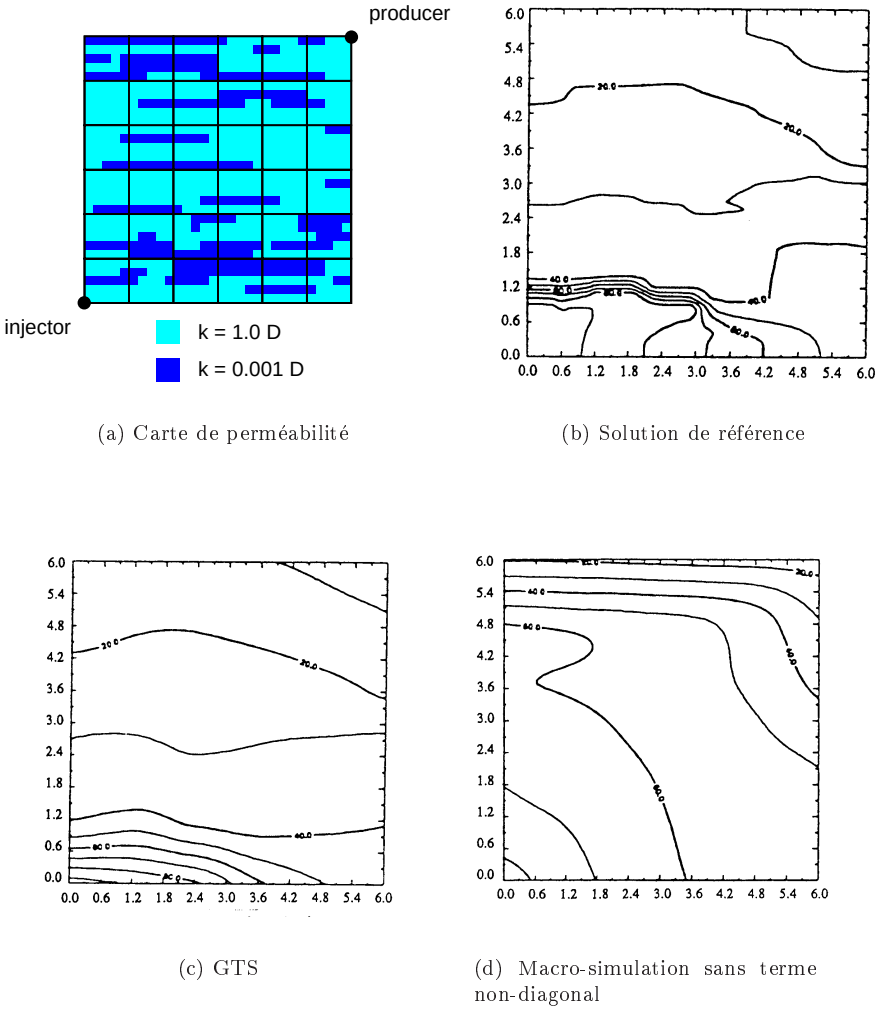


FIG. 3.29 : *Milieu log-normal tri-dimensionnel isotrope de variance 2. Erreur relative sur la perméabilité équivalente en fonction de l'inverse du niveau de raffinement du maillage (Kruel-Romeu et Nœtinger, 1995).*



(a) Carte de perméabilité

(b) Solution de référence

(c) GTS

(d) Macro-simulation sans terme non-diagonal

FIG. 3.30 : *Comparaison General Tensor Scaling et méthode numérique non tensorielle : (a) milieu binaire ; les lignes représentent la grille grossière ; (b) champ de pression calculé sur la grille fine ; (c) champ de pression sur la grille grossière avec des perméabilités calculées par la méthode du General Tensor Scaling ; (d) champ de pression sur la grille grossière avec des perméabilités calculées par une méthode ne prenant pas en compte le tenseur complet (Fayers et Hewett, 1992).*

3.9 Conclusion

> *" Il est de tradition d'opposer les schémas déterministes et les schémas aléatoires, [...] Or [...] ces deux vues sur la nature se complètent bien plus qu'elles ne s'opposent. "*
>
> Ilya Prigogine

Cette synthèse bibliographique a été réalisée dans le but de présenter l'état actuel des méthodes de calcul de la perméabilité équivalente pour un écoulement permanent statistiquement uniforme et monophasique. Nous avons tenté de réaliser un inventaire aussi complet que possible des différentes techniques qui ont été classées en quatre groupes : déterministes, heuristiques, statistiques et géostatistiques. Ces groupes se révèlent complémentaires et non antagonistes.

En effet, il est clair que les techniques stochastiques (statistiques et géostatistiques) sont les seules à pouvoir quantifier l'incertitude liée à la connaissance partielle du sous-sol. Toutefois, les développements analytiques réalisés dans le contexte géostatistiques sont basés sur des hypothèses très restrictives comme la stationnarité ou la répartition log-normale des perméabilités. En dehors de ces hypothèses, la méthode Monte-Carlo s'impose comme l'approche la plus directe permettant d'évaluer l'incertitude. C'est là que se fait le lien avec les méthodes déterministes ; le principe de la méthode de Monte-Carlo est de générer des modèles géologiques équiprobables et d'appliquer des techniques déterministes – changement d'échelle et simulation d'écoulement – pour évaluer l'effet de la variabilité possible du milieu sur les écoulements. Quant aux méthodes heuristiques elles constituent une alternative aux méthodes déterministes. Elles présentent l'avantage d'être extrêmement simples, rapides, et elles ne sont pas limitées par l'espace mémoire, mais elles nécessitent d'être testées.

Nous avions distingué en introduction les méthodes locales et non-locales. Des études récentes ont bien mis en évidence le caractère non-local de la perméabilité de bloc que ce soit dans un contexte déterministe (White and Horne 1987; Holden and Lia 1992) ou stochastique (Neuman and Orr 1993; Indelman and Abramovich 1994). Ainsi, la perméabilité de bloc n'est pas unique : elle dépend des conditions aux limites et des perméabilités à l'intérieur et à l'extérieur du bloc. Cela conduit à une situation paradoxale, où il faut connaître a priori les conditions aux limites pour déterminer la perméabilité de bloc adaptée aux conditions d'écoulement prévues, alors que le modèle est utilisé le plus souvent pour simuler des situations dans lesquelles les conditions aux limites vont évoluer au cours du temps. Cet aspect non-local semble être un des axes majeurs des recherches à venir.

D'un point de vue pratique, la méthode non-locale numérique appelée General Tensor Scaling (White and Horne 1987) présente l'inconvénient d'être très coûteuse d'un point de vue informatique et n'est pas applicable pour l'instant à des problèmes de taille réelle. La méthode d'utilisation du voisinage (Gómez-Hernández and Journel 1990) est plus aisée à mettre en œuvre.

Finalement, cette étude bibliographique montre que, face à un problème de changement d'échelle et dans l'état actuel des connaissances, il faut plutôt utiliser une technique donnant des perméabilités de bloc qu'une perméabilité effective uniforme. Sauf cas particulier (milieu log-normal isotrope ou milieu stratifié), on emploiera une technique numérique. Si l'emploi de la technique numérique est impossible (nombre de mailles trop important) on utilisera une technique rapide, comme la renormalisation, en s'assurant que l'on n'est pas dans un des cas où les erreurs sont importantes (mailles aplaties, hétérogénéité forte). Si l'on a choisi une technique numérique il faudra également être attentif aux erreurs liées à la méthode numérique et au choix des conditions aux limites.

Cette synthèse bibliographique montre également que, même si le nombre d'articles sur le sujet est important et même si pour certains auteurs la question du calcul de la perméabilité équivalente

semble résolue, de nombreuses questions restent en suspend. Nous concluerons donc ce long chapitre sur quelques unes de ces questions ouvrant la voie aux chapitres suivants de cette thèse et à des recherches futures :

- Les trois critères qui permettent de définir la perméabilité à grande échelle sont ils équivalents ?
- Doit-on systématiquement raffiner les maillages pour éviter les erreurs numériques lors de l'utilisation des méthodes résolvant l'équation de la diffusivité ?
- Dans quelle mesure peut-on s'affranchir du choix des conditions aux limites lors du calcul de la perméabilité de bloc ?
- Quel est le domaine d'application des méthodes heuristiques ?
- Doit-on utiliser la loi de Darcy à l'échelle mégascopique lorsque les conditions d'émergence (stationnarité, écoulement uniforme) ne sont pas vérifiées ? Et dans ce cas, par quoi pourrait-on remplacer la loi de Darcy ?
- Quel est le gain en précision apporté par les techniques non-locales ou par les grilles adaptatives ?
- Les trois méthodes aux équations homogènes sont elles équivalentes ?
- Comment prendre en compte simultanément des données à des échelles différentes ?

Chapitre 4

Tenseur de perméabilité et critères d'équivalence

" Comme les nocturnes aveuglés par l'éclat du soleil, ainsi se comporte le regard de notre pensée devant ce qui est le plus lumineux. " Aristote

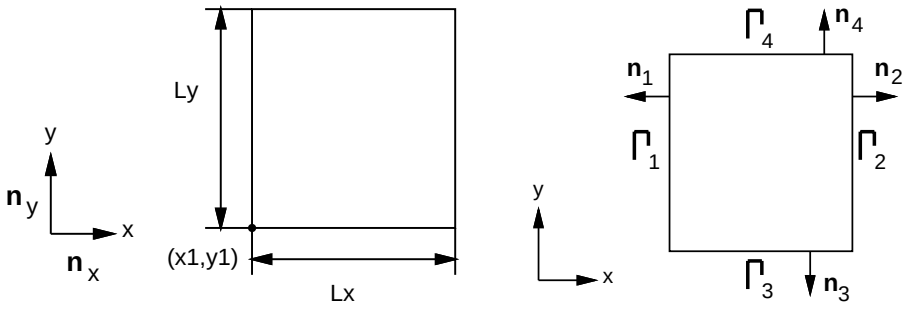
Ce chapitre présente quelques considérations théoriques (§ 4.1) et quelques exemples d'application (§ 4.2) concernant le calcul du tenseur complet de perméabilité équivalente par résolution numérique de l'équation de la diffusivité.
Un résultat original est qu'il est possible de calculer un tenseur complet de perméabilité équivalente avec des conditions aux limites de type perméamètre. Cela permet d'envisager la réalisation, en laboratoire, d'un perméamètre tensoriel.

4.1 Théorie

4.1.1 Équations et conditions aux limites macroscopiques

A l'échelle macroscopique la distribution de perméabilité $\boldsymbol{k}$ dans l'espace est supposée connue dans un bloc de forme parallélépipédique. L'écoulement est régi par l'équation de la diffusivité et la loi de Darcy.

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{k}\,\mathbf{grad}\,h) = 0 \qquad \boldsymbol{v} = -\boldsymbol{k}\,\mathbf{grad}(h) \tag{4.1}$$



(a) Taille du bloc et système de coordonnées

(b) Notations des faces et vecteurs normaux

FIG. 4.1 : *Définition du système de coordonnées et de la notation des faces d'un bloc en deux dimensions.*

Pour résoudre l'équation (4.1), il est nécessaire de connaître les conditions aux limites du domaine. Quatres types de conditions aux limites sont principalement utilisés pour le calcul de la perméabilité équivalente. Ils ont déjà été décrits pages 31-35. Nous les rappelons brièvement en deux dimensions. Leur extension en trois dimensions est évidente.

1. Conditions de type *Perméamètre* : charge constante imposée sur deux faces parallèles et flux nul sur les autres faces (voir figure 4.1).

$$\begin{array}{rl} \text{gradient en } x & \left\{ \begin{array}{c} h(x_1,y) = h_0 \quad h(x_1+L_x,y) = h_0 - \Delta h_x \\ \boldsymbol{v}(x,y_1)\cdot\boldsymbol{n}_3 = \boldsymbol{v}(x,y_1+L_y)\cdot\boldsymbol{n}_4 = 0 \end{array} \right. \\ \text{ou} & \\ \text{gradient en } y & \left\{ \begin{array}{c} h(x,y_1) = h_0 \quad h(x,y_1+L_y) = h_0 - \Delta h_y \\ \boldsymbol{v}(x_1,y)\cdot\boldsymbol{n}_1 = \boldsymbol{v}(x_1+L_x,y)\cdot\boldsymbol{n}_2 = 0 \end{array} \right. \end{array} \tag{4.2}$$

   L_x et L_y représentent les longueurs des côtés du bloc, h_0 la charge imposée et Δh_x et Δh_y les valeurs des différences de charge entre les deux faces du bloc.

2. Conditions de type *Uniforme* : charge imposée variant linéairement sur toutes les faces du bloc.

$$h(x,y) = -\frac{\Delta h_x}{L_x}x - \frac{\Delta h_y}{L_y}y + h_0 \tag{4.3}$$

3. Conditions de type *Périodique* : gradient de charge constant et égalité des vitesses point à point sur les faces opposées

$$\begin{array}{ll} \boldsymbol{v}(x_1,y) = \boldsymbol{v}(x_1+L_x,y) & \boldsymbol{v}(x,y_1) = \boldsymbol{v}(x_1,y+L_y) \\ h(x_1+L_x,y) = h(x_1,y) - \Delta h_x & h(x,y_1+L_x) = h(x,y_1) - \Delta h_y \end{array} \tag{4.4}$$

4. Conditions de type *immergé* : les conditions aux limites ne sont pas imposées directement sur le bloc, mais le bloc est *immergé* dans un domaine hétérogène et où les conditions aux limites sont imposées aux frontières du domaine et non pas directement sur le bloc.

4.1.2 Hypothèse

Il est supposé qu'il existe une loi de Darcy à l'échelle mégascopique :

$$\boldsymbol{V} = -\boldsymbol{K}_b \, \mathbf{grad}\, H \tag{4.5}$$

On sait que cette hypothèse est vérifiée dans le cas où 1) la taille des hétérogénéités est petite par rapport à la taille du domaine et 2) l'écoulement est quasi-uniforme. Cela a été montré par plusieurs auteurs utilisant des approches différentes (Matheron 1967; Quintard and Whitaker 1987; Sáez, Otero, and Rusinek 1989).

Dans les cas réels, nous ne sommes pas forcément dans les conditions d'application de ces démonstrations. Mais, nous ne disposons pas d'arguments permettant d'utiliser avec certitude une autre loi phénoménologique[1]. Nous supposons donc que la loi de Darcy est applicable.

4.1.3 Conditions aux limites mégascopiques

On recherche une perméabilité $\boldsymbol{K}_b$, telle que si l'on impose sur le bloc homogène de perméabilité $\boldsymbol{K}_b$, les mêmes conditions aux limites que celles imposées sur le bloc hétérogène, alors le bloc homogène donnera la même réponse que le bloc hétérogène selon un critère qui reste à définir.

Ainsi, les conditions aux limites mégascopiques sont strictement les mêmes que les conditions aux limites macroscopiques.

4.1.4 Définition

Nous définissons la perméabilité équivalente comme la perméabilité qui vérifie l'égalité de la moyenne des vitesses et l'égalité de la moyenne du gradient de charge dans le milieu hétérogène et dans le milieu homogène.

$$\frac{1}{\Omega}\int_\Omega \mathbf{grad}\, h \; d\omega = \frac{1}{\Omega}\int_\Omega \mathbf{grad}\, H \; d\omega \tag{4.6}$$

$$\frac{1}{\Omega}\int_\Omega \boldsymbol{v} \; d\omega = \frac{1}{\Omega}\int_\Omega \boldsymbol{V} \; d\omega \tag{4.7}$$

Ω représente le bloc de milieu poreux considéré. Les variables en minuscules, $\boldsymbol{v}$ et h, la vitesse et la charge dans le milieu hétérogène et les variables en majuscules, $\boldsymbol{V}$ et H, la vitesse et la charge dans le milieu homogène.

D'un point de vue pratique, les équations (4.6), (4.7) et l'hypothèse (4.5) permettent de définir la perméabilité équivalente. Après avoir remplacé $\boldsymbol{V}$ dans l'équation (4.7) par le second membre de l'équation (4.5) et en utilisant l'équation (4.6), on obtient, sous forme vectorielle, la relation proposée par Rubin and Gómez-Hernández (1990) :

$$\left(\frac{1}{\Omega}\int_\Omega \mathbf{grad}\, h \; d\omega\right) = -\boldsymbol{K}_b \left(\frac{1}{\Omega}\int_\Omega \boldsymbol{v} \; d\omega\right) \tag{4.8}$$

[1] On pourrait envisager, par exemple, d'utiliser la loi de Brinkman.

L'avantage de cette approche par rapport à une définition directe de la perméabilité équivalente par la relation (4.8) est que les variables mégascopiques ($\boldsymbol{V}$ et H) sont clairement définies. Ce sont les variables décrivant l'écoulement dans le milieu homogène. Elles peuvent varier dans l'espace et il n'est pas nécessaire de les définir comme des moyennes spatiales des variables macroscopiques.

4.1.5 Simplifications et conséquences pratiques

Nous allons exprimer chacun des termes de l'équation (4.8) par des intégrales de surface à la place des intégrales de volume.

Gradient de charge moyen

Le gradient de charge moyen est un vecteur. Pour simplifier les notations, on note $< \mathbf{grad}\, h >_x$ sa composante selon x. Elle peut s'exprimer ainsi :

$$< \mathbf{grad}\, h >_x = \left(\frac{1}{\Omega} \int_\Omega \mathbf{grad}\, h \; d\omega \right) \cdot \boldsymbol{n}_x = \frac{1}{\Omega} \int_\Omega \mathbf{grad}\, h \cdot \boldsymbol{n}_x \; d\omega$$

avec $\boldsymbol{n}_x = (1, 0)$ constant dans l'espace. Sànchez-Vila et al. (1995) remarquent que :

$$< \mathbf{grad}\, h >_x = \frac{1}{\Omega} \left(\int_\Gamma h \; \boldsymbol{n}_x \cdot \boldsymbol{n} \; d\gamma - \int_\Omega h \, \mathrm{div}\, \boldsymbol{n}_x \; d\omega \right) = \frac{1}{\Omega} \int_\Gamma h \; \boldsymbol{n}_x \cdot \boldsymbol{n} \; d\gamma$$

Cette intégrale se décompose en autant de faces du bloc. Le gradient moyen selon x s'exprime alors comme la différence des moyennes des charges entre la face d'entrée et la face de sortie du bloc divisée par la longueur du bloc. Le même raisonnement pour la composante en y ou en z abouti au même résultat.

$$\begin{aligned} < \mathbf{grad}\, h >_x &= \frac{\frac{1}{\Gamma_2} \int_{\Gamma_2} h \; d\gamma - \frac{1}{\Gamma_1} \int_{\Gamma_1} h \; d\gamma}{L_x} \\ < \mathbf{grad}\, h >_y &= \frac{\frac{1}{\Gamma_4} \int_{\Gamma_4} h \; d\gamma - \frac{1}{\Gamma_3} \int_{\Gamma_3} h \; d\gamma}{L_y} \end{aligned} \tag{4.9}$$

Remarques

• Pour les conditions aux limites de type périodique et uniforme, le gradient de charge moyen dans le domaine est égal au gradient de charge imposé. En deux dimensions, on a ainsi :

$$\frac{1}{\Omega} \int_\Omega \mathbf{grad}\, h \; d\omega = - \begin{pmatrix} \frac{\Delta h_x}{L_x} \\ \frac{\Delta h_y}{L_y} \end{pmatrix} = - \sum_{v=x,y} \left(\frac{\Delta h_v}{L_v} \right) \boldsymbol{n}_v$$

• Pour les conditions aux limites de type perméamètre, la situation est plus complexe que ce qui est souvent supposé. Le gradient est fixé dans une direction donnée pour un jeu de conditions aux limites. Dans cette direction, le gradient vaut (par exemple en x) :

$$< \mathbf{grad}\, h >_x = - \left(\frac{\Delta h_x}{L_x} \right)$$

Mais le gradient dans les directions perpendiculaires est également non nul. Par exemple pour la direction y on a :

$$< \mathbf{grad}\, h >_y = \frac{\frac{1}{\Gamma_4} \int_{\Gamma_4} h d\gamma - \frac{1}{\Gamma_3} \int_{\Gamma_3} h d\gamma}{L_y} = - \left(\frac{\Delta h_y}{L_y} \right)$$

Avec des conditions aux limites de type perméamètre, il existe donc un gradient de charge en y que l'on peut calculer en connaissant la distribution de charge sur les faces latérales. La différence avec les autres types de conditions aux limites est que cette valeur n'est pas fixée a priori. Ce gradient perpendiculaire au gradient imposé n'est jamais pris en compte (au moins dans tous les documents que j'ai pu lire), mais ouvre la voie à un calcul de tenseur de perméabilité avec des conditions aux limites de type perméamètre, comme nous allons le voir par la suite.

Vitesse moyenne

Comme précédemment nous allons calculer séparément chaque composante du vecteur moyen et remplacer une intégrale volumique par une intégrale de surface. Là encore, pour simplifier les écritures, on notera $< v >_x$ la vitesse moyenne selon x. Elle est définie par :

$$< v >_x = \left(\frac{1}{\Omega} \int_\Omega \boldsymbol{v} \; d\omega \right) \cdot \boldsymbol{n}_x = \frac{1}{\Omega} \int_\Omega \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}_x d\omega \tag{4.10}$$

Par intégration par partie, on obtient :

$$< v >_x = \frac{1}{\Omega} \left(\int_\Gamma x \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \; d\gamma - \int_\Omega \boldsymbol{n}_x \operatorname{div} \boldsymbol{v} \; d\Omega \right) = \frac{1}{\Omega} \int_\Gamma x \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \; d\gamma$$

car $\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0$. Si l'on note le flux q_i qui traverse la face i et x_{Gi} le centre de gravité de la face i pondéré par les flux locaux :

$$q_i = \int_{\Gamma_i} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \; d\gamma \qquad \text{et} \qquad x_{Gi} = \frac{\int_{\Gamma_i} x \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \; d\gamma}{q_i}$$

alors on peut exprimer la vitesse moyenne en x ainsi :

$$< v >_x = \frac{1}{\Omega} \int_\Gamma x \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \; d\gamma = \frac{q_1 x_1 + q_2 x_2 + q_3 x_{G3} + q_4 x_{G4}}{\Omega} \tag{4.11}$$

En posant $x_2 = x_1 + L_x$ et $q_1 + q_2 + q_3 + q_4 = 0$, l'équation précédente peut se mettre sous la forme suivante (Sànchez-Vila, Girardi, and Carrera 1995) :

$$< v >_x = \left(\frac{q_2 - q_1}{2} \right) \frac{L_x}{\Omega} + \left(\frac{q_3 - q_4}{2} \right) \left(\frac{x_{G3} - x_{G4}}{\Omega} \right) + (q_3 + q_4) \left(\frac{x_{G3} + x_{G4}}{2\Omega} - \frac{x_1 + x_2}{2\Omega} \right)$$

De même, la composante en y ou en z se simplifie, et on obtient ainsi par exemple :

$$< v >_y = \left(\frac{q_4 - q_3}{2} \right) \frac{L_y}{\Omega} + \left(\frac{q_1 - q_2}{2} \right) \left(\frac{y_{G1} - y_{G2}}{\Omega} \right) + (q_1 + q_2) \left(\frac{y_{G1} + y_{G2}}{2\Omega} - \frac{y_3 + y_4}{2\Omega} \right)$$

Remarques

Le point intéressant à souligner est que la composante en y de la vitesse myenne est non nulle y compris lors de l'utilisation de conditions aux limites de type perméamètre. Dans ce cas, les expressions précédentes se simplifient car $q_3 = q_4 = 0$, $q_1 = -q_2$ et $x_{G3} = x_{G4} = 0$, d'où :

$$\begin{aligned} < v >_x &= \frac{L_x}{\Omega} \left(\frac{q_2 - q_1}{2} \right) = \frac{1}{\Gamma_x} \left(\frac{q_2 - q_1}{2} \right) = \frac{q_2}{\Gamma_x} \\ < v >_y &= \left(\frac{q_1 - q_2}{2} \right) \left(\frac{y_{G1} - y_{G2}}{\Omega} \right) = \frac{1}{\Omega} \left(\int_{\Gamma_1} y \; \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \; d\gamma - \int_{\Gamma_2} y \; \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \; d\gamma \right) \end{aligned} \tag{4.12}$$

Ces équations permettent de déterminer, avec des conditions aux limites de type perméamètre, la composante de la vitesse perpendiculaire à la direction générale d'écoulement imposée. Il est alors possible de calculer un tenseur de perméabilité équivalente ou au moins de détecter une anisotropie éventuelle à l'intérieur du bloc (si $< v >_y \neq 0$) avec de telles conditions aux limites.

Expression de la perméabilité équivalente

Pour un ensemble de conditions aux limites fixées, la résolution par méthode numérique de l'écoulement sur le milieu hétérogène ou l'expérience réalisée sur l'échantillon permettent le calcul où la mesure de la distribution des flux et des charges sur les surfaces du bloc et permettent d'en déduire, grâce aux équations présentées ci-dessus, les valeurs moyennes, $< \boldsymbol{v} >_x$, $< \boldsymbol{v} >_y$, $< \mathbf{grad}\, h >_x$ et $< \mathbf{grad}\, h >_y$. On les introduit dans l'équation (4.8) et on obtient :

$$\begin{pmatrix} < \boldsymbol{v} >_x \\ < \boldsymbol{v} >_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_b^{xx} & K_b^{xy} \\ K_b^{yx} & K_b^{yy} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} < \mathbf{grad}\, h >_x \\ < \mathbf{grad}\, h >_y \end{pmatrix} \tag{4.13}$$

Les quatre inconnues de ce système sont les composantes du tenseur de perméabilité équivalente (les K^{uv}). En trois dimensions on obtient de même un système de trois équations avec neuf inconnues. Le nombre d'inconnues étant supérieur au nombre d'équations, il est nécessaire d'effectuer au moins deux calculs (ou deux expériences) en deux dimensions et trois calculs (ou trois expériences) en trois dimensions, pour pouvoir résoudre le système.

4.1.6 Minimisation par moindres carrés

Il est souhaitable que la perméabilité de bloc ainsi calculée soit aussi indépendante que possible des conditions aux limites. L'approche proposée par White and Horne (1987) est d'utiliser des conditions aux limites de types différents. Cela peut conduire à un nombre de simulations supérieur au nombre d'inconnues. Dans ce cas, il est nécessaire d'utiliser une procédure d'optimisation pour déterminer les composantes du tenseur de perméabilité.

Comme dans la méthode de White and Horne (1987), dénommée General Tensor Scaling, nous proposons d'utiliser la procédure classique de minimisation par moindres carrés. Par rapport au General Tensor Scaling, on notera que le le critère ne porte plus ici sur les flux.

Supposons que l'on ait réalisé n simulations d'écoulements avec des conditions aux limites différentes. Pour une simulation $i \in \{1, \ldots, n\}$, on calcule les vitesses moyennes $< \boldsymbol{v} >^i$ et les gradients de charge moyens $< \mathbf{grad}\, h >^i$ à l'aide des équations (4.9) et (4.10) ou de leurs formes simplifiées. Ce calcul est mené pour chaque valeur de i, c'est-à-dire pour chaque simulation, avec des conditions aux limites différentes.

Le but de la minimisation est de réduire l'écart entre le premier et le second membre de l'équation (4.8) sur l'ensemble des valeurs de i. Il faut minimiser le critère ζ vis à vis des composantes du tenseur de perméabilité :

$$\zeta = \sum_{i=1}^{n} \left(< \boldsymbol{v} >^i - \boldsymbol{K}_b < \mathbf{grad}\, h >^i \right)^2 = \text{minimum}$$

Dans le cas où on suppose $\boldsymbol{K}_b$ symétrique. Minimiser ζ revient alors à chercher K^{xx}, K^{xy}, K^{xz}, K^{yy}, K^{yz} et K^{zz} tels que :

$$\frac{\partial \zeta}{\partial K^{xx}} = 0 \qquad \frac{\partial \zeta}{\partial K^{xy}} = 0 \qquad \frac{\partial \zeta}{\partial K^{xz}} = 0 \qquad \frac{\partial \zeta}{\partial K^{yy}} = 0 \qquad \frac{\partial \zeta}{\partial K^{yz}} = 0 \qquad \frac{\partial \zeta}{\partial K^{zz}} = 0$$

En écrivant chacune de ces équations, on obtient le système linéaire suivant :

$$\begin{pmatrix} a & b & c & 0 & 0 & 0 \\ b & (a+d) & e & b & c & 0 \\ c & e & (f+a) & 0 & b & c \\ 0 & b & 0 & d & e & 0 \\ 0 & c & b & e & (f+d) & e \\ 0 & 0 & c & 0 & e & f \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} K^{xx} \\ K^{xy} \\ K^{xz} \\ K^{yy} \\ K^{yz} \\ K^{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 + S_4 \\ S_3 + S_7 \\ S_5 \\ S_6 + S_8 \\ S_9 \end{pmatrix} \tag{4.14}$$

avec

$$a = \sum_{i=1}^{n} (< \mathbf{grad}\, h >_x^i)^2 \qquad b = \sum_{i=1}^{n} < \mathbf{grad}\, h >_x^i < \mathbf{grad}\, h >_y^i$$
$$c = \sum_{i=1}^{n} < \mathbf{grad}\, h >_x^i < \mathbf{grad}\, h >_z^i \qquad d = \sum_{i=1}^{n} (< \mathbf{grad}\, h >_y^i)^2$$
$$e = \sum_{i=1}^{n} < \mathbf{grad}\, h >_y^i < \mathbf{grad}\, h >_z^i \qquad f = \sum_{i=1}^{n} (< \mathbf{grad}\, h >_z^i)^2$$

$$S_1 = \sum_{i=1}^{n} < \mathbf{grad}\, h >_x^i < \boldsymbol{v} >_x^i \qquad S_2 = \sum_{i=1}^{n} < \mathbf{grad}\, h >_y^i < \boldsymbol{v} >_x^i$$
$$S_3 = \sum_{i=1}^{n} < \mathbf{grad}\, h >_z^i < \boldsymbol{v} >_x^i \qquad S_4 = \sum_{i=1}^{n} < \mathbf{grad}\, h >_x^i < \boldsymbol{v} >_y^i$$
$$S_5 = \sum_{i=1}^{n} < \mathbf{grad}\, h >_y^i < \boldsymbol{v} >_y^i \qquad S_6 = \sum_{i=1}^{n} < \mathbf{grad}\, h >_z^i < \boldsymbol{v} >_y^i$$
$$S_7 = \sum_{i=1}^{n} < \mathbf{grad}\, h >_x^i < \boldsymbol{v} >_z^i \qquad S_8 = \sum_{i=1}^{n} < \mathbf{grad}\, h >_y^i < \boldsymbol{v} >_z^i$$
$$S_9 = \sum_{i=1}^{n} < \mathbf{grad}\, h >_z^i < \boldsymbol{v} >_z^i$$

Si l'on ne suppose pas le tenseur de perméabilité symétrique, alors le système résultant des moindres carrés est plus simple. En gardant les mêmes notations que précédemment, on obtient trois systèmes qui diffèrent seulement par leurs seconds membres et leurs inconnues.

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} K^{xx} \\ K^{xy} \\ K^{xz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} K^{yx} \\ K^{yy} \\ K^{yz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_4 \\ S_5 \\ S_6 \end{pmatrix} \tag{4.15}$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} K^{zx} \\ K^{zy} \\ K^{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_7 \\ S_8 \\ S_9 \end{pmatrix}$$

La résolution numérique de ces systèmes linéaires ne pose aucune difficulté. En pratique nous avons utilisé les algorithmes proposés dans l'ouvrage de Press et al. (1992).

4.1.7 Contrôle des autres critères

Dans cette section nous montrons sous quelles conditions la perméabilité équivalente ainsi définie vérifie également les critères d'égalité des flux et d'égalité des énergies dissipées.

Égalité des flux

Le flux traversant la face i du milieu hétérogène est noté q_i. Le flux traversant la face i du milieu homogène est noté Q_i.

$$q_i = \int_{\Gamma_i} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}_i \, d\gamma \qquad Q_i = \int_{\Gamma_i} \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}_i \, d\gamma$$

Du fait de l'équation de conservation ($\operatorname{div} v = 0$ et $\operatorname{div} V = 0$), la somme des flux sur toutes les faces d'un bloc est égale à 0, que ce soit pour le milieu hétérogène ou le milieu homogène.

$$\sum_i q_i = 0 \qquad \sum_i Q_i = 0$$

Le critère d'égalité des flux en deux dimensions s'exprime par les quatre équations suivantes :

$$q_i = Q_i \qquad i = 1, \ldots, 4 \tag{4.16}$$

La question posée est de savoir si la définition proposée de la perméabilité équivalente (équations 4.5, 4.6 et 4.7) implique ou non l'égalité des flux (équation 4.16).

Nous avons vu précédemment que les flux et les vitesses moyennes sont liés par l'équation (4.11). En deux dimensions, l'égalité des vitesses moyennes en x et en y se traduit donc par deux relations d'égalité liant les flux aux deux échelles :

$$q_1 x_1 + q_2 x_2 + q_3 x_{G3} + q_4 x_{G4} = Q_1 x_1 + Q_2 x_2 + Q_3 X_{G3} + Q_4 X_{G4} \tag{4.17}$$

$$q_1 y_{G1} + q_2 y_{G2} + q_3 y_3 + q_4 y_4 = Q_1 Y_{G1} + Q_2 Y_{G2} + Q_3 y_3 + Q_4 y_4 \tag{4.18}$$

L'égalité des vitesses moyennes ne permet d'obtenir que ces deux équations. Avec des conditions aux limites quelconques, l'égalité des vitesses moyennes ne permet donc pas d'assurer l'égalité des flux sur toutes les faces du bloc. Il est aisé de trouver un contre exemple avec des conditions aux limites de type uniforme ou immergé. En revanche, avec des conditions aux limites de type perméamètre ou périodique l'égalité des flux est vérifiée comme nous allons le montrer.

Conditions aux limites de type perméamètre

Les conditions aux limites de type perméamètre imposent que les flux sur les bords perpendiculaires à la direction principale d'écoulement soient nuls. Il en résulte que les centres de gravité des flux sur ces faces sont nuls aussi. Cela est valable pour le milieu hétérogène et le milieu homogène.

$$q_3 = q_4 = 0 \quad x_{G3} = x_{G4} = 0 \qquad Q_3 = Q_4 = 0 \quad X_{G3} = X_{G4} = 0$$

Du fait de l'équation de conservation, le flux entrant est égal au flux sortant :

$$q_1 = -q_2 \qquad Q_1 = -Q_2$$

L'égalité des vitesses moyennes (équation 4.17) impose alors :

$$q_1 = Q_1 \quad \text{et } q_2 = Q_2$$

L'égalité des flux est vérifiée.

Conditions aux limites de type périodique

Dans ce cas, de par les conditions aux limites, on a :

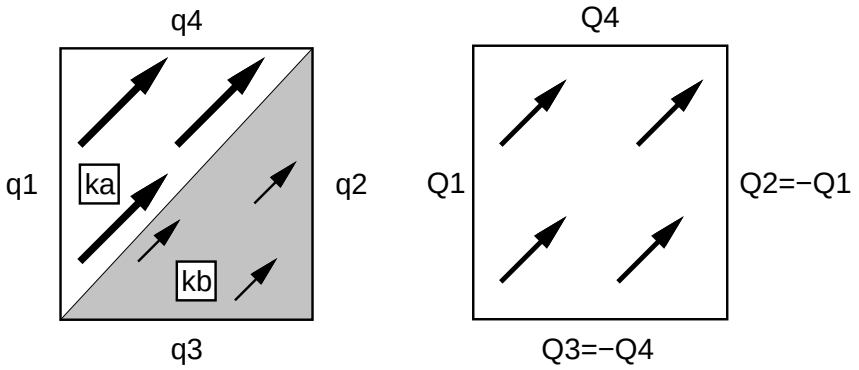
$$q_1 = -q_2, \quad y_{G1} = y_{G2}, \quad q_3 = -q_4, \quad x_{G3} = x_{G4}$$
$$\text{et} \qquad Q_1 = -Q_2, \quad Y_{G1} = Y_{G2}, \quad Q_3 = -Q_4, \quad X_{G3} = X_{G4}$$

En introduisant ces équations dans l'égalité des vitesses on obtient :

$$q_1 = Q_1, \quad q_2 = Q_2, \quad q_3 = Q_3, \quad q_4 = Q_4$$

Là encore l'égalité des flux est vérifiée.

Conditions aux limites de type uniforme



(a) Milieu hétérogène : deux zones de perméabilités différentes de formes triangulaires. Les flux q_1 et $-q_2$ sont différents, de même pour q_3 et $-q_4$.

(b) Milieu homogène : la vitesse est constante dans le domaine. Les flux Q_1 et $-Q_2$ sont égaux, de même pour Q_3 et $-Q_4$.

FIG. 4.2 : *Exemple de cas où le critère d'égalité des flux ne peut pas être vérifié avec des conditions aux limites de type uniforme.*

Nous avons déjà évoqué que dans le cas de conditions aux limites de type uniforme ou immergé il existe des cas pour lesquels la définition utilisée n'implique pas que le critère d'égalité des flux soit vérifié. Nous allons montrer de plus ici que lorsque l'on remplace le milieu hétérogène par un milieu homogène, le critère d'égalité des flux ne peut pas être vérifié dans ces cas.

Dans le cas de conditions aux limites uniformes appliquées sur un milieu homogène, la solution de l'équation de la diffusivité dans le milieu est de la forme suivante :

$$H(x,y) = -\left(\frac{\Delta h_x}{L_x}\right) x - \left(\frac{\Delta h_y}{L_y}\right) y + h_0$$

Ainsi le vecteur vitesse est constant dans le bloc.

$$\boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} K_b^{xx}\left(\frac{\Delta h_x}{L_x}\right) + K_b^{xy}\left(\frac{\Delta h_y}{L_y}\right) \\ K_b^{yx}\left(\frac{\Delta h_x}{L_x}\right) + K_b^{yy}\left(\frac{\Delta h_y}{L_y}\right) \end{pmatrix}$$

Le flux traversant deux faces opposées est alors nécessairement identique au signe près. Ainsi on a $Q_1 = -Q_2$ et $Q_3 = -Q_4$. Or pour un milieu hétérogène quelconque avec ce type de conditions aux limites, il est très probable que $q_1 \neq -q_2$ et $q_1 \neq -q_3$. L'égalité des flux conduit alors à un système impossible n'ayant pas de solution :

$$q_1 = Q_1 \qquad \Rightarrow \qquad q_1 = -Q_2 \quad \text{or} \quad q_1 \neq -q_2 \qquad \Rightarrow \qquad q_2 \neq Q_2$$

Si l'on cherche $\boldsymbol{K_b}$ tel que $q_1 = Q_1$ alors on a forcément $q_2 \neq Q_2$. $\boldsymbol{K_b}$ ne peut pas être à la fois la solution de l'équation $q_1 = Q_1$ et de l'équation $q_2 = Q_2$. Cette difficulté se présente dès lors que les axes du bloc ne sont pas parallèles aux directions principales de la perméabilité équivalente du milieu hétérogène.

Gallouët and Guérillot (1994) contournent cette difficulté en minimisant l'écart entre les flux mesurés sur le milieu hétérogène et ceux calculés sur le milieu homogène. Toutefois nous pensons que le critère d'égalité des vitesses moyennes est plus satisfaisant, dans la mesure où il admet une solution rigoureuse dans les cas où le critère d'égalité des flux n'admet qu'une solution approchée.

Égalité des énergies dissipées

L'énergie dissipée à l'échelle macroscopique dans le milieu hétérogène doit être identique à l'énergie dissipée à l'échelle mégascopique dans le milieu homogène équivalent.

$$E = \rho g \cdot \int_\Omega -(\boldsymbol{v} \cdot \mathbf{grad}\, h)\ d\omega = \rho g \cdot \int_\Omega -(\boldsymbol{V} \cdot \mathbf{grad}\, H)\ d\omega$$

ρ représente la masse volumique de l'eau et g l'accélération due à la pesanteur. On remarque que ces intégrales peuvent être simplifiées grâce à une intégration par partie (Tjølsen et al. 1992; Njifenjou 1993; Bøe 1994). Par exemple pour l'expression à l'échelle macroscopique, on a :

$$\frac{E}{\rho g} = -\int_\Gamma h \cdot (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n})\ d\gamma + \int_\Omega h \cdot div(\boldsymbol{v})\ d\omega,$$
$$div(\boldsymbol{v}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{E}{\rho g} = -\int_\Gamma h \cdot (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n})\ d\gamma$$

Le critère d'égalité des énergies peut donc s'écrire sous la forme suivante :

$$\int_\Gamma h \cdot (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n})\ d\omega = \int_\Gamma H \cdot (\boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n})\ d\omega \tag{4.19}$$

Suivant le type de conditions aux limites, on peut encore simplifier cette équation.

Conditions aux limites perméamètre

• On calcule tout d'abord le terme à l'échelle macroscopique. Pour cela, on décompose l'intégrale sur Γ en autant de termes que de surfaces élémentaires :

$$\int_{\Gamma_1} h \cdot (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n})\ d\omega + \int_{\Gamma_2} h \cdot (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n})\ d\omega + \int_{\Gamma_3} h \cdot (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n})\ d\omega + \int_{\Gamma_4} h \cdot (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n})\ d\omega \tag{4.20}$$

Les conditions aux limites de type perméamètre, avec un gradient dans la direction x, imposent $h = h_0$ sur Γ_1, $h = h_0 - \Delta h_x$ sur Γ_2, $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} = 0$ sur Γ_3 et Γ_4.

$$\int_\Gamma h \cdot (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n})\ d\omega = h_0 \int_{\Gamma_1} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}_1\ d\omega + (h_0 - \Delta h_x) \int_{\Gamma_2} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}_2\ d\omega = h_0 q_1 + (h_0 - \Delta h_x) q_2$$

Comme $q_1 = -q_2$, on obtient :

$$\int_\Gamma h (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n})\ d\omega = -q_2 \Delta h_x$$

• Le terme à l'échelle mégascopique se simplifie de la même manière :

$$\int_\Gamma H \cdot (\boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n})\ d\omega = -Q_2 \Delta h_x$$

• Avec les conditions aux limites de type perméamètre, l'énergie dissipée dans le milieu poreux est proportionnelle aux flux traversant le bloc que multiplie la différence de charge entre l'entrée et la sortie du bloc.

Nous avons montré dans le paragraphe précédent que l'égalité des vitesses moyennes implique l'égalité des flux ($q_2 = Q_2$). Cela signifie que la définition proposée implique l'égalité des énergies dissipées dans le cas des conditions aux limites de type perméamètre.

Conditions aux limites périodiques

• Le terme à l'échelle macroscopique (équation 4.20) se simplifie en regroupant les termes deux à deux. Prenons, par exemple, les termes en Γ_1 et Γ_2.

$$\int_{\Gamma_1} h \cdot (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n})\, d\omega + \int_{\Gamma_2} h \cdot (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n})\, d\omega = \int_{y=y3}^{y=y4} \Big[h(x1,y) \cdot \big(\boldsymbol{v}(x1,y) \cdot \boldsymbol{n}\big) + h(x2,y) \cdot \big(\boldsymbol{v}(x2,y) \cdot \boldsymbol{n}\big) \Big] dy$$

Les conditions aux limites périodiques imposent les égalités suivantes :

$$h(x2,y) = h(x1,y) - \Delta h_x \quad \text{et} \quad v(x2,y) = v(x1,y)$$

La somme des deux intégrales sur Γ_1 et Γ_2 se réduit à :

$$\int_{\Gamma_1} h \cdot (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n})\, d\omega + \int_{\Gamma_2} h \cdot (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n})\, d\omega = -\Delta h_x \int_{\Gamma_2} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}\, d\omega = -\Delta h_x\, q_2$$

La somme des deux autres intégrales (sur Γ_3 et Γ_4) se simplifie de même et le résultat final est que l'énergie dissipée dans le milieu hétérogène est égale à la somme des flux que multiplie les différences de charges :

$$\int_{\Gamma} h \cdot (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n})\, d\omega = -\Delta h_x\, q_2 - \Delta h_y\, q_4$$

• L'énergie dissipée dans le milieu homogène s'exprime de façon identique en fonction des flux :

$$\int_{\Gamma} H \cdot (\boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n})\, d\omega = -\Delta h_x\, Q_2 - \Delta h_y\, Q_4$$

• L'égalité des énergies peut donc s'écrire dans ce cas particulier :

$$\Delta h_x\, q_2 + \Delta h_y\, q_4 = \Delta h_x\, Q_2 + \Delta h_y\, Q_4$$

Comme pour les conditions aux limites de type perméamètre, la définition proposée qui vérifie l'égalité des flux dans le cas des conditions aux limites périodiques vérifie par voie de conséquence l'égalité des énergies dissipées.

Conditions aux limites uniformes

Pour les conditions aux limites uniformes, on a sur la frontière de Ω :

$$h(x,y) = -\frac{\Delta h_x}{L_x} x - \frac{\Delta h_y}{L_y} y + h_0$$

• Le terme à l'échelle macroscopique s'exprime alors :

$$\int_\Gamma h \cdot (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n})\ d\omega = -\frac{\Delta h_x}{L_x} \int_\Gamma x \cdot (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n})\ d\omega - \frac{\Delta h_y}{L_y} \int_\Gamma y \cdot (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n})\ d\omega + h_0 \int_\Gamma (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n})\ d\omega$$

On a $\int_\Gamma (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n})\ d\omega$ car $\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0$ dans Ω. Et on remarque que les intégrales sur la frontière sont les composantes en x et y de la vitesse macroscopique moyenne.

$$\int_\Gamma h \cdot (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n})\ d\omega = -\frac{\Delta h_x}{L_x} \int_\Omega \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}_x\ d\omega - \frac{\Delta h_y}{L_y} \int_\Omega \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}_y\ d\omega$$

• En suivant le même raisonnement, le terme à l'échelle mégascopique s'exprime à partir des vitesses mégascopiques :

$$\int_\Gamma H \cdot (\boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n})\ d\omega = -\frac{\Delta h_x}{L_x} \int_\Omega \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}_x\ d\omega - \frac{\Delta h_y}{L_y} \int_\Omega \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}_y\ d\omega$$

On constate alors que l'égalité des vitesses moyennes ($\int_\Omega \boldsymbol{v}\ d\omega = \int_\Omega \boldsymbol{V}\ d\omega$) implique l'égalité des énergies pour les conditions aux limites de type uniforme.

4.1.8 En résumé

Nous avons défini la perméabilité équivalente comme la perméabilité d'un milieu homogène fictif tel que s'il est soumis aux mêmes conditions aux limites que le milieu hétérogène réel il donne la même vitesse moyenne et le même gradient de charge moyen que le milieu hétérogène.

Il se pose alors la question de savoir si cette perméabilité équivalente vérifie aussi les critères d'équivalence plus fréquemment employés : l'égalité des flux et l'égalité des énergies dissipées. Il est montré que la réponse à cette question dépend du type de conditions aux limites employées (voir tableau 4.1). On retiendra que avec des conditions aux limites de type perméamètre, périodique et uniforme, la définition proposée impose l'égalité des énergies dissipées.

Conditions aux Limites	Perméamètre	Périodique	Uniforme	Immersion
Égalité des Flux	Oui	Oui	Non	Non
Égalité des Énergies	Oui	Oui	Oui	non démontré

TAB. 4.1 : *Critères vérifiés par la perméabilité équivalente définie par l'équation 4.8 en fonction du type de conditions aux limites.* Non *signifie que le critère n'est pas vérifié en général même s'il existe des cas où il est vérifié.*

Il est montré de plus que le critère d'égalité des flux ne peux pas en général être rigoureusement vérifié avec des conditions aux limites de type uniforme ou immersion.

Les simplifications (équations 4.9 et 4.11) de l'expression proposée permettent premièrement de transformer un calcul d'intégrales volumiques par un calcul d'intégrales surfaciques. Cela présente un intérêt au niveau de l'optimisation du code de calcul de la perméabilité équivalente. Deuxièmement, et c'est là le grand intérêt de ces transformations, elles permettent de montrer clairement que même si les conditions aux limites sont de type perméamètre, il est possible de mesurer sur les faces d'entrée et de sortie du bloc étudié les centres de gravité des flux et ainsi de déterminer s'il existe une composante de la vitesse moyenne perpendiculaire à l'écoulement principal et caractéristique d'une anisotropie. Cela ne nécessite pas de connaître le champ de vitesse à l'intérieur du bloc. De même, en mesurant les charges hydrauliques sur les faces extérieures du bloc, on peut calculer le gradient moyen de charge dans le bloc. Il est alors possible de calculer

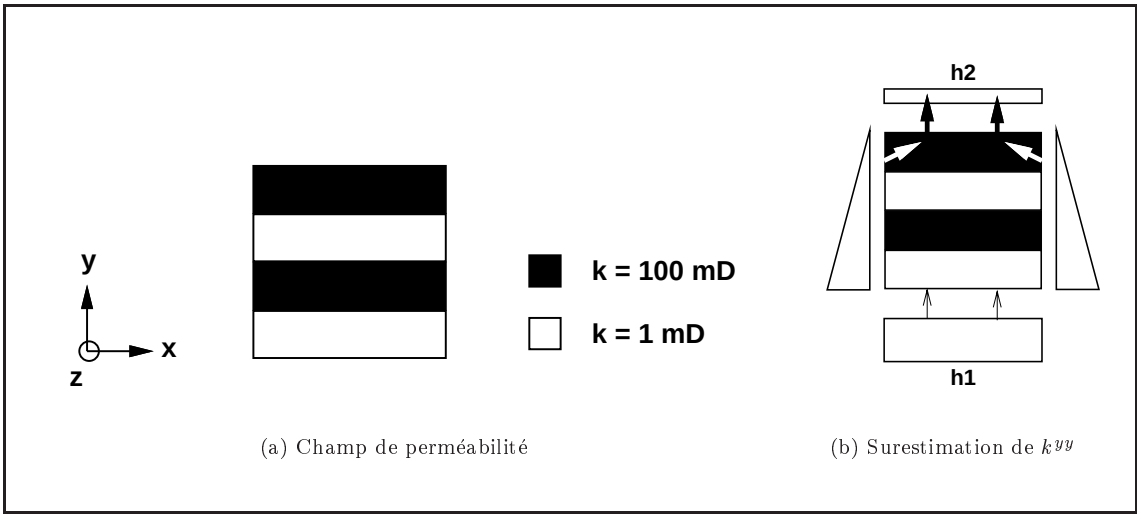
un tenseur de perméabilité équivalente quelles que soient les conditions aux limites employées. L'annexe D présente un schéma de dispositif expérimental qui permettrait d'exploiter ce résultat théorique avec des conditions aux limites de type perméamètre.

4.2 Exemples d'applications

Les exemples sont donnés en deux dimensions car ils sont ainsi plus faciles à illustrer, mais des tests en trois dimensions ont également été conduits. Les simulations numériques ont été réalisées avec le logiciel *TRIMULEC*, qui est présenté en Annexe E.

Ces tests nous permettent de souligner l'influence des conditions aux limites sur le calcul du tenseur de perméabilité équivalente. Nous discutons des domaines d'application de chaque type de conditions aux limites ainsi que de l'utilisation possible des conditions de type périodique.

4.2.1 Milieu 2D stratifié



(a) Champ de perméabilité

(b) Surestimation de k^{yy}

FIG. 4.3 : *Milieu stratifié parallèlement aux axes*

Le milieu utilisé pour le test est représenté sur la figure 4.3 a. C'est un milieu stratifié dont la perméabilité équivalente est donnée par :

$$\boldsymbol{K}_{\text{théorie}} = \begin{pmatrix} \mu_a & 0 \\ 0 & \mu_h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50.5 & 0 \\ 0 & 1.98 \end{pmatrix}$$

avec μ_a la moyenne arithmétique des perméabilités locales et μ_h la moyenne harmonique.

Le milieu a été discrétisé en 4×4 mailles carrées. La méthode numérique, avec des conditions aux limites de type perméamètre, donne un résultat exact, que l'on utilise le critère d'égalité des flux ou des vitesses moyennes :

$$\boldsymbol{K}_{\text{perméamètre}} = \begin{pmatrix} 50.5 & 0 \\ 0 & 1.98 \end{pmatrix} = \boldsymbol{K}_{\text{théorie}}$$

En revanche, le calcul avec des conditions aux limites uniformes surestime k^{yy}. Lorsque l'on utilise

le critère d'égalité des vitesses moyennes on obtient :

$$\boldsymbol{K}_{\text{uniforme}} = \begin{pmatrix} 50.5 & 0 \\ 0 & 14.8 \end{pmatrix}$$

Cette surestimation de k^{yy} s'explique par le phénomène représenté sur la figure 4.3 b. Avec les conditions aux limites de type uniforme, la charge varie linéairement sur la frontière et provoque des flux entrant sur les deux bords latéraux, au niveau de la dernière strate de forte perméabilité. Cela conduit à une vitesse moyenne en y supérieure à ce qu'elle serait dans un milieu stratifié infini. On remarque que l'écoulement dans le bloc ne peut plus être considéré comme uniforme et que ce cas représente une situation typique dans laquelle le critère d'égalité des flux sur les quatre faces conduit à un système sans solution.

4.2.2 Milieu stratifié oblique

Pour ce deuxième test, la stratification est oblique par rapport aux axes de la grille (figure 4.4 a). Le tenseur de perméabilité équivalente théorique, sous l'hypothèse que le milieu est stratifié à l'infini, s'obtient par un changement de repère : une rotation suivant l'axe des z d'un angle de 45^o. En prenant comme tenseur initial celui calculé analytiquement dans la section précédente, on obtient dans le nouveau repère :

$$\boldsymbol{K}_{\text{théorie}} = \begin{pmatrix} (\mu_h + \mu_a)/2 & (\mu_h - \mu_a)/2 \\ (\mu_h - \mu_a)/2 & (\mu_h + \mu_a)/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26.24 & -24.26 \\ -24.26 & 26.24 \end{pmatrix}$$

• Le milieu a été discrétisé beaucoup plus finement que dans l'exemple précédent ; nous avons employé 64×64 mailles. En utilisant la méthode numérique avec des conditions aux limites de type uniforme, on obtient :

$$\boldsymbol{K}_{\text{uniforme}} = \begin{pmatrix} 27.74 & -22.75 \\ -22.75 & 27.74 \end{pmatrix}$$

Ce résultat est indépendant du critère utilisé (flux ou vitesse) car dans ce cas les flux sur les faces opposées sont égaux et l'égalité des flux se réduit à l'égalité des vitesses moyennes. On considère le résultat numérique comme proche du résultat analytique théorique. La symétrie est bien respectée. Si l'on calcule les directions principales de ce tenseur, on constate que l'on retrouve bien les directions à 45^o des axes x et y qui correspondent à la direction de stratification. Dans ce nouveau repère, le tenseur $\boldsymbol{K}_{\text{uniforme}}$ devient :

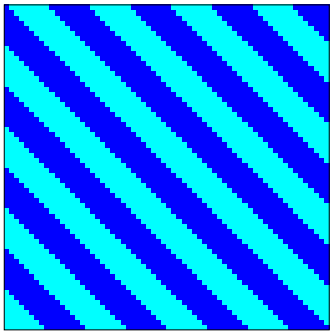
$$\boldsymbol{K}^{\star}_{\text{uniforme}} = \begin{pmatrix} 50.5 & 0 \\ 0 & 4.98 \end{pmatrix} \quad \simeq \quad \boldsymbol{K}^{\star}_{\text{théorie}} = \begin{pmatrix} 50.5 & 0 \\ 0 & 1.98 \end{pmatrix}$$

La différence entre les valeurs de k^{yy} est non négligeable. Elle peut s'expliquer certainement par le fait que l'écoulement n'est pas strictement uniforme, à cause des conditions aux limites, comme on peut le voir si l'on observe avec attention les vecteurs vitesses du bord du bloc sur la figure 4.4 e. Cet écart peut également être dû à l'effet de la discrétisation (les strates obliques sont discrétisées sous forme de marches d'escalier) et aux biais numériques qui seront discutés dans le chapitre 6.

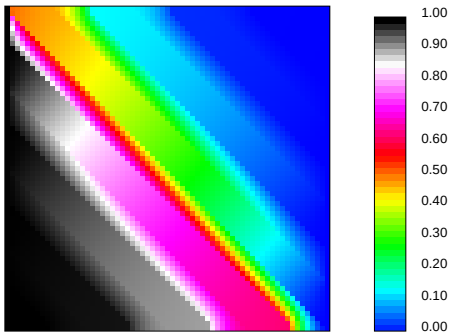
• En utilisant des conditions aux limites de type perméamètre et la formule classique d'égalité des flux (équation (3.16) page 32), on obtient un résultat très différent :

$$\boldsymbol{K}_{\text{perméamètre flux}} = \begin{pmatrix} 4.03 & 0 \\ 0 & 4.03 \end{pmatrix} \quad \neq \quad \boldsymbol{K}_{\text{théorie}} = \begin{pmatrix} 26.24 & -24.26 \\ -24.26 & 26.24 \end{pmatrix}$$

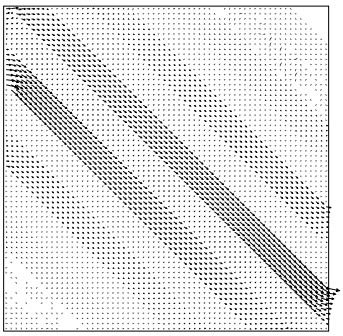
L'écart important entre le résultat et la théorie provient d'une part des conditions aux limites de type perméamètre qui imposent des flux nuls sur les bords du domaine et d'autre part de l'hypothèse implicite que $K^{xy} = 0$ dans l'équation (3.16).



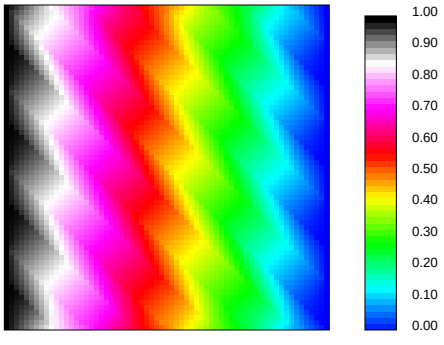
(a) Champ de perméabilité (64×64 mailles)



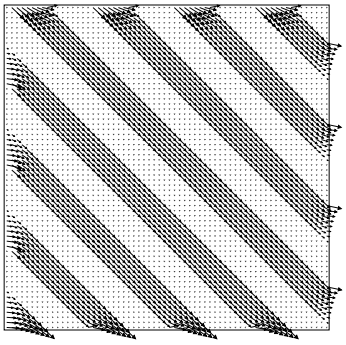
(b) Condition aux limites perméamètre : champ de charge



(c) Condition aux limites perméamètre : champ de vitesse



(d) Condition aux limites uniformes : champ de charge



(e) Condition aux limites uniformes : champ de vitesse

FIG. 4.4 : *Résultats de simulations fines sur un milieu stratifié obliquement avec des conditions aux limites de type perméamètre et uniforme . Les bandes sombres ont une perméabilité de 1 mD, les claires de 100mD*

En revanche, en utilisant le critère d'égalité des vitesses moyennes, on obtient un tenseur de perméabilité beaucoup plus proche de la théorie.

$$\boldsymbol{K}_{\text{perméamètre vitesse}} = \begin{pmatrix} 21.4 & -19 \\ -19 & 21.4 \end{pmatrix}$$

Le calcul des vecteurs propres et valeurs propres montre que les directions principales d'anisotropie sont exactement les directions à $\pm 45^o$ et que, dans ce repère, on a :

$$\boldsymbol{K}^{\star}_{\text{perméamètre}} = \begin{pmatrix} 40.4 & 0 \\ 0 & 2.4 \end{pmatrix} \quad \simeq \quad \boldsymbol{K}^{\star}_{\text{théorie}} = \begin{pmatrix} 50.5 & 0 \\ 0 & 1.98 \end{pmatrix}$$

Contrairement aux conditions limites de type uniforme, les conditions aux limites de type perméamètre sous-estiment dans ce cas k^{xx}. k^{yy} est plus proche de la théorie. La différence non négligeable entre ce tenseur de perméabilité et la valeur théorique s'explique de nouveau par la perturbation liée aux conditions aux limites. Les limites à flux nuls sont équivalentes à des limites de symétrie. Ainsi, cela revient à supposer que le milieu ressemble au milieu représenté sur la figure 4.5. La perméabilité équivalente calculée dans ces conditions ne peut pas être la même que celle calculée théoriquement, en faisant l'hypothèse que le milieu est stratifié et infini.

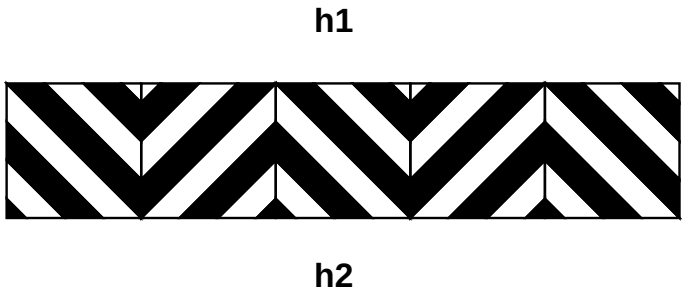


FIG. 4.5 : *Milieu symétrique périodique sous-tendu par l'emploi de conditions limites de type perméamètre sur un milieu stratifié oblique*

• Il est possible de s'affranchir en partie de cette perturbation en calculant la perméabilité équivalente non pas sur le domaine entier, mais sur un bloc immergé. Par exemple, si l'on divise le domaine présenté ci-dessus en blocs de 16×16 mailles et si l'on calcule le tenseur de perméabilité équivalente, on obtient pour les quatre blocs du centre un résultat très proche de la théorie que ce soit avec des conditions aux limites de type perméamètre ou uniforme.

$$\boldsymbol{K}_{\text{perméamètre}} = \begin{pmatrix} 26.8 & -24.8 \\ -24.8 & 26.8 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{K}_{\text{uniforme}} = \begin{pmatrix} 26.3 & -24.2 \\ -24.2 & 26.3 \end{pmatrix}$$

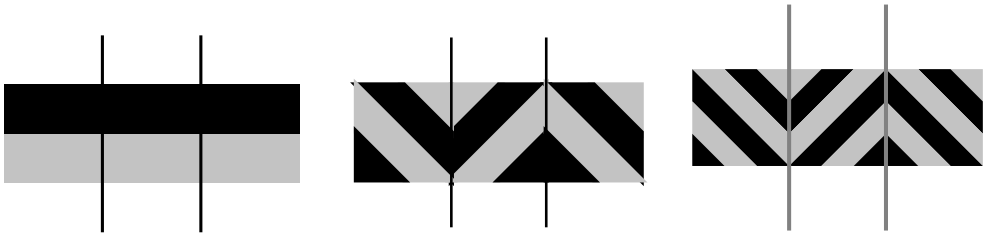
4.2.3 Discussion

Sur des exemples simplistes de milieux stratifiés, nous avons montré que le tenseur de perméabilité équivalente (perméabilité de bloc) dépend à la foi des conditions aux limites et du critère d'équivalence utilisées pour son calcul.

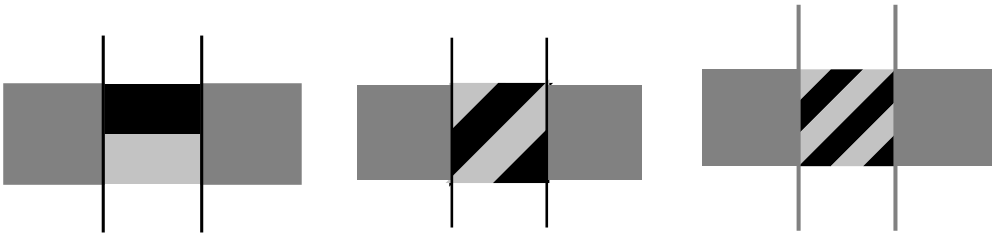
En prenant comme définition de la perméabilité équivalente l'équation proposée par Rubin and Gómez-Hernández (1990), on constate que :

– Pour un milieu stratifié parallèlement aux axes de la grille, les conditions aux limites de type perméamètre permettent d'obtenir la perméabilité équivalente théorique, mais les conditions aux limites de type uniforme surestiment la perméabilité perpendiculaire aux strates.

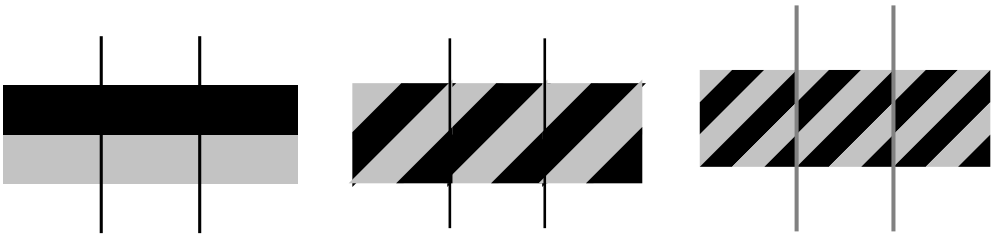
(a) Trois cellules de bases représentant un milieu stratifié infini.



(b) Conditions aux limites perméamètre : les conditions à flux nul sur le bord sont équivalentes à des plans de symétrie. Cette contrainte ne permet de calculer la perméabilité équivalente correcte que pour le milieu stratifié suivant les axes du bloc (dessin de gauche).



(c) Conditions aux limites uniformes : cela revient à insérer le milieu étudié entre deux blocs de perméabilité moyenne. Dans les trois cas il s'agit d'une approximation.



(d) Conditions aux limites périodiques : cela revient à supposer le milieu périodique. Cette approche permet de retrouver correctement la perméabilité du milieu dont les strates sont parallèles aux axes et de celui présentant des strates à 45^o à condition que la répétition de la cellule permette de reconstituer la stratification infinie, ce qui n'est pas le cas du milieu représenté à droite.

FIG. 4.6 : *Synthèse sur l'effet des conditions aux limites*

– Inversement quand le milieu est stratifié oblique, les conditions aux limites de type uniforme permettent de calculer plus précisément la perméabilité équivalente que ne le permettent les conditions de type perméamètre.

Ces observations s'expliquent aisément par une interprétation physique de l'effet des conditions aux limites (figure 4.6). On interprète les conditions aux limites à flux nul comme des plans de symétrie, les conditions aux limites uniformes (en première approximation) comme une immersion dans un milieu de perméabilité moyenne constante, et les conditions aux limites périodiques comme une périodicité spatiale. Bien que nous n'ayons pas pu réaliser les expériences numériques avec des conditions aux limites de type périodique[2], le raisonnement illustré sur la figure 4.6 montre qu'elles auraient permis d'obtenir le résultat théorique dans le cas de la stratification parallèle aux axes et dans le cas de la stratification oblique à condition que le nombre de strates interceptées par le bord du bloc soit pair, de façon à ce que la périodicité permette de rétablir les strates infinies (voir figure 4.6 d, colonne de droite, pour un contre exemple). Les expériences numériques de Pickup, Ringrose, Jensen, and Sorbie (1994) présentées dans la partie bibliographique (page 64) confirment ces observations.

Il est donc justifié d'utiliser des conditions aux limites de type perméamètre à condition de faire les calculs dans les directions principales d'anisotropie. Cela implique que les mesures de perméabilité au laboratoire doivent également être réalisées impérativement dans les directions principales d'anisotropie.

Les conditions aux limites de type uniforme permettent un calcul correct des directions principales d'anisotropie et des perméabilités dans les directions parallèles aux strates. Mais elles surestiment la perméabilité perpendiculairement aux strates. Les conditions aux limites de type périodique sont certainement les plus robustes, mais nous n'avons pas pu les tester. La technique qui consiste à immerger le bloc permet de diminuer la perturbation liée à l'emploi de tel ou tel type de conditions aux limites.

4.3 Conclusion

⇝ Nous proposons de définir le tenseur de perméabilité de bloc $\boldsymbol{K}_b$ d'un milieu hétérogène en postulant que les moyennes du vecteur vitesse dans le milieu homogène fictif de perméabilité $\boldsymbol{K}_b$ et dans le milieu hétérogène soient égales et qu'il en soit de même pour les moyennes du gradient de charge. Pour donner une expression pratique de cette perméabilité nous avons supposé que la loi de Darcy s'applique sur le milieu homogène fictif.

L'expression de la perméabilité équivalente ainsi obtenue est identique à celle employée par Rubin and Gómez-Hernández (1990).

Nous avons démontré que le tenseur de perméabilité ainsi défini impose l'égalité des énergies dissipées dans le milieu hétérogène et dans le milieu homogène équivalent si les conditions aux limites sont de type perméamètre, périodique ou uniforme. Dans le cas où le bloc est immergé, l'égalité des énergies dissipées n'est pas assurée de façon exacte (voir résultats de Sànchez-Vila, Girardi, and Carrera (1995)). Nous avons également démontré que les flux aux frontières du bloc sont identiques pour le milieu hétérogène et pour le milieu homogène dans le cas de conditions aux limites de type perméamètre et périodique. Avec des conditions aux limites uniformes ou périodiques, nous montrons que l'égalité des flux est en général un critère impossible à satisfaire rigoureusement.

⇝ Par rapport au critère d'égalité des flux, la définition proposée présente l'avantage d'avoir toujours une solution. Elle n'impose pas de chercher une solution approximative (minimisation par

[2] Cela pose des problèmes d'implémentation dans l'algorithme multigrille de *TRIMULEC* que nous n'avons pas eu le temps de résoudre.

la méthode des moindres carrés) dans le cas de conditions aux limites de type uniforme ou immersion. De plus cette définition, tout comme l'égalité des énergies dissipées, peut s'appliquer très facilement à la définition de la perméabilité de blocs de formes quelconques, ce que permet difficilement le critère d'égalité des flux.
Par rapport au critère d'égalité des énergies, la définition proposée présente l'avantage d'être basée sur un critère vectoriel et non scalaire, ce qui permet d'augmenter le nombre d'équations par rapport au nombre d'inconnues et ainsi de faciliter la détermination du tenseur complet de perméabilité.

Les exemples illustrant l'application de la définition proposée ou du critère d'égalité des flux montrent que, lorsque les deux critères donnent le même résultat, la perméabilité obtenue est la perméabilité équivalente théorique. Lorsqu'il y a discordance, cela indique souvent un problème de représentativité du résultat. L'utilisation coordonnée des deux définitions et la comparaison des résultats peut donc être un argument pour décider de la représentativité d'un calcul de perméabilité équivalente.

Un autre point important abordé dans ce chapitre est l'effet du choix du type de conditions aux limites sur le calcul de la perméabilité équivalente. Les conditions aux limites de type uniforme sont certainement celles qu'il faut manier avec le plus de précautions, car les hypothèses sous-jacentes sont rarement vérifiées. En revanche, ce type de conditions aux limites semble donner de bons résultats lorsqu'on les impose aux frontières d'un domaine dans lequel le bloc est immergé. Les conditions aux limites de type perméamètre permettent d'obtenir le tenseur de perméabilité théorique à condition que les directions principales d'anisotropie soient parallèles aux faces du bloc. Les conditions aux limites de type périodique sont certainement les plus robustes, mais cela ne signifie pas qu'elles permettent toujours un calcul exact.

⇝ Les développements théoriques réalisés nous ont permis de remarquer qu'il est possible, contrairement à ce qui est généralement affirmé, de calculer un tenseur complet de perméabilité à partir de résultats d'écoulements avec des conditions aux limites de type perméamètre. Un dispositif expérimental, exploitant cette remarque, a été imaginé (voir Annexe D). La technique correspondante permet de vérifier si les axes d'anisotropie sont bien parallèles aux axes du bloc et donc si le calcul de la perméabilité équivalente avec des conditions aux limites de type perméamètre est justifié ou non.

Chapitre 5

Une nouvelle technique rapide : la renormalisation simplifiée

Ce chapitre présente une nouvelle technique rapide de calcul de la perméabilité équivalente (Renard and Le Loc'h 1996). L'approche est basée sur la synthèse de deux travaux antérieurs : un algorithme itératif proposé par Le Loc'h (1987) et une formule de composition de moyennes, permettant de prendre en compte l'anisotropie, proposée par Kruel-Romeu (1994).

Nous avons été amenés à développer cette nouvelle formule heuristique car l'algorithme itératif fournit deux valeurs. Le Loc'h (1987) propose d'en prendre la moyenne géométrique pour donner une estimation unique de la perméabilité équivalente. Elle constate également que, pour des milieux log-normaux isotropes et bi-dimensionnels, cette estimation est non biaisée. Nous avons constaté expérimentalement (chapitre 7) que, pour des milieux anisotropes, la perméabilité équivalente pouvait être proche de l'une ou l'autre des valeurs obtenues par l'algorithme itératif. Il était nécessaire de développer une méthode permettant de composer les deux valeurs qui prenne en compte l'anisotropie du milieu. Nous nous sommes alors appuyés sur les développements analytiques de Kruel-Romeu (1994) pour proposer une formule simple et adaptée à notre problème.

Dans le début de ce chapitre, nous donnons les hypothèses (§ 5.1) et détaillons l'algorithme itératif (§ 5.2) de Le Loc'h (1987) sur lesquels repose la nouvelle méthode. Nous rappelons ensuite les fondements de la formule de Kruel-Romeu (1994), ce qui nous permet de montrer comment celle-ci a été adaptée à notre problème (§ 5.3).

5.1 Les hypothèses

Le champ de perméabilité est supposé connu sur une grille régulière. Les tenseurs de perméabilité $\boldsymbol{k}$ varient d'une maille à l'autre mais sont supposés constants dans chaque maille et, au moins dans un premier temps, diagonaux (cela signifie que les axes principaux d'anisotropie sont supposés être les axes du maillage). La méthode que nous proposons ne permet, sous cette dernière hypothèse, que le calcul des termes diagonaux du tenseur de perméabilité équivalente :

$$\boldsymbol{K}_b = \begin{pmatrix} K_b^{xx} & 0 & 0 \\ 0 & K_b^{yy} & 0 \\ 0 & 0 & K_b^{zz} \end{pmatrix}$$

5.2 Procédure itérative

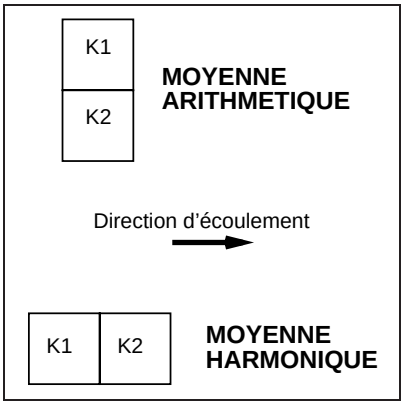


FIG. 5.1 : *Association en parallèle ou en série de deux mailles.*

La procédure itérative décrite dans cette section est celle qui est proposée par Le Loc'h (1987), nous avons seulement envisagé, en guise de remarque, un calcul du tenseur complet de perméabilité dans le cas où les perméabilités locales ne seraient pas diagonales. Pour calculer $K_b^{uu}, u \in (x, y, z)$, l'idée de base consiste à regrouper les mailles de la grille fine par paquets de deux. Si les mailles sont en série par rapport à la direction u, alors on affecte au paquet la moyenne harmonique des perméabilités directionnelles locales. Si les mailles sont en parallèle, alors on affecte au paquet la moyenne arithmétique des perméabilités directionnelles locales (figure 5.1). L'application de regroupements successifs alternativement en parallèle et en série permet de réduire progressivement le nombre de mailles de la grille jusqu'à ne plus avoir qu'une seule maille (figure 5.2).

Si l'on commence par regrouper les mailles en série (dans la direction u) puis à les regrouper en parallèle suivant la (en deux dimensions) ou les (en trois dimensions) direction(s) perpendiculaire(s), et si l'on répète cette opération jusqu'à ce qu'il n'y ait plus qu'une maille, on obtient une valeur notée $c_{\min}^{uu}$.

Si l'on commence par regrouper les mailles en parallèle, puis si l'on poursuit le regroupement en série en itérant la procédure, on obtient une seconde valeur, toujours supérieure ou égale à la première et notée $c_{\max}^{uu}$.

Remarques

Deux autres valeurs peuvent être calculées, en trois dimensions, si l'on alterne un regroupement en parallèle, puis en série, puis en parallèle (ces valeurs seraient les analogues des valeurs intermédiaires K_3 et K_4 définies page 28). Ces valeurs n'ont pas été utilisées jusqu'à présent dans notre approche.

Si une limite du domaine est atteinte dans une direction avant que la limite dans une autre direction soit atteinte, alors l'algorithme n'est poursuivi que dans la direction restante.

Si la taille des mailles est variable (maillage écossais), il faut pondérer les valeurs des perméabilités ou leurs inverses par les tailles des mailles lors du calcul de la moyenne arithmétique ou harmonique (équation 3.13, page 30.)

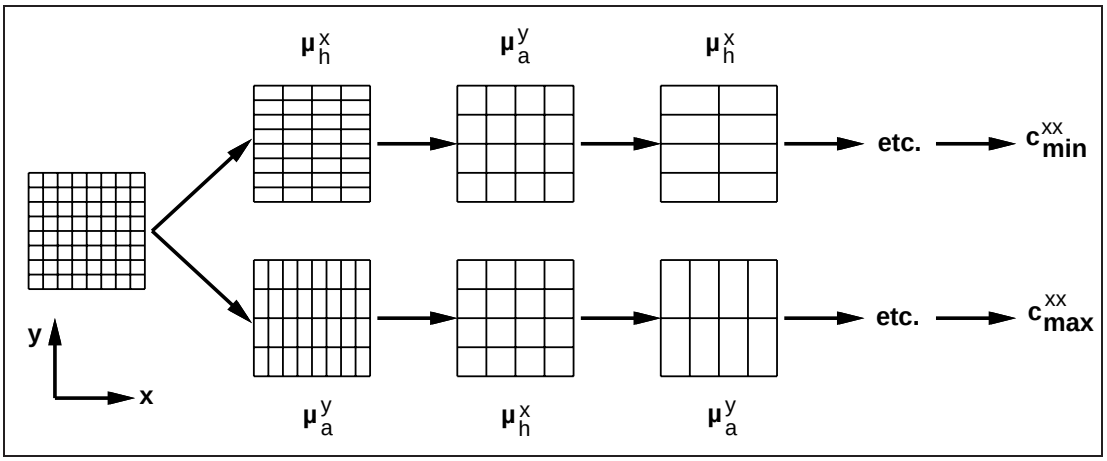


FIG. 5.2 : *Illustration en deux dimensions de la procédure itérative de calcul de c^{xx}_{min} et c^{xx}_{max}. μ^y_a représente l'opérateur moyenne arithmétique selon la direction y, μ^x_h la moyenne harmonique selon la direction x.*

Dans le cas où à l'itération i le nombre de mailles dans une direction est impair, nous proposons de regrouper tous les paquets de deux mailles possibles et de garder la dernière série de mailles isolées. A l'itération $i+1$, ces mailles seront regroupées avec leurs voisines, mais comme elles ont une taille différente, la moyenne harmonique ou arithmétique doit être pondérée par la taille de chaque maille. Cela implique de stocker et de mettre à jour à chaque itération les tailles des mailles regroupées normalement et les tailles des mailles en bordure (figure 5.3).

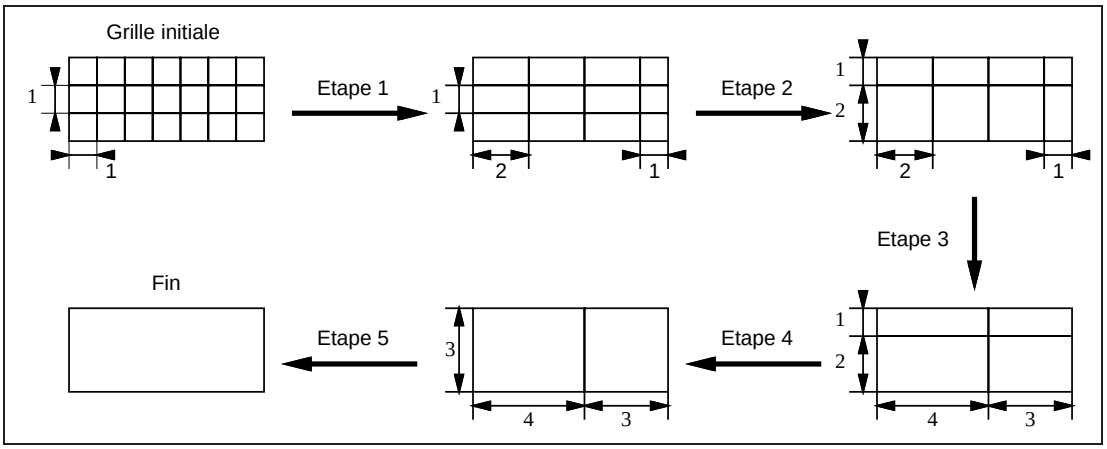


FIG. 5.3 : *Exemple de regroupements successifs dans le cas où le nombre de mailles est impair et différent suivant les directions.* Grille initiale *: toutes les mailles ont la même taille (ici 1×1) ;* Étape 1 *: les mailles sont regroupées suivant x, sauf la dernière rangée. On obtient des mailles regroupées de taille 2 en x et la dernière rangée à une taille 1.* Étape 2 *: même chose que l'étape 1 mais en y.* Étape 3 *: regroupements suivant x, le nombre de mailles est pair, on peut regrouper toutes les mailles en prenant en compte les différences de tailles. etc.*

Si les perméabilités locales sont tensorielles, on propose d'utiliser à chaque étape la formule analytique pour les milieux stratifiés, démontrée en annexe B pour le cas tri-dimensionnel et par Quintard and Whitaker (1987) pour le cas bi-dimensionnel, qui permet le calcul du tenseur de

perméabilité équivalente :

$$\begin{aligned}
K_b^{xx} =& \frac{(a+b)(k_0^{xx}k_1^{xx})}{bk_0^{xx}+ak_1^{xx}} \\
K_b^{yy} =& \frac{1}{a+b}\left[ak_0^{yy}+bk_1^{yy}-ab\cdot\frac{(k_0^{xy}-k_1^{xy})^2}{bk_0^{xx}+ak_1^{xx}}\right] \\
K_b^{zz} =& \frac{1}{a+b}\left[ak_0^{zz}+bk_1^{zz}-ab\cdot\frac{(k_0^{xz}-k_1^{xz})^2}{bk_0^{xx}+ak_1^{xx}}\right] \\
K_b^{xy} =& \frac{bk_0^{xx}k_1^{xy}+ak_1^{xx}k_0^{xy}}{bk_0^{xx}+ak_1^{xx}} \\
K_b^{xz} =& \frac{bk_0^{xx}k_1^{xz}+ak_1^{xx}k_0^{xz}}{bk_0^{xx}+ak_1^{xx}} \\
K_b^{yz} =& \frac{1}{a+b}\left[ak_0^{yz}+bk_1^{yz}-ab\cdot\frac{(k_0^{xy}-k_1^{xy})(k_0^{xz}-k_1^{xz})}{bk_0^{xx}+ak_1^{xx}}\right]
\end{aligned} \tag{5.1}$$

avec a et b les tailles respectives des mailles de perméabilité $\boldsymbol{k}_0$ et $\boldsymbol{k}_1$.

5.3 Prise en compte de l'anisotropie

On observe (cf. chapitre 7) que la perméabilité équivalente est proche de $c_{\min}^{uu}$ quand l'écoulement est perpendiculaire à l'aplatissement du maillage et de $c_{\max}^{uu}$ quand l'écoulement est parallèle à l'aplatissement.

Aussi, l'idée est de proposer une formule simple qui donne une perméabilité unique qui soit une composition de $c_{\min}^{uu}$ et $c_{\max}^{uu}$ et qui prenne en compte l'anisotropie du milieu. Une technique standard consiste à utiliser un exposant :

$$K_b^{uu} = c^{uu} = (c_{\max}^{uu})^{\alpha}\cdot(c_{\min}^{uu})^{1-\alpha} \tag{5.2}$$

Le but de cette section est alors d'exprimer α en fonction de l'anisotropie du milieu.

5.3.1 Quantification de l'anisotropie

Trois types d'anisotropie sont possibles :

1. les mailles de même perméabilité peuvent être organisées en couches plus ou moins régulières et créer des strates, dans un contexte stochastique cela se traduit par des longueurs de corrélations différentes selon les directions $l_u \neq l_v$;
2. les perméabilités locales peuvent être anisotropes $k^{uu} \neq k^{vv}$;
3. les mailles peuvent être aplaties $d_u \neq d_v$ (d_u et d_v représentent les tailles des mailles de la grille dans les directions u et v).

L'anisotropie de type 1 et 2 est prise en compte dans le calcul itératif de $c_{\max}^{uu}$ et $c_{\min}^{uu}$, dans lequel interviennent à la fois les valeurs des perméabilités locales directionnelles et leur agencement spatial.

Si le rapport d'anisotropie $\frac{k^{uu}}{k^{vv}}$ est constant dans le domaine, alors les anisotropies de type 2 et 3 sont strictement équivalentes. On peut montrer (voir Annexe F pour la démonstration) que le rapport qui permet de quantifier l'anisotropie est le suivant :

$$a_v^u = \frac{k^{vv}}{k^{uu}}\left(\frac{d_u}{d_v}\right)^2 \tag{5.3}$$

La figure 5.4 donne une illustration de l'aspect des mailles en fonction des deux rapports[1] a_y^x et a_z^x.

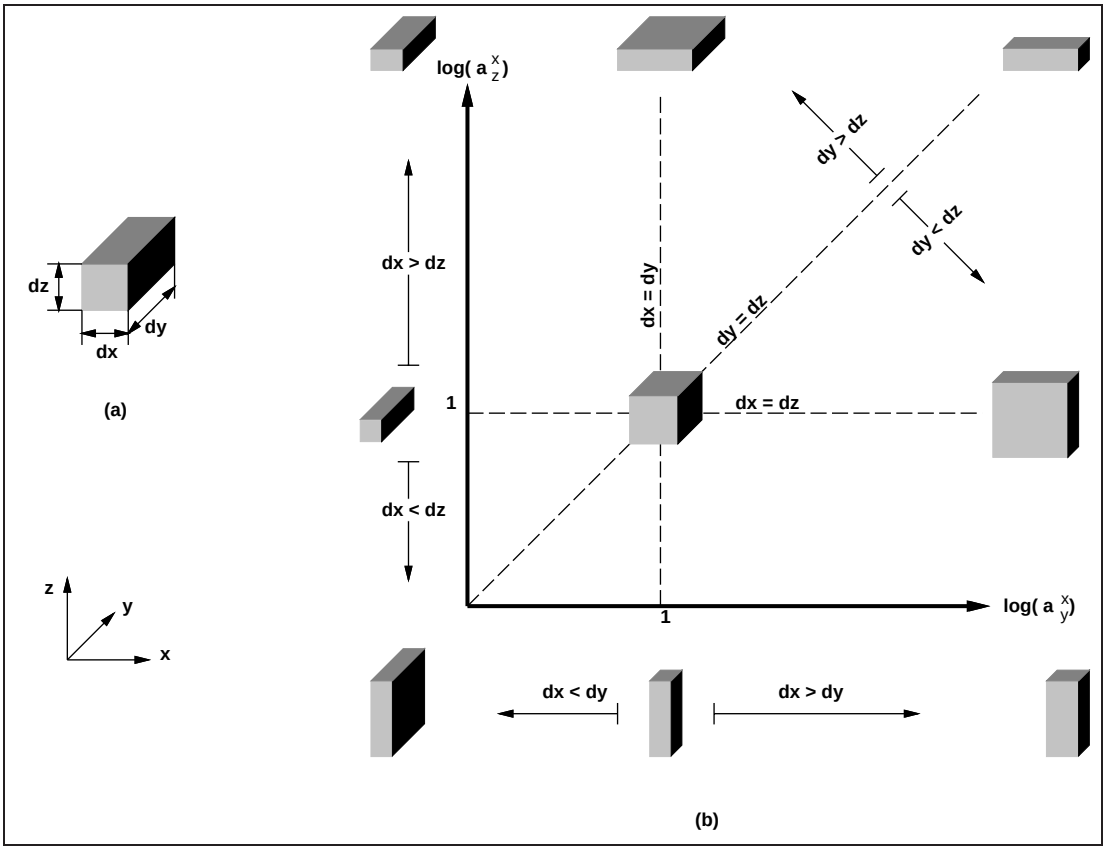


FIG. 5.4 : *Rapports d'anisotropie. (a) Maille élémentaire ; (b) Schéma représentant l'aspect de la maille élémentaire en fonction des rapports d'anisotropie.*

5.3.2 Rappels concernant la formule de Kruel-Romeu

Nous rappelons dans cette section la démarche suivi par Kruel-Romeu (1994).

Kruel-Romeu and Nœtinger (1995) développent une solution analytique approchée pour estimer la perméabilité "Différence Finie" d'une grille 2D ou 3D. La perméabilité différence finie est la perméabilité que l'on obtiendrait en résolvant l'équation de la diffusivité par la méthode des différences finies, avec un schéma direct, et avec des conditions aux limites périodiques.

La solution analytique est obtenue par une méthode de perturbation qui suppose que la distribution des perméabilités locales est log-normale et que la variance du logarithme des perméabilités $\sigma^2_{\ln k}$ est petite.

[1] On peut, en fait, définir six rapports en trois dimensions, mais ils sont liés et l'utilisation de deux d'entre eux est suffisante.

En deux dimensions

En deux dimensions, le résultat analytique approché au deuxième ordre en $\sigma^2_{\ln k}$ est le suivant :

$$K_{eq} \simeq \mu_g \exp\left[\sigma^2_{\ln k}\left(\frac{1}{2} - S_2\right)\right] \qquad S_2 = \frac{1}{N^2}\sum_{p=1}^{N}\sum_{q=1}^{N}\frac{\sin^2(\pi p/N)}{\sin^2(\pi p/N) + a_y^x \sin^2(\pi q/N)} \tag{5.4}$$

N représente le nombre de mailles de la grille (supposée carrée). Kruel-Romeu (1994) note que S_2 tend rapidement, lorsque N augmente, vers une intégrale I_2 qui a pu être calculée analytiquement.

$$I_2 = \lim_{N\to\infty} S_2 = \frac{4}{\pi^2}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha + a_y^x \sin^2\beta}d\alpha d\beta = 1 - \frac{\arctan\sqrt{a_y^x}}{\pi/2}$$

Duquerroix, Lemouzy, Nœtinger, and Kruel-Romeu (1993) posent $\theta = 1 - I_2$, θ tend vers 0 lorsque a_y^x tend vers 0 et tend vers 1 lorsque a_y^x tend vers l'infini (figure 5.5). En remarquant que $\mu_a = \mu_g \exp\left(\sigma^2_{\ln k}/2\right)$ et que $\mu_h = \mu_g \exp\left(-\sigma^2_{\ln k}/2\right)$, l'équation (5.4) devient :

$$K_{eq} = (\mu_a)^{\theta}(\mu_h)^{1-\theta} \qquad \theta = \frac{\arctan\sqrt{a_y^x}}{\pi/2} \tag{5.5}$$

La dernière étape consiste à faire la conjecture que si l'on remplace μ_a et μ_h par les bornes de Cardwell et Parsons $K_1 = \mu_h^x(\mu_a^y)$ et $K_2 = \mu_a^y(\mu_h^x)$ alors la formule gagnera en précision. Cela s'appuie sur l'interprétation en terme d'anisotropie des bornes K_1 et K_2. K_1 est la borne vers laquelle K_{eq} tend quand $k^{yy} \gg k^{xx}$ et K_2 est la borne vers laquelle K_{eq} tend quand $k^{yy} \ll k^{xx}$.

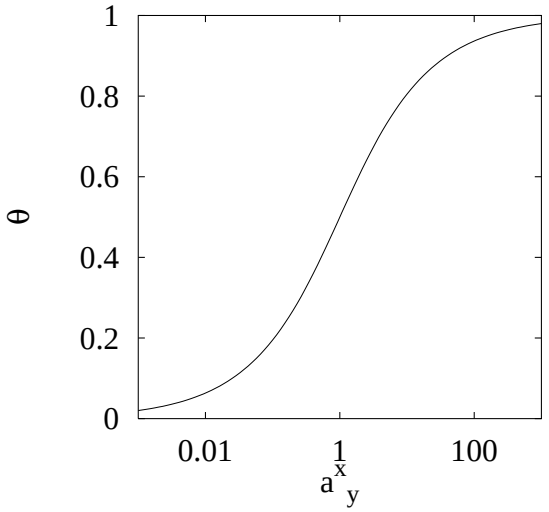


FIG. 5.5 : *Fonction de base pour la prise en compte de l'anisotropie*

En trois dimensions

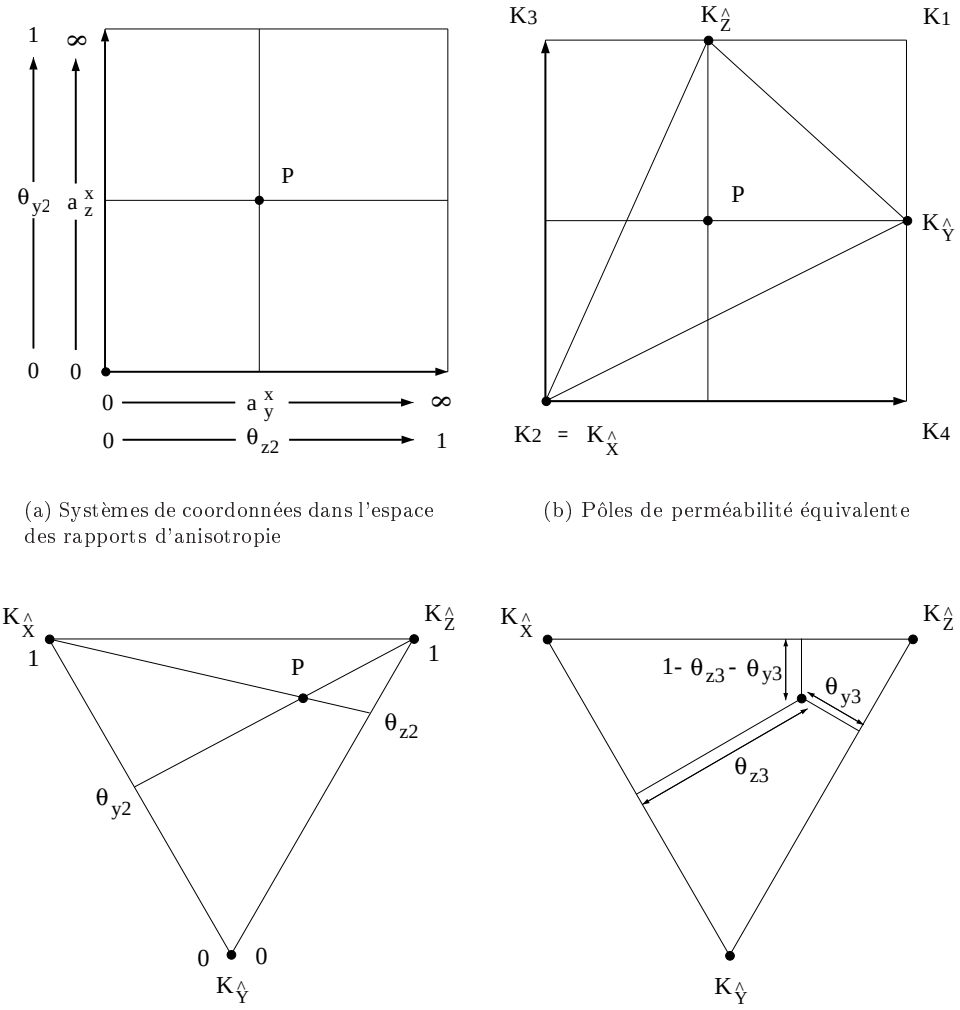
En trois dimensions, le résultat analytique approché au deuxième ordre en $\sigma^2_{\ln k}$ a la même forme que celui présenté en deux dimensions. Mais, aucune intégration analytique n'a permis le calcul du terme I_3 analogue à I_2 qui apparaît alors. Seule une intégration numérique a été réalisée. Toutefois, Kruel-Romeu (1994) propose un raisonnement géométrique qui permet un calcul approché de I_3.

L'idée de base est que, comme en deux dimensions où la perméabilité équivalente est située entre deux pôles, en trois dimensions celle-ci serait située entre trois pôles. Ces trois pôles sont notés $K_{\hat{X}}$, $K_{\hat{Y}}$ et $K_{\hat{Z}}$. Ils correspondent aux cas extrêmes suivant :

$$\lim_{a_y^x \to 0, a_z^x \to 0} K_{eq} = K_{\hat{X}}, \qquad \lim_{a_y^x \to \infty} K_{eq} = K_{\hat{Y}}, \qquad \lim_{a_z^x \to \infty} K_{eq} = K_{\hat{Z}}$$

K_{eq} peut alors s'exprimer comme une composition de ces trois pôles à l'aide d'exposants appropriés :

$$K_{eq} = K_{\hat{X}}^{(1-\theta_{y3}-\theta_{z3})} K_{\hat{Y}}^{\theta_{y3}} K_{\hat{Z}}^{\theta_{z3}}$$



(a) Systèmes de coordonnées dans l'espace des rapports d'anisotropie

(b) Pôles de perméabilité équivalente

(c) Triangle, premier système de coordonnées

(d) Triangle, second système de coordonnées

FIG. 5.6 : *Raisonnement géométrique pour exprimer les puissances gouvernant la formule de Kruel-Romeu*

Pour trouver une expression de θ_{y3} et θ_{z3}, considérons un point P dans l'espace des rapports d'anisotropie. Ses coordonnées sont a_y^x et a_z^x dans le repère cartésien présenté sur les figures 5.4 et

5.6 (a). Le même point P peut également être représenté dans un triangle équilatéral dont les trois sommets correspondent aux trois pôles $K_{\hat{X}}$, $K_{\hat{Y}}$ et $K_{\hat{Z}}$ (figure 5.6 b). Le sommet $K_{\hat{X}}$ correspond au point où a_y^x et a_z^x sont tous deux nuls, le sommet $K_{\hat{Y}}$ correspond au point où a_y^x est infini, et le sommet $K_{\hat{Z}}$ correspond au point où a_z^x est infini. A chaque côté du triangle on fait correspondre une échelle, sur le côté $K_{\hat{X}}K_{\hat{Y}}$ on associe une échelle où a_y^x varie de 0 à l'infini. De même une échelle en a_z^x est associée au côté $K_{\hat{X}}K_{\hat{Z}}$ et une échelle en a_z^y pourrait être associée au dernier côté (mais cela n'est pas nécessaire car $a_z^y = a_z^x/a_y^x$). Par analogie avec le résultat en deux dimensions, on peut faire le changement de coordonnées suivant :

$$\theta_{y2} = \frac{\arctan\sqrt{a_y^x}}{\pi/2} \qquad \theta_{z2} = \frac{\arctan\sqrt{a_z^x}}{\pi/2}$$

Un troisième mode de détermination de la position de P dans le triangle est de calculer les hauteurs entre le point P et les bases du triangle en les normalisant de façon à ce que la somme soit égale à 1 (figure 5.6 c). On peut passer d'un système de coordonnées à l'autre grâce aux relations qui suivent.

$$\theta_{y3} = \frac{\theta_{y2}(1-\theta_{z2})}{1-\theta_{y2}\theta_{z2}} \qquad \theta_{z3} = \frac{\theta_{z2}(1-\theta_{y2})}{1-\theta_{y2}\theta_{z2}}$$

Ce dernier système de coordonnées donne les exposants recherchés.

Finalement, comme le montre la figure 5.6 (a), les pôles $K_{\hat{X}}$, $K_{\hat{Y}}$ et $K_{\hat{Z}}$ peuvent s'exprimer en fonction de K_1, K_2, K_3 et K_4.

$$K_{\hat{X}} = K_2 \qquad K_{\hat{Y}} = K_1^{\theta_{z2}} K_4^{1-\theta_{z2}} \qquad K_{\hat{Z}} = K_1^{\theta_{y2}} K_3^{1-\theta_{y2}}$$

avec :

$$\begin{aligned} K_1 &= \mu_h^x(\mu_a^y(\mu_a^z)) = \mu_h^x(\mu_a^z(\mu_a^y)) \\ K_2 &= \mu_a^y(\mu_a^z(\mu_h^x)) = \mu_a^z(\mu_a^y(\mu_h^x)) \\ K_3 &= \mu_a^y(\mu_h^x(\mu_a^z)) \\ K_4 &= \mu_a^z(\mu_h^x(\mu_a^y)) \end{aligned}$$

On obtient la formule de Kruel-Romeu :

$$K_b^{xx} = K_1^{(\theta_{y2}\theta_{z3}+\theta_{z2}\theta_{y3})} K_2^{(1-\theta_{y3}-\theta_{z3})} K_3^{(1-\theta_{y2})\theta_{z3}} K_4^{(1-\theta_{z2})\theta_{y3}}$$

5.3.3 La nouvelle formule

Nous avons choisi de prendre $\alpha = \theta_{y3} + \theta_{z3}$. Cela revient à faire l'hypothèse, discutée dans la section 5.3.4, que :

$$K_{\hat{Y}} \simeq K_{\hat{Z}} \simeq c_{\max}^{uu}$$

Après quelques transformations algébriques, l'exposant α est exprimé en fonction des rapports d'anisotropie a_v^u et a_w^u (figure 5.7), et de la fonction de base dénommée $f(t)$.

$$K_b^{uu} = c^{uu} = (c_{\max}^{uu})^{\alpha} \cdot (c_{\min}^{uu})^{1-\alpha}$$

$$\alpha(a_v^u, a_w^u) = \frac{f(a_v^u) + f(a_w^u) - 2f(a_v^u)f(a_w^u)}{1 - f(a_v^u)f(a_w^u)}, \qquad u \neq v \neq w \in \{x, y, z\} \tag{5.6}$$

$$f(t) = \frac{2}{\pi}\arctan\sqrt{t}, \qquad a_v^u = \frac{k^{vv}}{k^{uu}}\left(\frac{d_u}{d_v}\right)^2$$

En deux dimensions, un seul rapport d'anisotropie intervient. L'expression de α est alors :

$$\alpha(a_x^y) = \frac{2}{\pi}\arctan\sqrt{a_y^x} \tag{5.7}$$

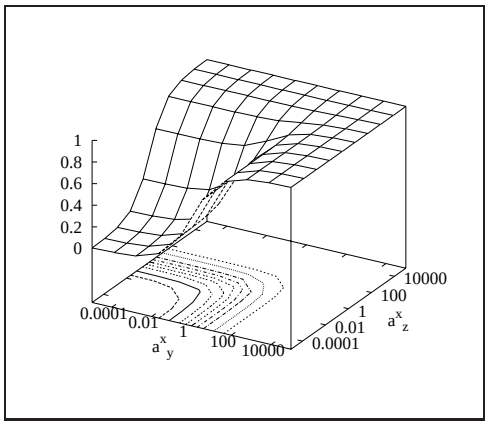


FIG. 5.7 : *Allure de l'exposant α en fonction des rapports d'anisotropie.*

5.3.4 Discussion

Kruel-Romeu fait la conjecture qu'en prenant les bornes de Cardwell et Parsons à la place des bornes de Wiener (μ_a et μ_h), qui apparaissent dans le résultat analytique (équation 5.5), alors le résultat doit s'améliorer. Nous faisons la conjecture que les valeurs $c^{uu}_{\max}$ et $c^{uu}_{\min}$, qui ont l'avantage de présenter un écart plus faible que les bornes de Cardwell et Parsons, pourraient donner encore un meilleur résultat. Toutefois, ces deux valeurs ont l'inconvénient de ne pas être des bornes théoriques de la perméabilité équivalente. On doit s'attendre à ce qu'elles soient parfois dépassées, en particulier dans le cas d'anisotropie forte.

En trois dimensions, deux pôles seulement sont utilisés, alors que Kruel-Romeu en emploie trois (on pourrait même dire quatre : K_1, K_2, K_3 et K_4). Cela présente l'avantage de simplifier la formulation. On peut noter qu'il serait aisé de calculer itérativement les équivalents de K_3 et K_4, mais cela représenterait un coût de calcul supplémentaire que nous avons jugé inutile, au moins dans une première étape. Nous faisons l'hypothèse que le resserrement des bornes est suffisant pour améliorer la précision.

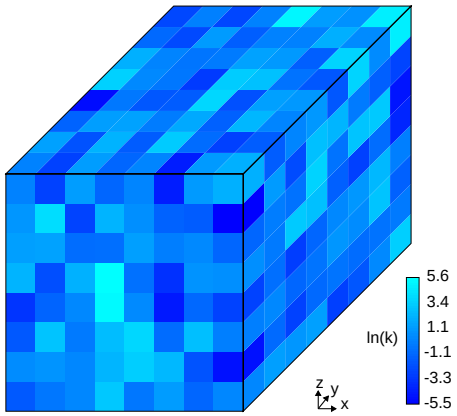
5.3.5 Un premier test

Un essai numérique préliminaire a été effectué sur un milieu log-normal tri-dimensionnel (figure 5.8 a). La perméabilité de référence, notée n, est calculée en résolvant numériquement l'équation de la diffusivité, à l'aide du logiciel aux éléments finis TRIMULEC. Les figures 5.8 (b), (c) et (d) montrent le rapport entre les perméabilités estimées par trois techniques et le résultat numérique. Les trois techniques testées sont le résultat analytique (équation 5.5), la méthode de Kruel-Romeu, notée k_r et la nouvelle technique, dénommée renormalisation simplifiée et notée c.

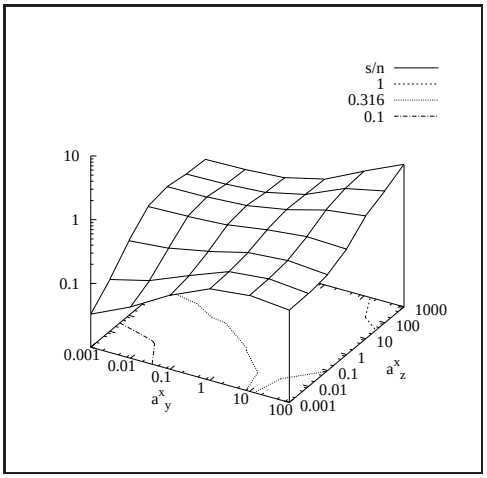
On constate que, conformément à la conjecture de Kruel-Romeu, l'utilisation des bornes de Cardwell et Parsons à la place de μ_a et μ_h améliore sensiblement le résultat.

La comparaison de la renormalisation simplifiée et de la formule de Kruel-Romeu montre que les deux méthodes sont très satisfaisantes. On constate, toutefois, que l'erreur semble être plus importante avec k_r pour les zones où les rapports d'anisotropie sont inférieurs à 1 (écoulement perpendiculaire aux strates créées par les mailles aplaties, voir figure 5.4). En revanche, dans la zone où les deux rapports d'anisotropie sont grands, c semble moins précis.

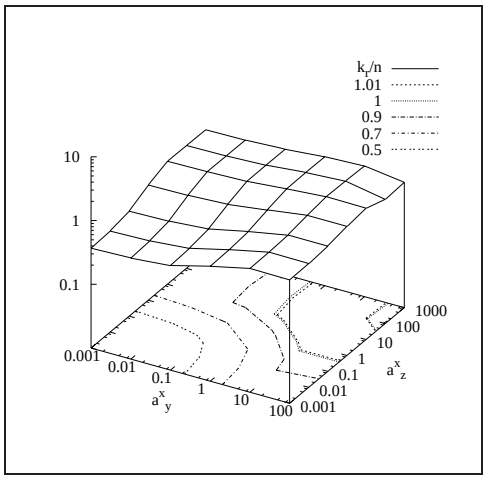
On notera que, par rapport à la figure 5.14 de Kruel-Romeu (1994) (reproduite figure 5.9), la figure



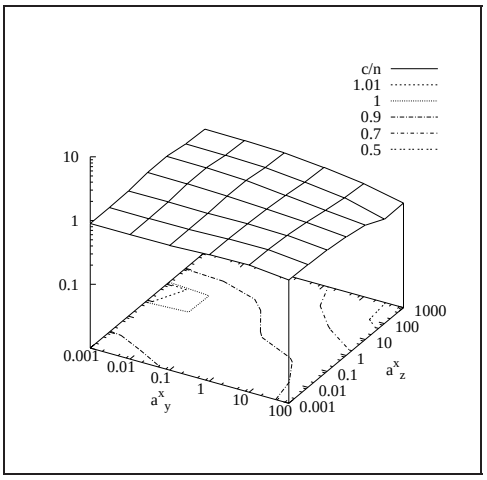
(a) Milieu test



(b) $s = (\mu_a)^{\alpha}(\mu_h)^{1-\alpha}$



(c) Méthode de Kruel-Romeu



(d) Renormalisation simplifiée

FIG. 5.8 : *Évolution des rapports perméabilité estimée par une méthode rapide (s, k_r ou c) sur perméabilité calculée par la méthode numérique (n), en fonction des rapports d'anisotropie. Milieu log-normal,* $8 \times 8 \times 8$, $\mu_{\ln k} = 0$, $\sigma^2_{\ln k} = 4$.

5.8 (c) montre des erreurs plus grandes. Il ne faut pas s'en étonner car le développement analytique sur lequel est basée la formule est réalisé pour un schéma différence finie. La comparaison présentée par Kruel-Romeu (1994) est effectuée en prenant comme perméabilité de référence une perméabilité calculée par différence finie, alors que nous avons calculé la perméabilité de référence avec une méthode de type éléments finis. Cela pose le problème de la signification de la perméabilité de référence et des erreurs liées à l'emploi des méthodes numériques. Ce problème est abordé dans le chapitre suivant.

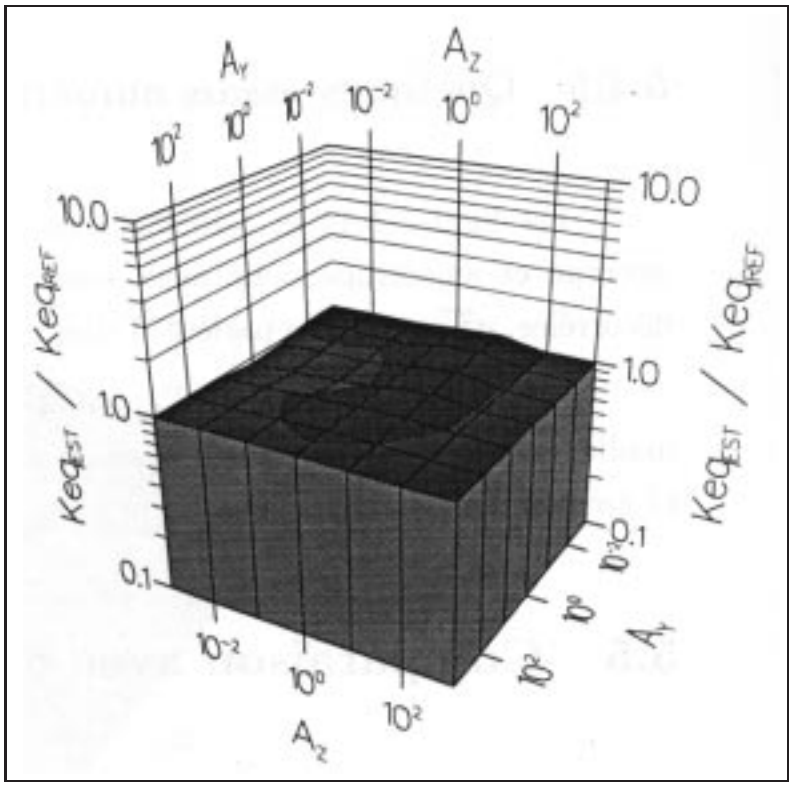


FIG. 5.9 : *Résultat de la méthode de Kruel-Romeu, Milieu log-normal,* $6 \times 6 \times 6$, $\sigma^2_{\ln k} = 4$, *d'après Kruel-Romeu 1994, figure 5.14, p.130.*

5.4 Conclusion

⇝ Une nouvelle formule, de type heuristique est proposée (équation 5.6). Elle se base sur un calcul itératif de deux valeurs extrêmes (Le Loc'h 1987) et un développement analytique approché pour les milieux log-normaux de faible variance (Kruel-Romeu 1994) que nous avons adapté en employant les valeurs limites calculées précédemment.

Plusieurs améliorations ont été envisagées mais n'ont pas été retenues pour l'instant, car elles augmenteraient les temps de calcul :

1. le calcul itératif des valeurs intermédiaires, homologues à K_3 et K_4, et l'application directe de la formule de Kruel-Romeu (1994).
2. le calcul itératif avec des perméabilités locales tensorielles ne semble pas poser de problème, mais il resterait alors à établir la formule permettant de composer correctement les termes non-diagonaux.

Chapitre 6

Calcul de la perméabilité de référence Étude du biais

Pour évaluer la fiabilité de techniques rapides, une approche consiste à comparer leurs résultats à la perméabilité de référence. La présentation de la méthode de calcul de la perméabilité de référence fait l'objet du présent chapitre. Son utilisation pour comparer les techniques rapides fait l'objet du chapitre 7.

La terminologie de perméabilité de référence *a été introduite pour indiquer qu'il ne s'agit pas d'une* perméabilité vraie *ou exacte. En effet, pour un milieu hétérogène quelconque, il n'existe pas de solution analytique permettant le calcul de la perméabilité équivalente* vraie. *Il est donc nécessaire d'utiliser des techniques numériques. Or, les méthodes numériques donnent un résultat approché. L'écart entre la perméabilité* vraie *du milieu et la perméabilité* de référence *calculée par la méthode numérique peut être important et risque de fausser les résultats de la comparaison. Ce problème, souligné par Le Loc'h (1987), puis clairement mis en évidence par Lachassagne (1989), a été étudié en détail sur des milieux dont la perméabilité théorique exacte est connue (milieux log-normaux et damiers bidimensionnels) (Kruel-Romeu 1994). Des solutions pour minimiser le biais ont été proposées dans le cas où la méthode numérique employée est du type résolution de l'équation de la diffusivité par une technique aux différences finies (Kruel-Romeu and Nœtinger 1995; Roth et al. 1997).*

Dans ce chapitre, après avoir présenté comment nous calculons la perméabilité de référence (§ 6.1 et 6.2), nous évaluons l'importance du biais avec la méthode des éléments finis et des différences finies sur un damier bidimensionnel (§ 6.3) et sur des milieux naturels (§ 6.4 et 6.5). Cela nous amène à discuter l'idée selon laquelle il est nécessaire de surdiscrétiser le maillage pour améliorer la précision de l'estimation de la perméabilité.

6.1 Technique de calcul de la perméabilité de référence

L'objectif de ce chapitre étant d'étudier le problème du biais, nous utilisons pour calculer la perméabilité de référence une technique qui suppose que l'on soit dans les axes principaux d'anisotropie du milieu. La technique consiste à résoudre l'équation de la diffusivité sous des conditions aux limites de type perméamètre à l'aide d'une méthode numérique. Ce calcul permet d'obtenir le flux total traversant le milieu (Q). On suppose alors que la loi de Darcy est valide à l'échelle mégascopique et connaissant le gradient de charge imposé par les conditions aux limites, on détermine la perméabilité équivalente par l'équation suivante :

$$K_b = \frac{Q}{\Delta H}\frac{L}{S} \tag{6.1}$$

avec ΔH = la différence de charge hydraulique, L = la distance entre les deux faces et S la surface perpendiculaire à l'écoulement.

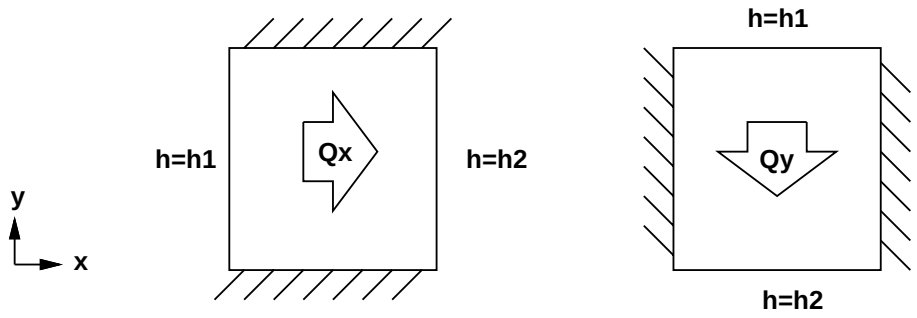


FIG. 6.1 : *Exemple en deux dimensions des conditions aux limites utilisées pour déterminer* K_b^{xx} *et* K_b^{yy}.

En utilisant cette approche, on détermine en trois dimensions la perméabilité dans chacune des directions principales (K_b^{xx}, K_b^{yy} et K_b^{zz}) en tournant les conditions aux limites et en appliquant pour chacune la méthode décrite ci-dessus (figure 6.1).

6.2 Logiciels utilisés

Pour évaluer l'effet de la méthode numérique sur le biais, nous avons utilisé : les éléments finis et les différences finies[1]. Cela nous a conduit à utiliser trois logiciels. Parmi ceux-ci, deux sont particulièrement adaptés à la résolution de problèmes contenant un grand nombre d'inconnues : *HIGHDEN* et *TRIMULEC*[2]. Le troisième est un programme de modélisation hydrogéologique aux différences finies : *NEWSAM*.

Nous présentons succinctement ci-dessous ces trois logiciels. Celui qui a été le plus intensément utilisé est *TRIMULEC*, il fait l'objet d'une description plus complète dans l'annexe E.

[1] Une présentation de ces techniques sort du cadre de cette thèse, nous renvoyons donc le lecteur aux ouvrages de Wang and Anderson (1982), Huyakorn and Pinder (1983) ou Marsily (1986) pour une présentation de ces méthodes dans un contexte hydrogéologique et à Dhatt and Touzot (1984) pour un exposé complet sur la méthode des éléments finis.

[2] Ils permettent la résolution d'un problème contenant un million de mailles en moins d'une heure sur une station de travail de type Sparc 10 (la vitesse de convergence dépend du problème).

6.2.1 *HIGHDEN*

Les calculs effectués avec *HIGHDEN* ont été réalisé par David J. K. Griffin à l'Université de Newcastle (Water Resource System Research Unit) où le logiciel est développé. *HIGHDEN* utilise un formalisme aux différences finies avec un schéma centré. Les perméabilités de passage entre les blocs sont calculées par la moyenne géométrique des perméabilités des deux blocs. Le logiciel est optimisé pour traiter des problèmes de grandes tailles. En particulier, il utilise un algorithme de gradient pré-conjugué et une attention particulière a été donnée au stockage des informations.

6.2.2 *NEWSAM*

NEWSAM a été utilisé uniquement pour l'étude du biais numérique. C'est un logiciel développé au Centre d'Informatique Géologique (Ledoux 1975; Levassor and Ledoux 1994). Il est basé sur un formalisme aux différences finies avec un schéma centré. Le calcul de la perméabilité de passage utilise la moyenne harmonique, mais il est possible d'utiliser d'autres moyennes si l'utilisateur le désire.

6.2.3 *TRIMULEC*

Le logiciel *TRIMULEC* est développé au Centre d'Informatique Géologique (Goblet 1990; Goblet 1992). C'est un programme aux éléments finis qui permet la simulation numérique des écoulements dans des maillages réguliers avec des mailles parallélépipédique. Il utilise une technique de résolution multi-grille qui le rend particulièrement bien adapté au traitement des grilles contenant un grand nombre de mailles.

6.3 Étude du biais pour un damier 2D

Les calculs effectués sur le damier permettent de mettre en évidence le biais des méthodes numériques.

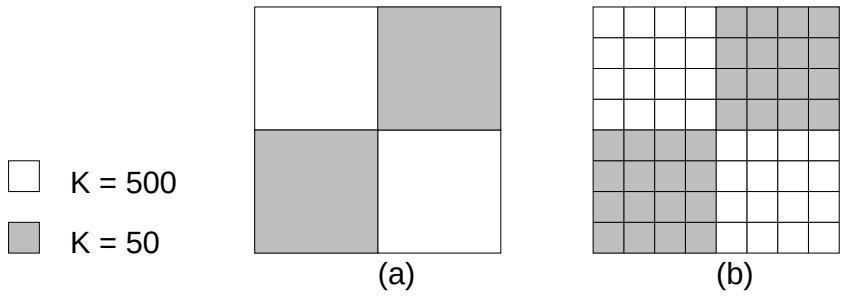


FIG. 6.2 : *Exemple de raffinement dans le cas du damier : (a) grille initiale ; (b) grille après quatre raffinement successifs.*

La perméabilité d'un damier 2D (figure 6.2 a) est calculée par éléments finis et différences finies. Si l'on étudie l'évolution de la perméabilité en fonction du raffinement de la grille (figure 6.2 b et 6.3), on observe que la différence entre le résultat par éléments finis et différences finies décroît avec le niveau de raffinement.

Pour un damier infini 2D, la perméabilité effective est la moyenne géométrique des perméabilités locales (Matheron 1967). Dans notre cas, la perméabilité théorique est inconnue parce que le milieu est de taille finie, mais nous pensons qu'elle doit être proche de la moyenne géométrique.

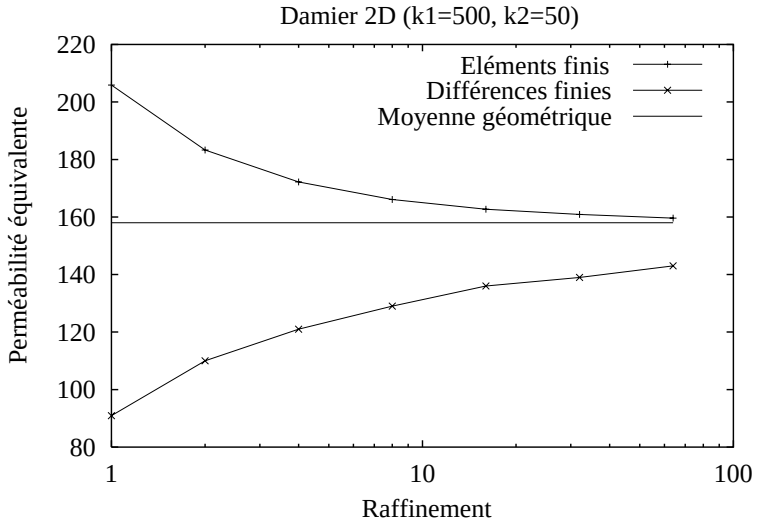


FIG. 6.3 : *Évolution de la perméabilité équivalente calculée par éléments finis avec* TRIMULEC *et différences finies avec utilisation de la moyenne harmonique (d'après Kruel-Romeu, 1994) en fonction du niveau de raffinement.*

On observe, comme Lachassagne (1989) pour les milieux log-normaux, que la méthode des éléments finis semble surestimer la perméabilité équivalente alors que les différences finies, avec une transmissivité de passage calculée par une moyenne harmonique, la sous-estiment. L'écart diminue avec le niveau de raffinement du maillage.

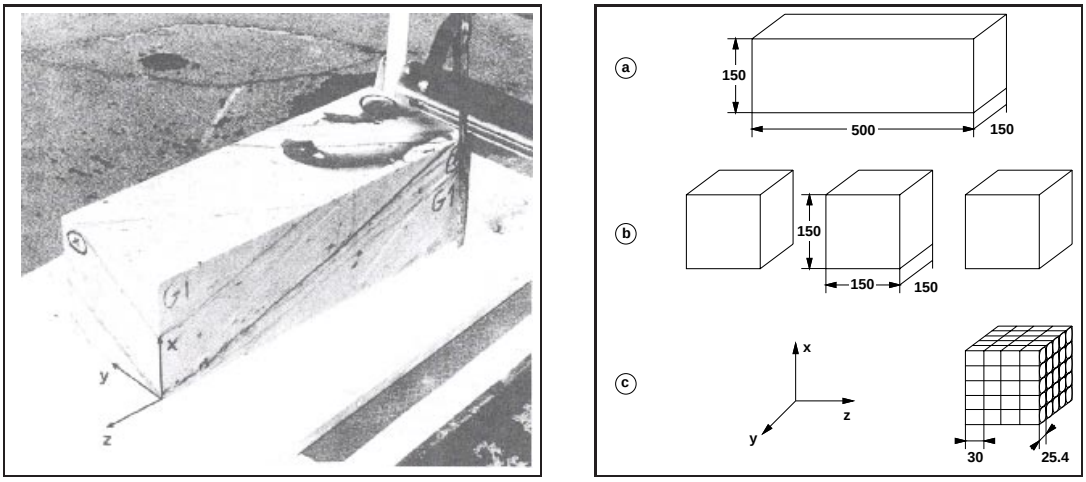
6.4 Expérience de Henriette et al.

Les tests réalisés sur les données de Henriette et al. (1989) permettent d'évaluer le biais des méthodes numériques pour un exemple de milieu réel.

Cette expérience a été mené à l'IFP par Henriette et al. (1989). Deux échantillons, l'un de grès (figure 6.4 a), l'autre de calcaire, sont utilisés. Chaque échantillon a une taille de 50cm × 50cm × 15cm. La direction la plus longue correspond à l'axe dit des z. L'expérience comprend trois étapes (figure 6.4 b). Tout d'abord, la perméabilité de l'échantillon est mesurée suivant l'axe z. L'échantillon est ensuite coupé en trois blocs et la perméabilité selon z des trois blocs est mesurée. Enfin, chaque blocs est divisé en cent échantillons cylindriques (plugs) et leur perméabilité suivant z est mesurée. Les perméabilités mesurés sur les plugs montrent une variabilité importante.

En utilisant les perméabilités mesurées sur les plugs pour reconstituer l'échantillon complet, nous avons calculé les perméabilités équivalentes à grande échelle des deux échantillons. Ces perméabilités sont données dans le tableau 6.1 en fonction du niveau de raffinement du maillage. Les résultats sont corrects, les ordres de grandeur des perméabilités équivalentes sont respectés. L'effet du raffinement est toujours le même : pour les éléments finis la perméabilité calculée décroît avec le raffinement, pour les différences finies elle augmente avec le raffinement, et $K_{df} < K_{ef}$.

En général, ce comportement permet une meilleure estimation de la perméabilité équivalente lorsque le maillage est raffiné, mais ce n'est pas le cas pour l'échantillon de grès avec le calcul en éléments finis. De plus, dans ce cas la valeur de référence n'est pas comprise entre le résultat en éléments finis et en différences finies, contrairement à l'échantillon de calcaire et aux observations de Lachassagne, Ledoux, and Marsily (1990) ou de la section précédente. Revenons à la procédure



(a) L'échantillon de grès

(b) Procédure expérimentale

FIG. 6.4 : *Expérience de Henriette et al. (1989) : (a) Un des échantillons utilisés ; (b) Procédure expérimentale : ⓐ échantillon initial ; ⓑ division en trois blocs ; ⓒ division de chaque bloc en 100 "plugs".*

expérimentale. Quand les plugs sont extraits de l'échantillon, il y a perte de matière[3] et pour l'échantillon de grès, de nombreux plugs (13) ont été détruit. En revanche pour l'échantillon de calcaire, il n'y a pas eu d'échantillon détruit. Ainsi, l'incertitude due au plugs détruits pour l'échantillon de grès est l'explication la plus vraisemblable du comportement "anormal" observé.

Niveau de raffinement		0	1	2
Calcaire	K_{ef}	36.4	35.5	35.2
$K_{ref} \simeq 35$	K_{df}	25.2	27.4	29.4
Grès	K_{ef}	189.4	188.9	188.7
$K_{ref} \simeq 210$	K_{df}	180.6	182.6	184.5

TAB. 6.1 : *Comparaison entre les perméabilités mesurées et calculées par éléments finis avec* TRIMULEC *(K_{ef}) ou par différence finies avec* NEWSAM *en utilisant une moyenne de passage de type harmonique (K_{df}), pour différents niveaux de raffinements.*

Cette expérience nous amène à remarquer que, à toutes les échelles observées, les échantillons présentent une variabilité importante des valeurs de perméabilité. On peut imaginer que si l'on continuait à découper les plugs et s'il était possible d'effectuer des mesures à cette échelle, alors on observerait encore des variations de perméabilité. Cela signifie que les perméabilités des plugs sont déjà des perméabilités *équivalentes*.

Lorsque l'on surdiscrétise le maillage constitué par les perméabilités de plugs, on améliore la solution numérique uniquement par rapport à ce que devrait être la solution sur un milieu constitué de la juxtaposition de bloc de perméabilités homogènes. Se rapproche-t-on de la solution pour le milieu réel ou s'en éloigne-t-on ?

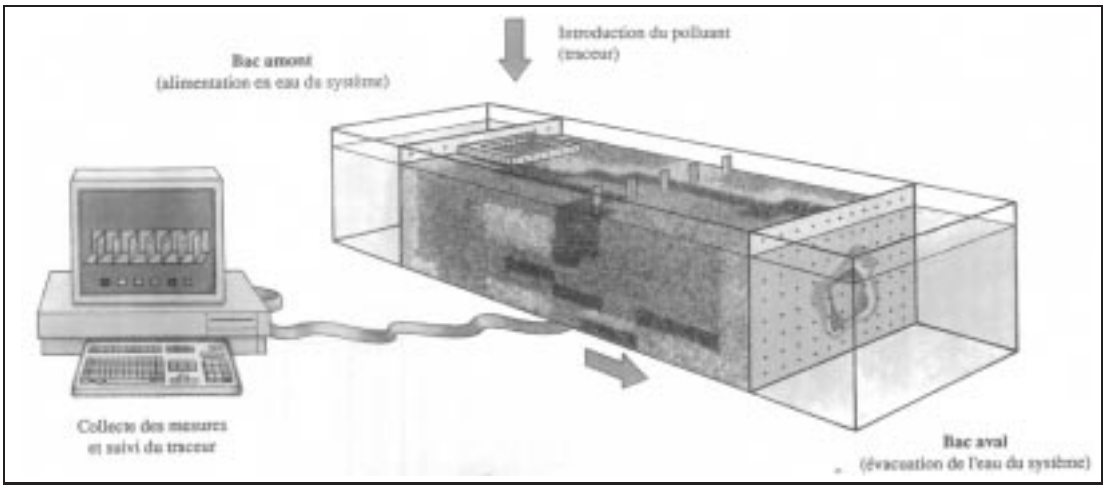


FIG. 6.5 : *Marceau : le dispositif expérimental (d'après Ruch, 1992)*

6.5 Marceau

6.5.1 Le dispositif expérimental

"Marceau" est un dispositif qui permet l'étude en laboratoire d'un milieu poreux hétérogène. Sa mise au point a été réalisée à l'Institut de Mécanique des Fluides de Strasbourg (Ruch 1992). Le dispositif consiste en une cuve de $5{,}6 \times 1 \times 0.95$ m^3 remplie de trois sables de porosité et de perméabilité différentes (tableau 6.2). La disposition des sables dans la cuve n'est pas aléatoire, les zones de forte perméabilité sont structurées et forment plus ou moins un chenal reliant les faces d'entrée et de sortie du milieu selon un plan préétabli (figure 6.6). Le remplissage de la cuve est effectué couche par couche. Pour chaque couche une grille en PVC permet de réaliser des blocs de dimension $0.4 \times 0.1 \times 0.1$ m^3 qui sont remplis suivant le plan préétabli. Le résultat obtenu est un milieu hétérogène tridimensionnel dont les propriétés locales sont connues.

Ce dispositif est ensuite utilisé pour étudier le transport d'un traceur. Les résultats de laboratoire servent de référence pour des modèles numériques de transport. (Ruch 1992; Semra 1994). Nous ne nous intéresserons ici qu'au problème de l'écoulement.

	Sable 1	Sable 2	Sable 3
perméabilité moyenne (cm/min)	75	60	5.4
variation maximale (cm/min)	6	5	0.75

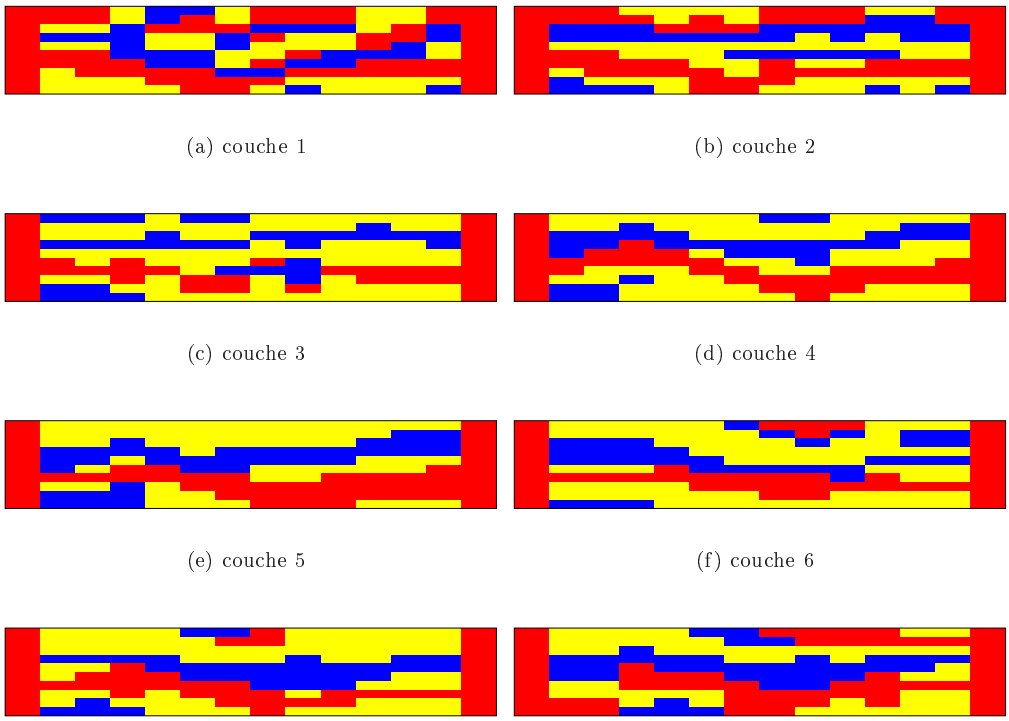
TAB. 6.2 : *Perméabilités des trois sables utilisés (d'après Semra, 1994).*

6.5.2 Mesure de la perméabilité à grande échelle

Données

Les données dont nous disposions pour déterminer la perméabilité à grande échelle de Marceau nous ont été fournit par P. Ackerer (Octobre 1994). Il s'agit des résultats d'une série d'expériences

[3] Henriette et al. (1989) évaluent la perte totale à environ 20 % de l'échantillon initial.



(a) couche 1 (b) couche 2

(c) couche 3 (d) couche 4

(e) couche 5 (f) couche 6

(g) couche 7 (h) couche 8

(i) légende

FIG. 6.6 : *Structure de Marceau (d'après Semra, 1994)*

donnant le débit Q traversant le dispositif pour plusieurs différences de charge ΔH imposées (voir tableau 6.3).

ΔH (cm)	1.04	2.44	5.44	9.64	11.54
Q (l/min)	0.85	1.8	3.69	6.64	7.78

TAB. 6.3 : *Mesures de perméabilité à grande échelle : données brutes fournit par Ackerer (1994)*

Pour évaluer l'incertitude sur la perméabilité globale, nous avons calculé les erreurs de mesures sur la vitesse de Darcy U et sur le gradient de charge J.

Incertitude sur U

Le débit Q est donné par la variation de niveau d'eau dans un bac situé à la sortie de Marceau, que multiplie la section S du bac et que divise l'intervalle de temps correspondant à la mesure.

$$Q = \frac{H_2 - H_1}{t_2 - t_1} S$$

L'incertitude sur Q a été évaluée par Ruch (p. 45, 1992). Nous reprenons ici son résultat :

$$\frac{\Delta Q}{Q} \leq \frac{2\Delta H}{H} + \frac{\Delta t}{t} + \frac{\Delta S}{S} \leq \left[\frac{1}{30} + \frac{2}{90} + \frac{2}{360}\right] \tag{6.2}$$

La vitesse de Darcy U étant égale au débit Q divisé par la section $A = L_1 \cdot L_2$ du milieu poreux traversé, on a :

$$U = \frac{Q}{A} \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta U}{U} = \frac{\Delta Q}{Q} + \frac{\Delta A}{A} = \frac{\Delta Q}{Q} + \frac{\Delta L_1}{L_1} + \frac{\Delta L_2}{L_2} \tag{6.3}$$

Finalement, en reprenant les valeurs fournit par Ruch, l'erreur absolue sur U est donnée par :

$$\Delta U \leq U \cdot \left(\frac{\Delta Q}{Q} + \frac{\Delta L_1}{L_1} + \frac{\Delta L_2}{L_2}\right) \tag{6.4}$$

$$\Delta U \leq U \left[\frac{1}{30} + \frac{2}{90} + \frac{2}{360} + \frac{1}{1000} + \frac{1}{800}\right] \leq 0.064 \cdot U \tag{6.5}$$

Incertitude sur J

H_2 et H_1 représentent les charges hydrauliques mesurées en entrée et sortie de Marceau et L la longueur de la cuve.

$$J = \frac{H_2 - H_1}{L} \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta J}{J} = \frac{\Delta (H_2 - H_1)}{H_2 - H_1} + \frac{\Delta L}{L} \tag{6.6}$$

L'erreur absolue peut s'exprimer ainsi :

$$\Delta J = \frac{2\Delta H}{L} + J \cdot \frac{\Delta L}{L} = \frac{2}{5600} + J \cdot \frac{1}{5600} \leq 3.56 \cdot 10^{-4} + 1.8 \cdot 10^{-4} J \tag{6.7}$$

J	U (cm/min)	ΔJ	ΔU (cm/min)
$1.86{\cdot}10^{-3}$	$1.06{\cdot}10^{-1}$	$3.56{\cdot}10^{-4}$	$6.80{\cdot}10^{-3}$
$4.36{\cdot}10^{-3}$	$2.25{\cdot}10^{-1}$	$3.57{\cdot}10^{-4}$	$1.44{\cdot}10^{-2}$
$9.71{\cdot}10^{-3}$	$4.61{\cdot}10^{-1}$	$3.58{\cdot}10^{-4}$	$2.95{\cdot}10^{-2}$
$1.72{\cdot}10^{-2}$	$8.30{\cdot}10^{-1}$	$3.59{\cdot}10^{-4}$	$5.31{\cdot}10^{-2}$
$2.06{\cdot}10^{-2}$	$9.73{\cdot}10^{-1}$	$3.60{\cdot}10^{-4}$	$6.22{\cdot}10^{-2}$

TAB. 6.4 : *Gradients hydrauliques (J), vitesses de Darcy (U) et incertitudes utilisés pour la détermination de la perméabilité équivalente*

Calcul de la perméabilité

La régression linéaire sur les points de mesure (tableau 6.4) en imposant à la droite de passer par l'origine donne une perméabilité de 47.7 cm/min. L'utilisation graphique (figure 6.7) des calculs d'incertitude présentés précédemment permet de plus de donner l'encadrement suivant :

$$\boxed{44.9(cm/min) \leq K_{eq} \simeq 47.7(cm/min) \leq 51.1(cm/min)} \tag{6.8}$$

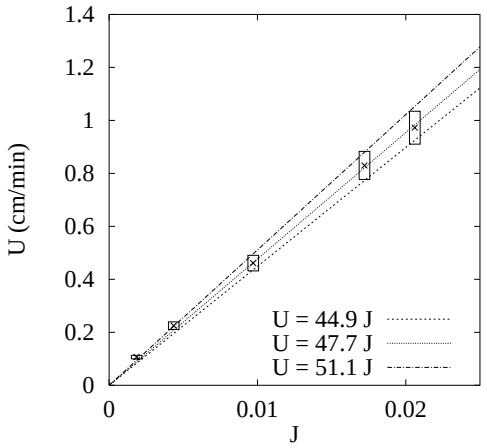


FIG. 6.7 : *Détermination de la perméabilité équivalente de Marceau, régression linéaire et fourchette d'incertitude*

6.5.3 Bornes théoriques

A titre indicatif, les bornes théoriques que sont la moyenne arithmétique et harmonique des perméabilités locales donnent une fourchette assez large :

$$18.4(cm/min) \leq K_{eq} \leq 52.9(cm/min) \tag{6.9}$$

Le calcul des bornes de Cardwell and Parsons (1945) permet de réduire cet intervalle (en particulier la valeur minimale) :

$$29.2(cm/min) \leq K_{eq} \leq 51.7(cm/min) \tag{6.10}$$

Ces calculs nous montrent les ordres de grandeur possibles pour la perméabilité équivalente. Le premier calcul (moyenne arithmétique et harmonique) ne prend pas du tout en compte la structure

du milieu, ce qui explique l'intervalle assez large. Le second calcul prend en compte la structure approximativement, cela permet de réduire l'incertitude.

6.5.4 Test "déterministe" des méthodes numériques

A partir des perméabilités locales connues, nous avons calculé la perméabilité à grande échelle avec : *TRIMULEC* et *NEWSAM*. Les calculs ont été réalisés tout d'abord avec une maille de simulateur numérique par bloc contenant un type de sable. Le maillage numérique comprend alors $14 \times 10 \times 8$ mailles. Le maillage est ensuite surdiscrétisé d'un facteur deux ($28 \times 20 \times 16$ mailles), puis d'un facteur quatre ($56 \times 40 \times 32$ mailles). Les résultats sont présentés dans le tableau 6.5.

On remarque que, bien évidemment, le résultat évolue en fonction de la surdiscrétisation, mais toutes les valeurs obtenues sont dans la fourchette d'incertitude donnée par le calcul d'erreur. Cela nous permet d'affirmer que tous ces résultats, même s'ils semblent différents, sont également corrects. Cette expérience ne permet pas de justifier l'idée qu'il faut surdiscrétiser le maillage pour obtenir une meilleure estimation de la perméabilité équivalente.

Surdiscrétisation	0	2	4
K_{ef}	50.9	50.5	50.3
K_{df}	45.0	47.9	49.4

TAB. 6.5 : *Perméabilités équivalentes de Marceau calculées par éléments finis (K_{ef}) et différences finies (K_{df}) en fonction de la surdiscrétisation du maillage.*

6.5.5 Test "stochastique"

Pour évaluer l'impact de l'incertitude concernant les perméabilités locales sur la perméabilité à grande échelle, nous avons réalisé des simulations de Monte-Carlo.

Nous avons envisagé quatre hypothèses. Pour chacune, nous avons engendré des milieux aléatoires, vérifiant les hypothèses ; pour chaque milieu, une perméabilité équivalente est calculée par la méthode numérique, on arrête les tirages au lorsque la moyenne et la variance des perméabilités équivalentes calculées sont stables (figure 6.8). On obtient ainsi, pour chaque hypothèse, une loi de probabilité de la perméabilité à grande échelle.

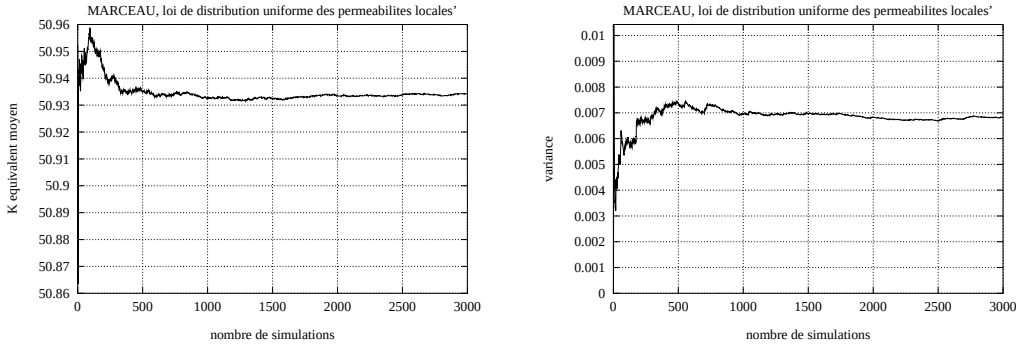
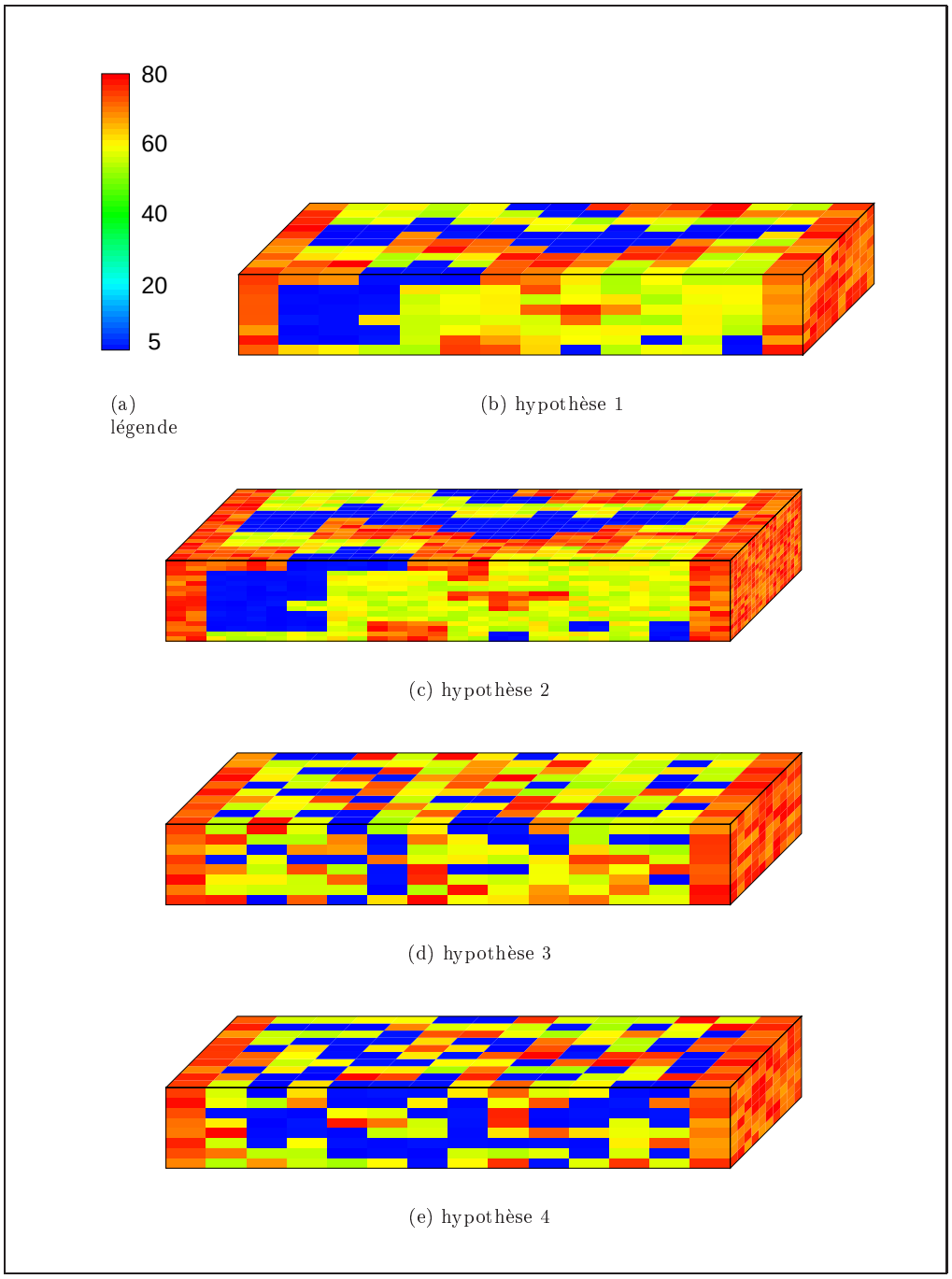


FIG. 6.8 : *Évolution de la moyenne et de la variance en fonction du nombre de simulations (hypothèse 1). Ces graphes montrent que l'on aurait put arrêter les calculs au bout de 1000 à 1500 simulations.*



(a) légende

(b) hypothèse 1

(c) hypothèse 2

(d) hypothèse 3

(e) hypothèse 4

FIG. 6.9 : *Exemples de milieux aléatoires représentant Marceau.*

Les hypothèses envisagées sont les suivantes.

1. *Hypothèse 1* La répartition des sables, suivant la carte présentée dans la figure 6.6, est respectée. Le maillage numérique est identique au maillage physique ($14 \times 10 \times 8$ mailles).
   On suppose que la loi de probabilité des perméabilités locales est *uniforme* dans les intervalles données dans le tableau 6.2.
   On tire une valeur au hasard[4], indépendamment et maille par maille dans les intervalles

[4] Pour cela, nous avons utilisé la fonction ran2 (algorithme de L'Ecuyer) tel qu'il est programmé dans l'ouvrage

correspondants au type de sable pour la maille considérée (voir figure 6.9 (b)).

2. *Hypothèse 2* Comme dans l'hypothèse 1, la répartition des sables est respectée, mais le maillage numérique est surdiscrétisé par rapport au maillage physique ($28 \times 20 \times 16$ mailles). On suppose, à nouveau, que la loi de probabilité des perméabilités locales est *uniforme* et on associe à chaque maille (numérique) une valeur de perméabilité tirée dans l'intervalle adéquat (voir figure 6.9 (c)).
3. *Hypothèse 3* On ne respecte pas la répartition spatiale, seule la proportion globale des différents sables est conservée (voir figure 6.9 (d)). Le maillage numérique est de $14 \times 10 \times 8$ mailles.

   Le procédé utilisé est le suivant : on engendre des valeurs aléatoires indépendantes dans chaque maille suivant une loi uniforme. Pour déterminer à quel type de sable appartient la maille, on fixe deux valeurs de coupures. Cela définit trois intervalles ; par exemple, si la valeur tirée au sort est inférieure à la première coupure, alors le sable est de type 1. Une foi le type de sable déterminé, la perméabilité est tirée dans l'intervalle correspondant. On notera que les valeurs de coupures sont déterminées pour chaque nouveau milieu engendré, afin que les proportions des trois sables dans le milieu soit respectées.
4. *Hypothèse 4* On ne respecte ni la structure spatiale, ni la proportion relative des trois sables. On fait ainsi varier la proportion de milieu peu perméable de 27% à 40% (voir figure 6.9 (e)). Le maillage numérique est de $14 \times 10 \times 8$ mailles. La procédure employée pour engendrer les milieux est identique à celle présentée dans l'hypothèse 3.

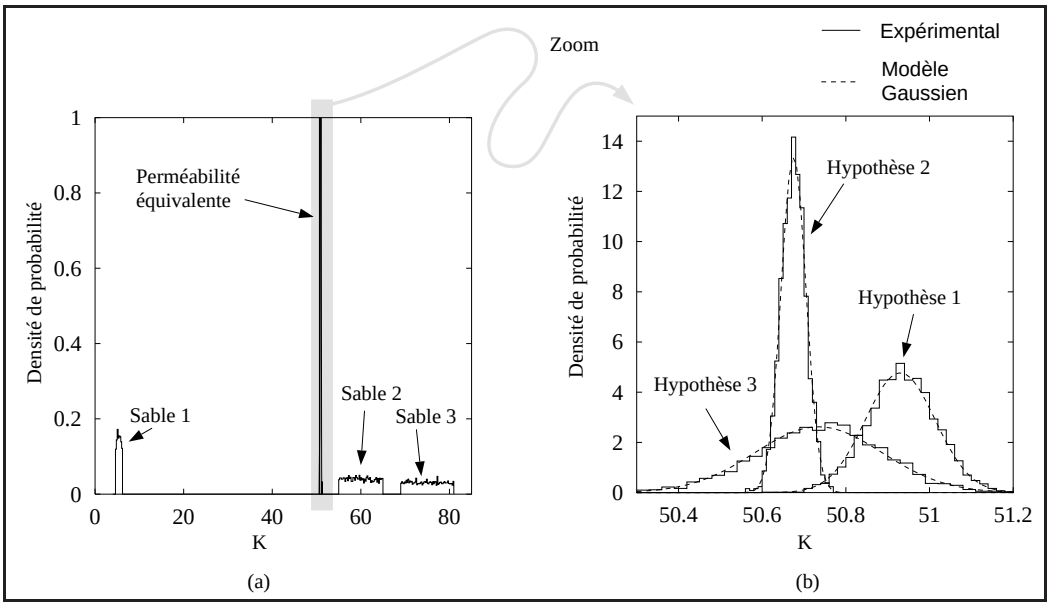


FIG. 6.10 : *(a) Fonction densité de probabilité de type uniforme pour les perméabilités locales, et (a) et (b) densité de probabilité pour la perméabilité équivalente obtenue par méthode de type Monte-Carlo pour les hypothèses 1, 2 et 3.*

Le principal résultat de cette expérience numérique est que l'effet de l'incertitude sur la connaissance des perméabilités locales est extrêmement faible : les variances obtenues sous les trois premières hypothèses sont très petites comparées à la plage de variation des perméabilités locales (tableau 6.6 et figure 6.10 (a)).

Les résultats concernant la troisième hypothèse montrent que la structure de Marceau n'est pas le facteur prépondérant déterminant la perméabilité équivalente, puisque même si l'on détruit la structure, on garde le même ordre de grandeur de la perméabilité équivalente.

de Press et al. (1992).

Hypothèse	Nombre simulations	Espérance	Variance
1	3000	50.93	0.007
2	1278	50.67	0.0009
3	3000	50.73	0.023
4	900	42	0.04

TAB. 6.6 : *Espérance et variance de la perméabilité équivalente selon les hypothèses envisagées.*

La quatrième hypothèse montre, en revanche, que si l'on modifie la proportion de milieu peu perméable alors la perméabilité à grande échelle est considérablement modifiée. Ce serait donc la proportion de milieu peu perméable par rapport au milieu plus perméable qui serait le facteur clef régissant la perméabilité à grande échelle de Marceau et non sa structure spatiale. On notera que la structure de Marceau n'est pas aléatoire, elle a été établie de façon à présenter un chenal de forte perméabilité. On peut imaginer que cette structure devient le facteur clef à partir du moment où les contrastes de perméabilité ou la proportion de milieu peu perméable sont suffisamment élevés pour que le champ de vitesse présente une dépendance forte vis-à-vis de la structure spatiale.

De plus, on observe que la distribution des perméabilités équivalentes semble suivre une répartition normale (figure 6.10 (b)) presque parfaite. Sans que l'on dispose d'une démonstration mathématique rigoureuse – qui n'est certainement pas simple – il est très probable que ce phénomène découle du théorème central limite.

6.6 Conclusion

Le problème du biais des méthodes numériques a été étudié par comparaison de leurs résultats avec un cas théorique (le damier 2D) et avec deux expériences de laboratoire sur des matériaux réels : l'une réalisée par Henriette, Jacquin, and Adler (1989) et l'autre par Ruch (1992). On notera que l'expérience de Henriette et al. avait déjà été utilisée pour servir de valeur de référence pour comparer des méthodes rapides par Nœtinger and Jacquin (1991) mais n'avait pas était utilisée pour évaluer l'effet de la surdiscrétisation lors de l'emploi des méthodes numériques.

Les observations effectuées sont concordantes avec les travaux de Lachassagne (1989), Kruel-Romeu (1994) et Roth (1995). On constate que la méthode des différences finies avec une transmissivité de passage calculée par moyenne harmonique tend à sous-estimer la perméabilité équivalente, et que la méthode des éléments finis tend à la sur-estimer. La surdiscrétisation du maillage réduit l'écart entre les valeurs estimées par les deux techniques.

Dans les cas étudiés où le contraste de perméabilité maximal est d'environ un ordre de grandeur, la précision obtenue avec les méthodes numériques est suffisante pour permettre le calcul de la perméabilité équivalente sans erreur grossière. Dans ce cas, la surdiscrétisation du maillage n'apporte pas de gain en précision justifiant le sur-coût informatique.

⇝ A partir de l'expérience de Henriette, Jacquin, and Adler (1989), nous avons souligné que les milieux naturels, que l'on décrit comme la juxtaposition de blocs de perméabilité homogène, ne sont pas constitués de tels blocs homogènes, mais plutôt de blocs ayant une perméabilité équivalente correspondant déjà à une moyenne masquant une hétérogénéité à une échelle plus fine. Cette idée a été évoquée par Kruel-Romeu and Nœtinger (1995). Il nous semble qu'elle pose un problème important. Lorsque l'on surdiscrétise le maillage numérique par rapport à la description physique du milieu, on améliore la solution numérique par rapport à ce que devrait être la solution sur un milieu constitué de la juxtaposition de blocs de perméabilités homogènes. Le milieu n'est vraisemblablement pas constitué de la sorte. Dans ces conditions, la solution obtenue sur un milieu surdiscrétisé est-elle meilleure que celle obtenue sur le milieu non surdiscrétisé? Les expériences

numériques réalisés à partir des données de laboratoire ne permettent malheureusement pas de conclure.

⇝ En conclusion de ce chapitre, il faut insister sur le fait que nous n'avons pas de solution pour estimer de façon générale le biais dû à l'emploi de méthode numérique. La seule chose que nous sommes en mesure de faire est d'insister sur l'existence de ce biais éventuel et de garder à l'esprit, lors de l'utilisation de ces valeurs que ce sont des *perméabilités de référence* et non des perméabilité *vraies* du milieu hétérogène.

Chapitre 7

Comparaison des méthodes rapides

Nous comparons, dans ce chapitre, la nouvelle méthode rapide, développée dans le chapitre 5, à la méthode de référence, présentée dans le chapitre 6, et à plusieurs méthodes rapides de la littérature qui ont été décrites dans le chapitre 3.
Deux informations nous intéressent plus particulièrement : le temps calcul de chaque méthode rapide et leur niveau de fiabilité, c'est-à-dire l'évolution de leur précision respective pour des milieux ayant des caractéristiques différentes. Pour répondre à ces objectifs, nous avons réalisé une série d'expériences numériques sur des milieux synthétiques.
La sélection des méthodes rapides testées (§ 7.1), la construction des milieux synthétiques (§ 7.2) et le calcul des perméabilités de référence (§ 7.3) sont présentés dans la première partie de ce chapitre. Nous comparons ensuite (§ 7.4) les temps de calcul des différentes techniques, ce qui nous permet de montrer que la renormalisation simplifiée est au moins deux cent fois plus rapide que la résolution numérique de l'équation de la diffusivité. Puis, après avoir défini les critères permettant d'évaluer la précision de chaque méthode (§ 7.5), les résultats de la comparaison (§ 7.6) montrent que, parmi toutes les techniques testées, la renormalisation simplifiée et la renormalisation tensorielle sont les deux techniques les plus fiables.

7.1 Sélection des méthodes rapides

Nous avons centré notre comparaison sur des méthodes déterministes et heuristiques. Parmi toutes les méthodes rapides présentées dans le chapitre 3, nous avons sélectionné les méthodes les plus communes et les plus générales. Ainsi, nous n'avons pas utilisé les méthodes dites d'approximation (techniques des tubes de courant, théorie des milieux effectifs, méthode des perturbations et théorie de la percolation) car leurs domaines d'application sont très limités (voir section 3.8.5, page 57). Le tableau 7.1 donne la liste des techniques sélectionnées.

Nom de la méthode	Symbole
Moyenne arithmétique	μ_a
Moyenne géométrique	μ_g
Moyenne harmonique	μ_h
Moyenne de puissance 1/2	$\mu_{1/2}$
Moyenne de puissance 1/3	$\mu_{1/3}$
Borne maximum de Cardwell et Parsons	k_1
Borne minimum de Cardwell et Parsons	k_2
Valeur intermédiaire de Cardwell et Parsons	k_3
Valeur intermédiaire de Cardwell et Parsons	k_4
Formule de Kruel-Romeu	k_r
Renormalisation simplifiée, borne supérieure	c_{max}
Renormalisation simplifiée, borne inférieure	c_{min}
Renormalisation simplifiée, moyenne géométrique	c_{geo}
Renormalisation simplifiée, nouvelle formule	c
Renormalisation standard	r_s
Renormalisation tensorielle	r_t

TAB. 7.1 : *Liste des méthodes rapides étudiées*

Tous les estimateurs : μ_a, μ_g, μ_h, $\mu_{1/2}$, $\mu_{1/3}$ sont appelés *estimateurs algébriques*. Les valeurs k_1, k_2, k_3, k_4, c_{max} et c_{min} sont des *valeurs intermédiaires* car elles interviennent dans des formules pour déterminer la perméabilité équivalente mais ne sont pas utilisées pour l'estimer directement. Les estimateurs réellement testés sont donc : les moyennes algébriques, la formule de Kruel-Romeu k_r, les renormalisations standard r_s, tensorielle r_t et simplifiée c.

7.2 Champs de perméabilité synthétiques

Certes nous disposons de quelques milieux pour lesquels il existe une perméabilité équivalente théorique obtenue par des méthodes analytiques (le milieu log-normal isotrope 2D, le milieu dont les perméabilités sont factorisées, etc.) et nous disposons également des résultats expérimentaux présentés dans le chapitre précédent (l'expérience de Henriette et al. et Marceau), mais la comparaison de la perméabilité estimée par la technique x ou y sur quatre ou cinq cas tests ne suffit pas pour évaluer la fiabilité de x ou y. Un tel test n'a pas de signification statistique. Il est nécessaire de procéder à un grand nombre d'expériences. Nous avons donc opté pour l'utilisation de champs de perméabilité synthétiques engendrés par des techniques utilisées fréquemment pour la caractérisation des réservoirs. La simulation de ces milieux a été intégralement réalisée par Gaëlle Le Loc'h au Centre de Géostatistique de l'École des Mines.

Chaque milieu simulé est issu d'un modèle statistique et d'un ensemble de paramètres. Pour que le test permette d'évaluer la fiabilité des méthodes de changement d'échelle, il est nécessaire d'utiliser plusieurs modèles statistiques et pour chaque modèle il est nécessaire d'utiliser plusieurs ensembles

de paramètres. De plus, pour un modèle et un ensemble de paramètres donnés, la variabilité des milieux engendrés peut être importante. Il est donc nécessaire de disposer de plusieurs réalisations de milieux ayant les mêmes paramètres et le même modèle statistique.

7.2.1 Choix de la discrétisation

Avant de réaliser les simulations des champs de perméabilité, il faut définir la grille sur laquelle seront effectuées les simulations. Ce choix a été guidé par plusieurs contraintes :
- Pour que le choix soit cohérent avec les problèmes rencontrés dans la pratique, nous avons utilisé des mailles aplaties ;
- Pour pouvoir tester un large éventail de paramètres (notamment des longueurs de corrélation variables), il est nécessaire de disposer d'une grille suffisamment grande ;
- Pour pouvoir résoudre l'équation de la diffusivité sur une station de travail et en un temps raisonnable, le nombre maximum de mailles de la grille doit être de l'ordre du million.
- Pour que le logiciel *TRIMULEC* (qui utilise une méthode numérique de type multigrille) atteigne son efficacité maximum, le nombre de mailles doit être une puissance de deux.

Toutes ces contraintes nous ont amenés à choisir une grille contenant 64 couches de 128 par 128 mailles, la taille des mailles étant fixée à 1 m dans la direction verticale et 10 m dans les deux directions horizontales. La grille complète contient 1 048 576 mailles.

Pour tester la sensibilité des résultats au rapport de la longueur de corrélation sur la taille du maillage et à l'effet de la discrétisation, nous avons également utilisé des petits blocs de 8 couches de 16 par 16 mailles (= 2 048 mailles) extraits des grands blocs.

On notera que ces valeurs ne sont pas importantes en tant que valeur absolues. On peut les adimensionner et les grandeurs ayant un intérêt sont, par exemple, les rapports d'anisotropie des mailles, ou les rapports longueur de corrélation sur taille du domaine dans chaque direction, ou encore le nombre de mailles par longueur de corrélation pour étudier l'effet de la discrétisation.

7.2.2 Choix de la méthode de simulation

Bien évidemment, l'éventail des modèles et des paramètres possibles est infini. Pour disposer de suffisamment de réalisations de milieux pour chaque modèle et pour chaque jeu de paramètres, nous avons restreint notre choix à seulement deux types de modèles couramment utilisés : les Gaussiennes Seuillées et le modèle Booléen.

La méthode des Gaussiennes Seuillées (Matheron et al. 1987; Ravenne et al. 1990; Galli et al. 1994) consiste à engendrer une fonction gaussienne, et ensuite à la transformer en une fonction discrète (le lithofaciès) par un seuillage. En pratique, nous avons utilisé le logiciel *HERESIM*[1].

La méthode des simulations Booléennes (Matheron 1967) consiste à simuler un processus de Poisson ponctuel (des germes aléatoires sont distribués dans l'espace) et à affecter à chaque point une inclusion dont la forme suit une loi de probabilité donnée a priori.

Les deux méthodes donnent des images fort différentes et nous avons fait l'hypothèse que ces deux modèles sont suffisants pour évaluer la fiabilité des méthodes de changement d'échelle.

On notera que ces deux techniques donnent une description des milieux en terme de lithofaciès et non en terme de perméabilité variant continuement dans l'espace et que les simulations sont non conditionnelles.

[1] Logiciel développé et commercialisé par l'Institut Français du Pétrole et le Centre de Géostatistique de l'École des Mines de Paris

7.2.3 Description des simulations par Gaussiennes Seuillées

Pour des simulations non conditionnelles, les paramètres sont :
– l'ordre des lithofaciès (constant dans le domaine) et les proportions de chaque lithofaciès, qui peuvent être différentes dans chaque maille pour les cas non stationnaires ;
– la covariance de la fonction aléatoire gaussienne.
Dans notre cas, les proportions dans les mailles sont fixées par des courbes de proportions qui varient suivant la profondeur mais restent identiques sur tout le domaine dans les directions horizontales.

Quant à la fonction de covariance, c'est toujours un modèle exponentiel factorisé, dont les axes principaux d'anisotropie sont les axes x, y et z. Ainsi, elle est parfaitement déterminée par la connaissance des portées du modèle gaussien dans chaque direction principale d'anisotropie. Cette anisotropie crée une stratification plus ou moins nette dans le milieu et influence la perméabilité à grande échelle.

Covariance

	x et y	z
a1	80m (8 mailles)	5m (5 mailles)
a2	500m (50 mailles)	5m (5 mailles)
a3	500m (50 mailles)	15m (15 mailles)

TAB. 7.2 : *Valeurs des portées utilisées dans les trois jeux de covariance.*

Trois jeux de paramètres de covariance ont été utilisés. Ils sont dénommés *a1, a2* et *a3* : *a1* correspond à une fonction de corrélation de courte portée dans toutes les directions, *a2* correspond à une longue portée dans la direction horizontale et une courte dans la direction verticale et *a3* correspond à des longues portées dans toutes les directions. Les valeurs des portées utilisées sont indiquées dans le tableau 7.2.

Proportion de faciès

Les simulations ont été réalisées avec quatre faciès (codés 1,2,3 et 4) et sept courbes de proportions des faciès en fonction de la profondeur, notées *p1* à *p7* et représentées sur la figure 7.1.

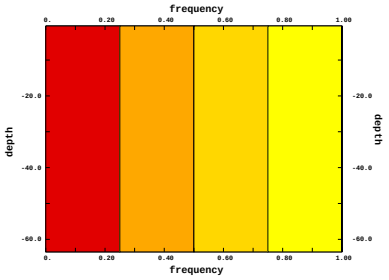
p1, p6 et *p7* sont des proportions constantes à travers tout le domaine. Pour *p1*, toutes les proportions sont identiques et ont pour valeur 0.25. Pour *p6*, les faciès 1, 2, 3 et 4 ont des proportions qui valent respectivement 0.15, 0.15, 0.15 et 0.55. Pour *p7*, ces proportions deviennent 0.55, 0.15, 0.15 et 0.15.

Pour *p3* et *p4*, les proportions varient linéairement du haut vers le bas comme on le voit sur les figures 7.1 f et 7.1 g. Pour *p4*, les proportions globales de chaque faciès sont égales à 0.25 comme dans le jeu *p1*.

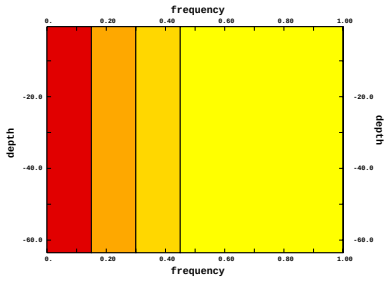
Pour *p2*, la proportion du faciès 1 est faible au sommet et à la base, mais montre deux pics : un pic large dans la partie supérieure et un pic étroit dans la partie inférieure (figure 7.1 d). *p5* montre le même type d'évolution, mais les proportions globales de chaque faciès ont été fixées à 0.25, de plus le contraste entre les proportions en fonction de la profondeur est plus faible que pour *p2*.

Combinaison des proportions et des covariances

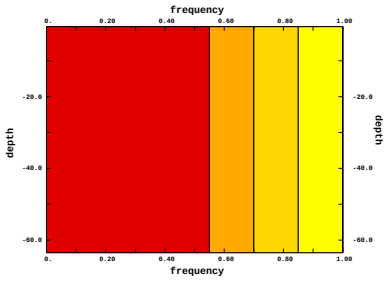
En combinant un type de fonction de covariance et une courbe de proportion des faciès on obtient un ensemble complet de paramètres. 13 combinaisons ont été utilisées, elles sont notées en associant le nom des paramètres de covariance aux paramètres de proportion. Par exemple *a1p1* indique un



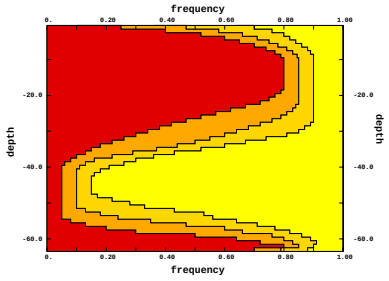
(a) p1



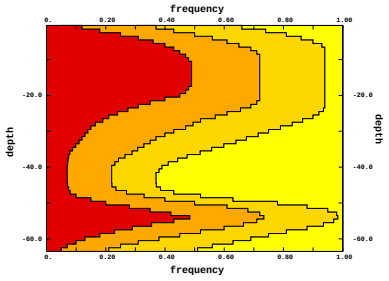
(b) p6



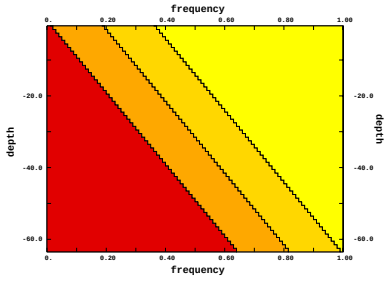
(c) p7



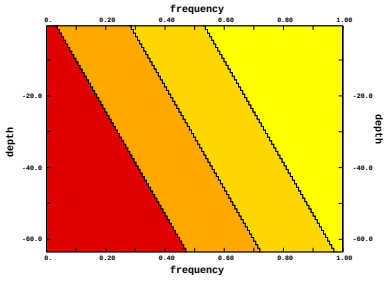
(d) p2



(e) p5



(f) p3



(g) p4

FIG. 7.1 : *Proportion des faciès en fonction de la profondeur*

jeu de paramètres dont la fonction de covariance est décrite par le jeu *a1* et les proportions correspondent au jeu *p1*. Les jeux effectivement choisis sont : *a1p1, a1p2, a1p4, a1p3, a1p5, a2p1, a2p2, a2p3, a2p4, a2p5, a3p1, a3p6* et *a3p7*.

Les simulations de faciès

Pour chaque ensemble de paramètres, trente deux simulations de faciès ont été engendrées, excepté pour l'ensemble a1p1 pour lequel il y en a eu trente six. Les simulations sont conduites sur une grille de 256 × 256 × 64 mailles qui est ensuite découpée en quatre blocs de 128 × 128 × 64 mailles. De cette façon, il est possible si nécessaire de regrouper les fichiers de façon à reconstruire le domaine entier. Chaque champ de perméabilité a été nommé de façon à pouvoir le recréer : par exemple, le champ a1p1g12345-1 signifie qu'il a été créé en utilisant le jeu de paramètres a1p1, que la grande grille a été engendrée avec un germe qui valait 12345, et que le champ est le premier quartier de la grande grille. La numérotation des quartiers suit la règle présentée dans la figure 7.2.

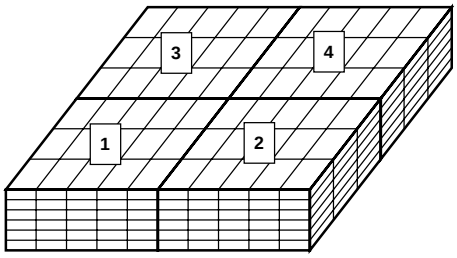


FIG. 7.2 : *Numérotation des quartiers*

Champ de perméabilité

Faciès	1	2	3	4
Perméabilité (mD)	1000	500	10	0.1

TAB. 7.3 : *Perméabilités des faciès des simulations* HERESIM

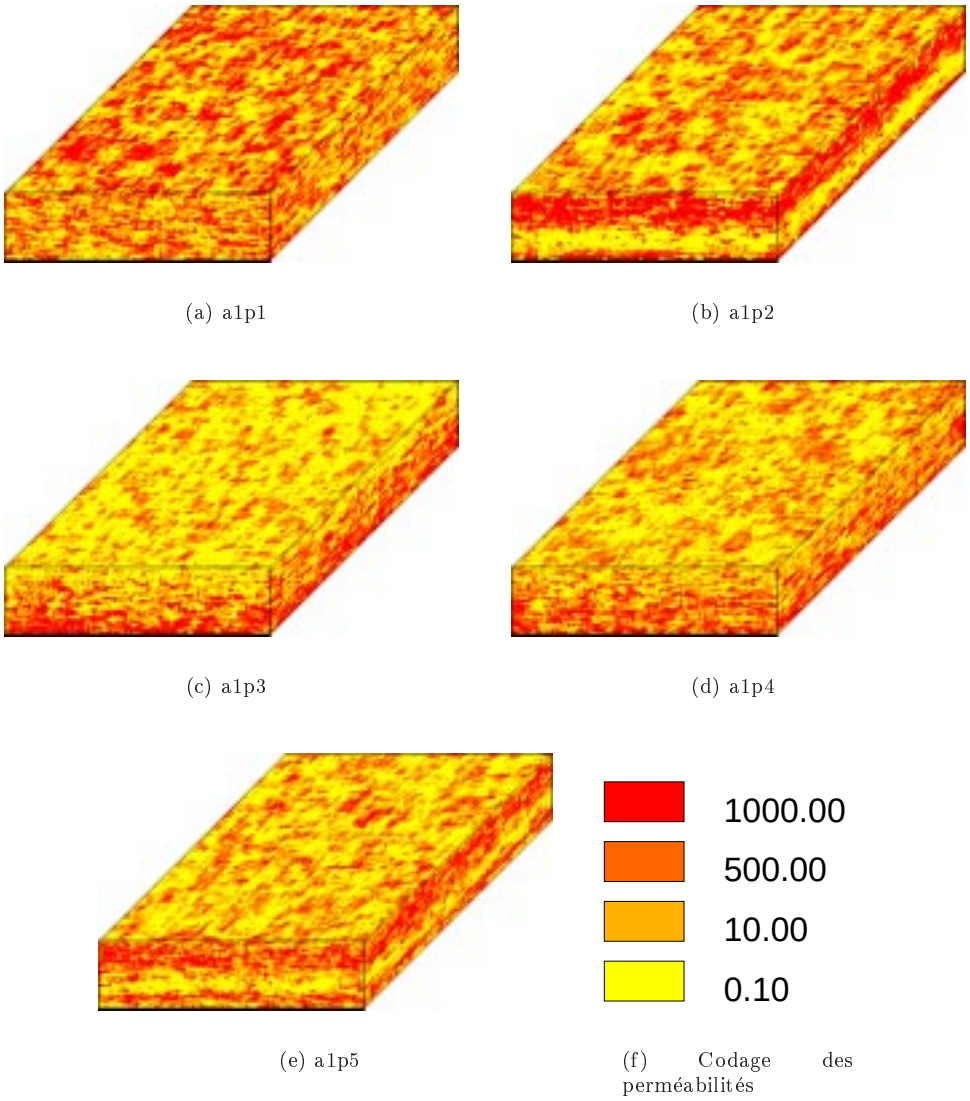
A chaque faciès est associée une perméabilité constante selon le tableau 7.3. Il serait possible d'utiliser à l'avenir ces même simulations pour tester d'autres contrastes de perméabilité. Au total on a créé 20 champs de perméabilité de type *HERESIM* (figures 7.3 et 7.4).

Les "commons"

Dix simulations conditionnelles ont également été réalisées. Le jeu de paramètre est le même pour les dix simulations. C'est celui que l'on a utilisé pour les simulations de type *a2p1*. Les simulations sont conditionnées par des faciès donnés le long de puits verticaux fictifs positionnés aux quatre coins du domaine (configuration de type quart de five-spot). La distribution des faciès le long de ces puits fictifs provient de la simulation *a1p1g12345-1*. Les simulations ainsi engendrées sont identifiées par le préfixe *common*, suivi de la valeur du germe utilisé (par exemple *common107885*). Les valeurs de perméabilité sont les même que précédemment (tableau 7.3).

7.2.4 Description des simulations par modèle Booléen

Pour le modèle Booléen, les paramètres sont la densité du processus de Poisson, qui donne le nombre de points qui sont engendrés (en moyenne) par unité de volume, et la forme et les paramètres de taille des inclusions associés à leur loi de probabilité.



(a) a1p1

(b) a1p2

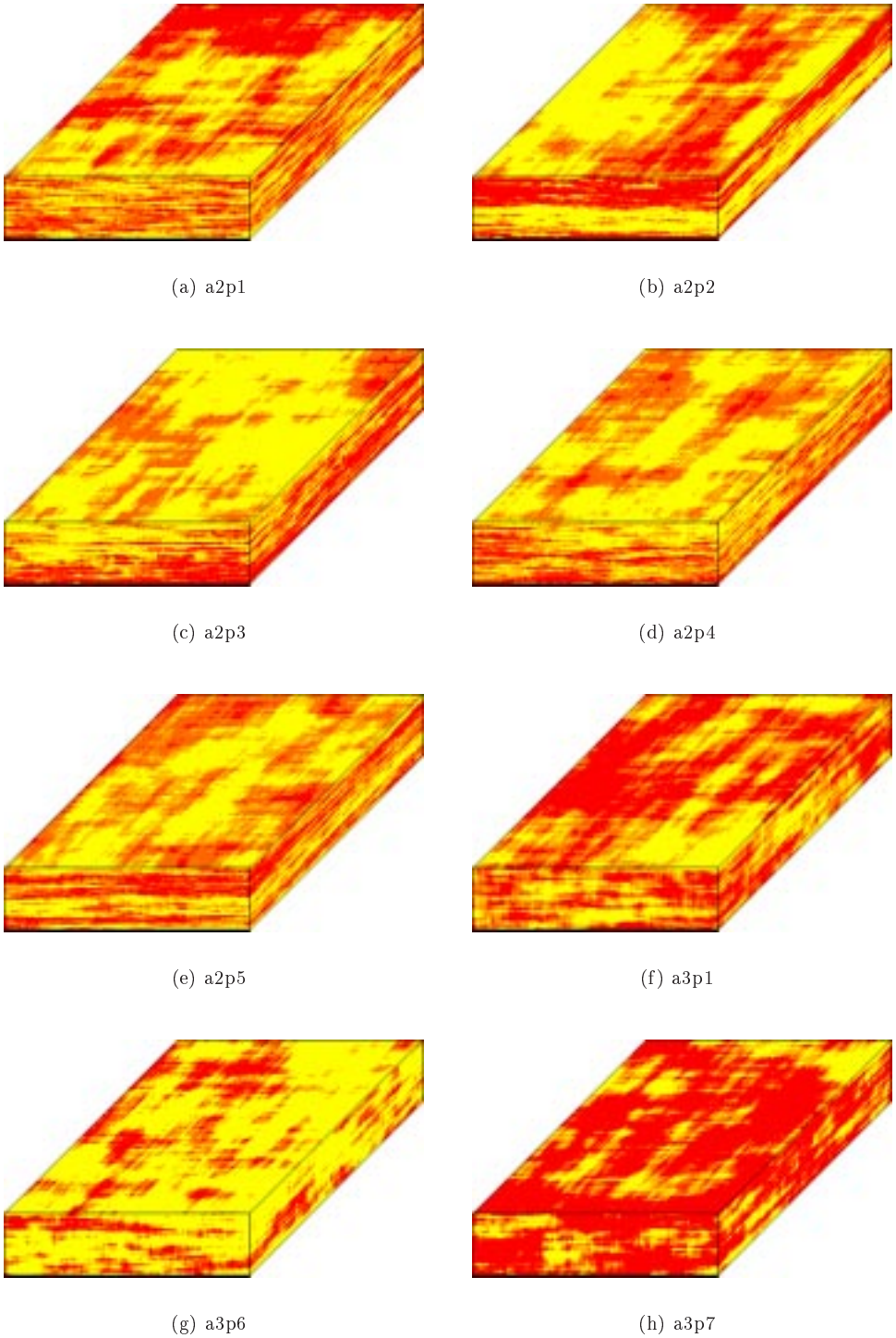
(c) a1p3

(d) a1p4

(e) a1p5

(f) Codage des perméabilités

FIG. 7.3 : *Les différents types de simulations* HERESIM – *courte portée.*



(a) a2p1 (b) a2p2

(c) a2p3 (d) a2p4

(e) a2p5 (f) a3p1

(g) a3p6 (h) a3p7

FIG. 7.4 : *Les différents types de simulations* HERESIM – *longue portée.*

Paramètre des inclusions

Pour chaque réalisation, la forme, l'orientation et la taille des inclusions sont constantes. D'une simulation à l'autre ces paramètres varient. Deux types d'inclusions ont été utilisés : des ellipsoïdes de section circulaire et aplatie suivant l'axe des z, notées *e1, e2, e3* et *e4*, et des sinusoïdes dans un plan horizontal avec une section verticale parabolique, notées *s1* et *s2*. Les ellipsoïdes ont une taille allant de quelques dizaines à quelques centaines de mètres. Les sinusoïdes sont orientées suivant l'axe x. La sinusoïde *s2* est plus longue et plus large que la sinusoïde *s1*.

Paramètre de densité

Les densités du processus de Poisson ont été choisies pour que l'ensemble des réalisations passent d'un pôle où la matrice est dominante et les inclusions sont isolées à un pôle où les inclusions sont dominantes. Cinq densités différentes ont été choisies et sont notées *b1, b2, b3, b4* et *b5*.

Combinaison des inclusions et des densités

Huit ensembles de paramètres ont été constitués en combinant les formes d'inclusions et les densités. Comme pour les simulations *HERESIM*, les noms des ensembles de paramètres sont obtenus en associant les noms de chaque famille de paramètres. Les jeux de paramètres retenus sont : *b1e1, b1e3, b2e2, b3e3, b4e4, b5e4, b1s1* et *b2s2*.

Simulation de faciès

Trente deux simulations de faciès ont été réalisées pour chaque jeu de paramètres en divisant huit champs de 256 × 256 × 64 mailles en quatre quartiers. Ils sont nommés selon la convention déjà présentée pour les simulations *HERESIM*. Le codage des faciès est 1 pour la matrice et 2 pour les inclusions. La figure 7.5 présente une simulation de faciès pour chaque jeu de paramètre.

Contraste de perméabilité

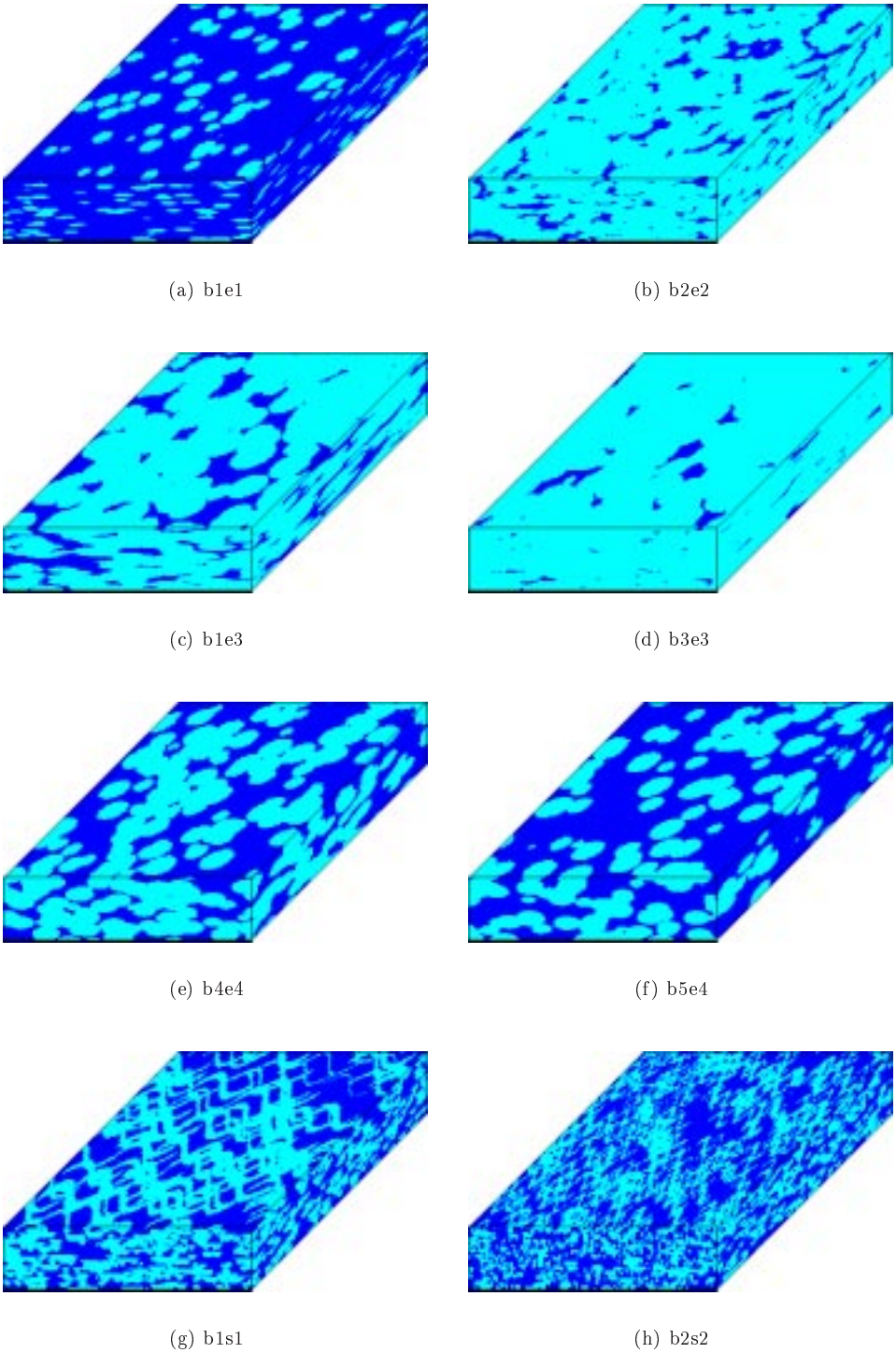
Pour chaque simulation de faciès, six contrastes différents de perméabilité ont été utilisés. On peut remarquer dans le tableau 7.4 que chaque contraste de perméabilité a été utilisé deux fois, une fois dans l'ordre matrice-inclusion et une fois dans l'ordre inclusion-matrice. De cette façon, un total de 1536 champs de perméabilité booléens ont été engendrés.

Nom	_1	_2	_3	_4	_5	_6
K_1 matrice (mD)	0.1	1	10	100	100	100
K_2 inclusion (mD)	100	100	100	0.1	1	10

TAB. 7.4 : *Perméabilité des milieux booléens*

7.2.5 Petits blocs

Dans le but de tester la sensibilité des méthodes de changement d'échelle au rapport longueur de corrélation sur taille du domaine et à l'effet de la discrétisation, cent cinquante huit champs de perméabilité (*grands blocs*) ont été divisés en *petits blocs* de 16 × 16 × 8 (=2 048) mailles. Ainsi,



(a) b1e1 (b) b2e2

(c) b1e3 (d) b3e3

(e) b4e4 (f) b5e4

(g) b1s1 (h) b2s2

FIG. 7.5 : *Les différents types de simulations Booléennes.*

un grand bloc donne cinq cent douze petits blocs. Le tableau 7.5 donne le nombre de petits blocs utilisés pour chaque type de modèle géostatistique. Le décompte détaillé des grands blocs qui ont été découpés est présenté dans le tableau 7.6.

La figure 7.6 montre quelques exemples de petits blocs. Nous les avons dessinés à la même taille que les grands blocs, en effet ils peuvent représenter la même portion de milieu poreux que les grands blocs, mais discrétisée plus grossièrement.

Modèle	nombre de petits blocs
Booléen inclusion ellipsoïdale	18432
Booléen inclusion sinusoïdale	6144
Heresim courte portée	2560
Heresim longue portée	40448
Total	67 584

TAB. 7.5 : *Nombre de petits blocs*

7.3 Perméabilité de référence

Pour chacun des blocs engendrés (grands et petits), nous avons calculé la perméabilité de référence en résolvant l'équation de la diffusivité par la méthode numérique présentée dans le chapitre précédent.

Nous avons vu, dans le chapitre 4, l'influence des conditions aux limites et l'influence du critère d'équivalence sur le calcul du tenseur de perméabilité. Il s'agit ici de justifier, pour les milieux étudiés, le choix de l'utilisation du critère d'égalité des flux et de l'utilisation des conditions aux limites de type perméamètre. Pour cela, nous comparons dans le paragraphe suivant les résultats obtenus avec les différents critères.

Ensuite nous discutons le problème de la surdiscrétisation du maillage.

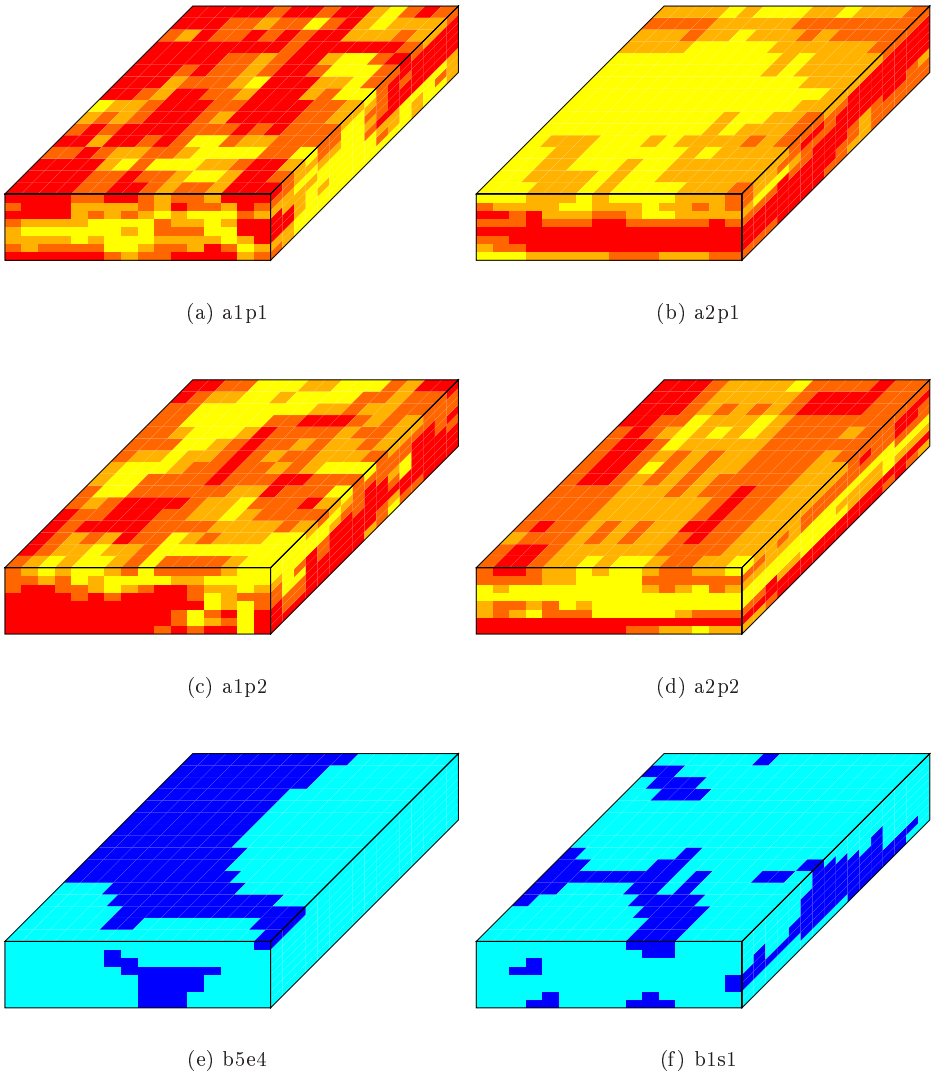
7.3.1 Tenseur

De part leur construction et de part l'aplatissement des mailles, les champs de perméabilité simulés ont leurs axes principaux d'anisotropie parallèles aux axes du maillage. Les résultats du chapitre 4 nous permettent de penser que l'on peut, dans ce cas, utiliser des conditions aux limites de type perméamètre pour calculer la perméabilité de référence. Le calculs des perméabilités directionnelles doit être suffisant pour caractériser les milieux étudiés.

Pour vérifier cette hypothèse, nous avons appliqué à un grand bloc de chaque type, la méthode développée dans le chapitre 4, permettant le calcul du tenseur complet avec des conditions aux limites de type perméamètre en utilisant le critère d'égalité des vitesses moyennes. Ces calculs montrent que les termes non-diagonaux sont négligeables. Par exemple, pour le grand bloc *common107885*, le calcul du tenseur complet de perméabilité et le calcul sans prendre en compte les termes non-diagonaux donnent les résultats suivant.

$$\boldsymbol{K}_{b\ \text{vitesse}} = \begin{pmatrix} 336.12 & -1.34 & -0.443 \\ -1.34 & 336.82 & -0.344 \\ -0.443 & -0.344 & 4.590 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{K}_{b\ \text{flux}} = \begin{pmatrix} 335.77 & 0 & 0 \\ 0 & 337.12 & 0 \\ 0 & 0 & 4.591 \end{pmatrix}$$

On constate que les termes diagonaux sont très proches, que l'on utilise le critère d'égalité des flux



(a) a1p1 (b) a2p1

(c) a1p2 (d) a2p2

(e) b5e4 (f) b1s1

FIG. 7.6 : *Exemples de petits blocs extraits des grands blocs. La taille dans chaque direction a été dilatée.*

ou des vitesses moyennes. De même, pour un petit bloc extrait de *common107885*, on a :

$$\boldsymbol{K}_{b\ \text{vitesse}} = \begin{pmatrix} 692.14 & -0.432 & 0.435 \\ -0.432 & 682.37 & 0.955 \\ 0.435 & 0.955 & 388.47 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{K}_{b\ \text{flux}} = \begin{pmatrix} 690.14 & 0 & \\ 0 & 687.33 & 0 \\ 0 & 0 & 388.48 \end{pmatrix}$$

Nous avons vu dans le chapitre 4 que l'égalité des flux est équivalente à l'égalité des énergies dissipées dans le cas de conditions aux limites de type perméamètre. Ainsi pour les milieux étudiés, les trois critères d'équivalence (flux = énergie et vitesses) donnent sensiblement le même résultat. Nous en concluons que, pour ces milieux, le critère d'égalité des flux est suffisant et les conditions aux limites de type perméamètre sont satisfaisantes.

7.3.2 Surdiscrétisation

Le calcul est mené directement sur la grille géostatistique essentiellement parce qu'il était impossible de raffiner une grille contenant un million de mailles sur une station Sparc 10. De plus, comme nous l'avons déjà souligné, l'hypothèse faite en raffinant est que le milieu est constitué de la juxtaposition de morceaux de roche de perméabilité homogène. Or le milieu réel n'est pas ainsi constitué. Un raffinement correct nécessiterait de pouvoir décrire les hétérogénéités à l'échelle inférieure, mais une telle approche est difficile à imaginer en pratique.

Nous savons qu'avec les choix effectués le calcul de la perméabilité de référence est soumis à un biais. Nous avons jugé nécessaire de calculer les perméabilités de référence à la fois en éléments finis avec *TRIMULEC* et en différences finies avec *HIGHDEN*.

En raison des temps *cpu* importants, tous les calculs n'ont pas pu être effectués sur tous les milieux avec *HIGHDEN*. Nous avons donc choisi des milieux pour lesquels le calcul de la perméabilité équivalente a été réalisé avec les deux méthodes numériques : au moins quatre milieux pour chaque jeu de paramètres.

7.3.3 Décompte

Pour les grands blocs d'un million de mailles, nous avons calculé 1966 tenseurs de perméabilité de référence (diagonaux) avec la méthode des éléments finis et David Griffin, à l'université de Newcastle, en a calculé 630 avec la méthode des différences finies (tableau 7.6).

Pour les petits blocs contenant 2 048 mailles, nous avons calculé 158×512≃64 000 tenseurs de perméabilité de référence pour les petits blocs avec la méthode des éléments finis.

L'ensemble de ces calculs correspond à plus d'une année de temps cpu sur une station Sparc 10.

La comparaison entre les résultats obtenus avec *TRIMULEC* et *HIGHDEN* (figure 7.7) montre que l'inégalité $K_{df} < K_{ef}$ n'est pas toujours vérifiée. Mais, la différence entre les deux estimations est faible (en général inférieure à 5%).

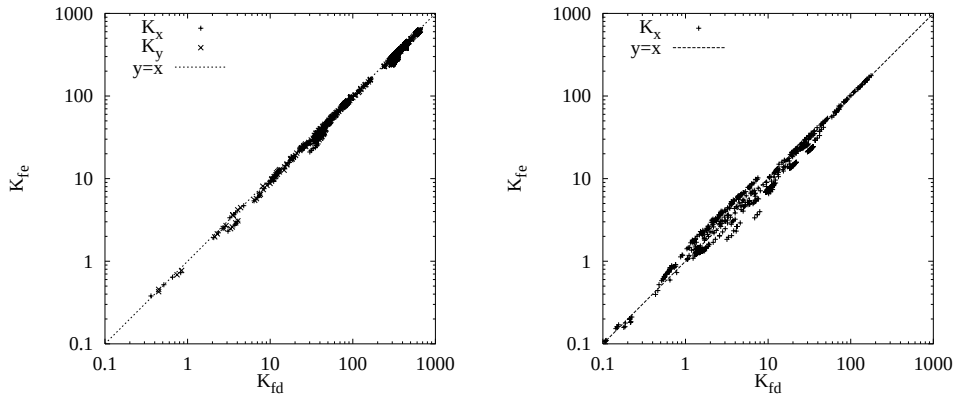
7.4 Comparaison des temps calcul

Le tableau 7.7 donne les temps cpu de chacune des méthodes testées et le temps de référence nécessaire au calcul de la solution complète du problème d'écoulement en utilisant *TRIMULEC*.

Les techniques les plus rapides sont les moyennes algébriques, suivies de la formule de Kruel-Romeu et de la renormalisation simplifiée. Les renormalisations tensorielle et standard viennent après.

	Éléments finis		*Différences finies*
Type de modèle	*Direct*	*Bloc*	*Direct*
a1p1	32	1	32
a1p2	32	1	32
a1p3	32	1	32
a1p4	32	1	32
a1p5	32	1	32
a2p1	32	1	32
a2p2	36	2	32
a2p3	32	1	32
a2p4	32	32	32
a2p5	32	32	32
a3p1	32	1	32
a3p6	32	1	32
a3p7	32	1	32
common	10	10	10
b1e1	192	6	24
b1e3	192	6	24
b1s1	192	30	24
b2e2	192	6	36
b2s2	192	6	24
b3e3	192	6	24
b4e4	192	6	24
b5e4	192	6	24
total	1966	158	630

TAB. 7.6 : *Nombre de simulations d'écoulement* Direct = *grand bloc (128×128×64 mailles),* Bloc = *un grand bloc divisé en 512 petits blocs de 16×16×8 mailles.*



(a) Perméabilité horizontale

(b) Perméabilité verticale

FIG. 7.7 : *Comparaison des perméabilités calculées avec* TRIMULEC *et* HIGHDEN.

La renormalisation standard est la technique la plus lente, car elle nécessite la résolution de trois systèmes linéaires (un par direction) pour déterminer le tenseur de perméabilité équivalente (voir Annexe C pour le détail des calculs). La renormalisation tensorielle est environ trois fois plus rapide, car elle ne nécessite la résolution que d'un seul système linéaire (avec trois seconds membres différents, cf. Annexe C). La renormalisation simplifiée est encore plus rapide, car elle ne nécessite aucune résolution de système linéaire.

Nom de la méthode	petits blocs (2 048 mailles)	grands blocs (1 048 576 mailles)
Éléments Finis (tenseur diagonal)	461	10 286
Moyenne algébrique (scalaire)	0.04	27
Formule de Kruel-Romeu (tenseur diagonal)	0.04	42
Renormalisation simplifiée (tenseur diagonal)	0.07	49
Renormalisation tensorielle (tenseur complet)	0.36	215
Renormalisation standard (tenseur diagonal)	1.04	445

TAB. 7.7 : *Temps cpu moyen en secondes sur une station de travail Sparc 10 (prend en compte les entrées sortie)*

Le rapport temps cpu méthode de référence sur temps cpu méthodes rapides est compris entre 20 et plusieurs centaines.

Du point de vue de la programmation des techniques, les renormalisations standard et tensorielle présentent le même degré de difficulté (ou de facilité). La renormalisation simplifiée et la méthode de Kruel-Romeu nécessitent à peu près le même temps de programmation. Les estimateurs algébriques sont évidents à programmer.

Du point de vue de l'espace mémoire nécessaire, toutes ces techniques permettent de travailler sur des milieux contenant plusieurs millions de mailles sans difficulté. Ceci serait impossible, à l'heure actuelle dans des temps raisonnable, en résolvant le problème d'écoulement par une méthode numérique.

7.5 Les critères de classement

Pour classer les méthodes rapides en fonction de leur précision, nous avons utilisé : le biais relatif, le coefficient de corrélation linéaire, le coefficient de corrélation de rang et les nuages de points (K_{ref}, K_{rapide}).

7.5.1 Biais relatif

La première idée venant à l'esprit pour comparer deux valeurs est de calculer *l'erreur*, c'est à dire la différence entre les deux valeurs, la seconde étant supposée être la référence. *L'erreur relative* est l'erreur divisée par la référence.

Si l'on compare deux méthodes sur un unique champ de perméabilité, il est clair que la meilleure technique sera celle qui aura la plus petite erreur relative (en valeur absolue). Mais, il est souhaitable qu'une méthode de calcul de la perméabilité équivalente donne un bon résultat sur le plus grand nombre possible de champs de perméabilité. Dans ce cas, il est nécessaire de calculer des statistiques sur les erreurs.

L'espérance mathématique (expérimentalement, la moyenne) de l'erreur est appelée *le biais*. Le *biais relatif* est alors défini comme le biais divisé par l'espérance mathématique de la valeur de référence :

$$e = \frac{|\sum_i (Y^i_{\text{référence}} - Y^i_{\text{rapide}})|}{\sum_i Y^i_{\text{référence}}} \qquad Y = \log_{10} K \tag{7.1}$$

On notera que nous utilisons le logarithme de la perméabilité car on sait d'un point de vue pratique que l'ordre de grandeur de la perméabilité est plus important que la valeur de la perméabilité elle même.

Quand une méthode donne toujours la même valeur que la référence, la valeur du biais est 0, et une très bonne méthode aura un biais très faible. Toutefois, une méthode présentant un biais faible n'est pas forcément une méthode précise. Elle peut présenter des erreurs importantes, tantôt négatives, tantôt positives, telles que la moyenne des erreurs négatives compensent la moyenne des erreurs positives. Une faible valeur de biais indique seulement que le nuage de points, ayant pour coordonnées $(x = K_{\text{rapide}}, y = K_{\text{référence}})$, est a peu près centré sur la droite $y = x$.

Ainsi, le biais est un critère nécessaire pour qu'un technique soit précise, mais ce n'est pas un critère suffisant.

7.5.2 Coefficients de corrélation

S'il existe une transformation linéaire qui permet de passer du résultat de la méthode rapide à la valeur de référence, alors il est aisé d'utiliser cette transformation comme une correction et la méthode rapide sera alors extrêmement utile. Quand une telle relation existe entre deux variables, leur coefficient de corrélation linéaire ρ est égal à 1. Dans le cas ou aucune orientation préférentielle n'apparaît dans le nuage de points, alors $\rho = 0$.

$$\rho = \frac{\sum_i (Y^i_{\text{référence}} - \bar{Y}_{\text{référence}})(Y^i_{\text{rapide}} - \bar{Y}_{\text{rapide}})}{\sqrt{\sum_i (Y^i_{\text{référence}} - \bar{Y}_{\text{référence}})^2}\sqrt{\sum_i (Y^i_{\text{rapide}} - \bar{Y}_{\text{rapide}})^2}} \qquad \bar{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y^i \tag{7.2}$$

i est un indice sur les champs de perméabilité synthétique. Alors que le biais relatif permet de mesurer si le nuage de points est centré ou non, le coefficient de corrélation linéaire ρ permet de mesurer la dispersion du nuage par rapport à une droite.

Un coefficient de corrélation $\rho = 1$ implique que la méthode est précise. Mais la réciproque n'est pas toujours vraie, en effet ρ ne permet pas de détecter des corrélations non linéaires. Pour rechercher d'éventuelles corrélations non linéaires il faut utiliser d'autres coefficients. Nous avons utilisé le coefficient de corrélation de rang qui permet de détecter l'existence d'une relation non linéaire strictement monotone. Pour calculer le coefficient de corrélation de rang, ou coefficient de Spearman, on applique l'équation (7.2) au rang des valeurs.

$$\rho_s = \frac{\sum_i (r^i_{\text{référence}} - \bar{r}_{\text{référence}})(r^i_{\text{rapide}} - \bar{r}_{\text{rapide}})}{\sqrt{\sum_i (r^i_{\text{référence}} - \bar{r}_{\text{référence}})^2}\sqrt{\sum_i (r^i_{\text{rapide}} - \bar{r}_{\text{rapide}})^2}} \tag{7.3}$$

r_i est le rang de la valeur Y^i parmi les n valeurs de Y^j $j = 1, \ldots, n$ classées par ordre croissant $Y^{j+1} \leq Y^j$.

7.5.3 Comparaison des nuages de points

Toute l'information de la comparaison est contenue dans les nuages de points de coordonnées $x = K_{\text{rapide}}$ et $y = K_{\text{référence}}$. Sur ces diagrammes, il est possible de voir s'il existe une relation linéaire ou non linéaire entre les deux séries de valeurs ou si il n'y a pas de relation entre elles. Si une relation existe, la dispersion des points est visible. L'étude de ces diagrammes est donc la méthode la plus générale permettant la comparaison des méthodes. Les critères que sont le biais relatif et les coefficients de corrélation permettent une quantification de la précision mais ne remplace pas l'étude détaillée des nuages de points.

On remarquera que les nuages de points formés par des couples de perméabilités ne peuvent pas explorer la totalité de l'espace des nombres réels. En effet, pour les milieux que nous étudions, la perméabilité est toujours comprise entre un maximum et un minimum. Les points extrêmes correspondent aux cas extrêmes de milieux homogènes ($k = k_{min}$ ou $k = k_{max}$ sur l'ensemble du domaine). Les points intermédiaires correspondent à des milieux pour lesquels la proportion de mailles de faible perméabilité diminue par rapport à la proportion de mailles de forte perméabilité. Quand toutes les mailles sont de même perméabilité, quelle que soit la méthode utilisée pour calculer la perméabilité, la perméabilité équivalente est la perméabilité du milieu homogène. Il en résulte que les diagrammes ont des points terminaux situés sur la droite $y = x$: le premier a pour coordonnées (k_{min}, k_{min}), le second (k_{max}, k_{max}) du fait du choix des paramètres utilisés dans la génération des modèles, les perméabilités de références correspondantes sont relativement bien distribuées dans l'intervalle $[k_{min}, k_{max}]$. Cela a pour conséquence que si le coefficient de corrélation est proche de 1, alors la seule relation linéaire possible est $y = x$, et alors le biais est voisin de 0.

7.5.4 Conclusion

En conclusion, sous les conditions où nous avons mené nos expérimentations numériques, une méthode qui a un coefficient de corrélation linéaire de 1 est une méthode précise (et non biaisé). Si le coefficient de corrélation linéaire est différent de 1 alors une étude plus détaillée devient nécessaire.

7.6 Résultats

Les méthodes rapides sont classées en fonction de leur précision respective. Quatre comparaisons sont menées.

La première consiste à comparer les méthodes rapides avec les valeurs de références obtenues avec *TRIMULEC* pour les 1944 grands blocs.

La seconde et la troisième comparaisons ont pour but d'évaluer l'effet de la valeur de référence (élément finis ou différences finies). Ces deux comparaisons sont menées sur le même échantillon de 612 grands blocs constituant un sous-ensemble des 1944 grands blocs utilisés dans la première comparaison. La seconde comparaison utilise les valeurs de référence calculées avec *HIGHDEN* et la troisième utilise les valeurs de références obtenues avec *TRIMULEC*.

La quatrième comparaison est menée sur les petits blocs. Dans ce cas on ne possède que la perméabilité de référence calculée avec *TRIMULEC*. Le but est de savoir si, lorsque l'on change le rapport longueur de corrélation sur taille du domaine ou densité de discrétisation sur taille du domaine, le classement change ou non ?

7.6.1 Classement par biais relatif minimum

Les tableaux 7.8 a-d donnent pour chacune des quatre comparaisons, le classement des techniques (les meilleures techniques sont en haut des tableaux), pour chaque composante de la perméabilité (K^{xx}, K^{yy} et K^{zz}) ainsi que les valeurs des biais relatifs correspondants (e).

(a) 1 944 grands blocs, référence = Éléments finis

	K^{xx}		K^{y}		K^{z}	
rg.	e	meth.	e	meth.	e	meth.
0	0.002	k_r	0.001	k_r	0.222	μ_g
1	0.022	c_{max}	0.018	c_{max}	0.272	c_{min}
2	0.022	k_3	0.020	k_3	0.277	r_s
3	0.029	c	0.024	c	0.288	r_t
4	0.030	k_4	0.027	k_4	0.309	c
5	0.054	r_t	0.050	r_t	0.416	k_r
6	0.061	$\mu_{1/2}$	0.064	$\mu_{1/2}$	0.426	c_{geo}
7	0.070	k_2	0.067	k_2	0.581	c_{max}
8	0.073	μ_a	0.069	μ_a	0.601	k_1
9	0.083	c_{geo}	0.075	c_{geo}	0.670	$\mu_{1/3}$
10	0.110	r_s	0.100	r_s	0.775	μ_h
11	0.137	$\mu_{1/3}$	0.132	c_{min}	0.819	$\mu_{1/2}$
12	0.145	c_{min}	0.140	$\mu_{1/3}$	0.937	k_3
13	0.369	μ_g	0.371	μ_g	0.940	k_4
14	0.720	k_1	0.720	k_1	1.045	k_2
15	0.884	μ_h	0.884	μ_h	1.077	μ_a

(b) 612 grands blocs, référence = Éléments finis

	K^{xx}		K^{yy}		K^{zz}	
rg.	e	meth.	e	meth.	e	meth.
0	0.012	k_4	0.013	c_{max}	0.267	c_{min}
1	0.014	c_{max}	0.013	k_4	0.287	r_s
2	0.014	k_r	0.013	k_r	0.316	r_t
3	0.019	c	0.017	c	0.330	c
4	0.019	k_3	0.021	k_3	0.488	μ_g
5	0.030	r_t	0.029	r_t	0.530	c_{geo}
6	0.045	k_2	0.046	k_2	0.693	k_r
7	0.048	μ_a	0.048	μ_a	0.794	c_{max}
8	0.054	c_{geo}	0.052	c_{geo}	0.982	k_1
9	0.067	r_s	0.065	r_s	1.206	μ_h
10	0.067	$\mu_{1/2}$	0.067	$\mu_{1/2}$	1.209	$\mu_{1/3}$
11	0.094	c_{min}	0.092	c_{min}	1.407	$\mu_{1/2}$
12	0.144	$\mu_{1/3}$	0.144	$\mu_{1/3}$	1.424	k_3
13	0.424	μ_g	0.424	μ_g	1.435	k_4
14	0.761	k_1	0.759	k_1	1.609	k_2
15	1.080	μ_h	1.080	μ_h	1.705	μ_a

(c) 612 grands blocs, référence = Différences finies

	K^{xx}		K^{yy}		K^{zz}	
rg.	e	meth.	e	meth.	e	meth.
0	0.002	c	0.001	c	0.293	c_{min}
1	0.003	k_r	0.003	k_r	0.314	r_s
2	0.003	c_{max}	0.004	c_{max}	0.343	r_t
3	0.014	r_t	0.013	r_t	0.357	c
4	0.030	k_4	0.030	k_4	0.518	μ_g
5	0.037	k_3	0.036	c_{geo}	0.561	c_{geo}
6	0.038	c_{geo}	0.038	k_3	0.687	k_r
7	0.051	r_s	0.050	r_s	0.830	c_{max}
8	0.052	$\mu_{1/2}$	0.052	$\mu_{1/2}$	0.982	k_1
9	0.063	k_2	0.064	k_2	1.210	μ_h
10	0.066	μ_a	0.065	μ_a	1.254	$\mu_{1/3}$
11	0.079	c_{min}	0.076	c_{min}	1.456	$\mu_{1/2}$
12	0.130	$\mu_{1/3}$	0.130	$\mu_{1/3}$	1.473	k_3
13	0.414	μ_g	0.414	μ_g	1.485	k_4
14	0.757	k_1	0.755	k_1	1.662	k_2
15	1.081	μ_h	1.081	μ_h	1.760	μ_a

(d) 67 584 petits blocs, référence = Éléments finis

	K^{xx}		K^{yy}		K^{zz}	
rg.	e	meth.	e	meth.	e	meth.
0	0.000	c	0.001	c	0.022	c_{min}
1	0.002	k_r	0.003	k_r	0.026	r_s
2	0.004	c_{max}	0.005	c_{max}	0.031	r_t
3	0.013	r_t	0.011	r_t	0.036	μ_g
4	0.029	$\mu_{1/2}$	0.026	c_{geo}	0.040	c
5	0.029	c_{geo}	0.032	$\mu_{1/2}$	0.095	c_{geo}
6	0.032	k_3	0.032	k_3	0.097	k_r
7	0.034	k_4	0.036	k_4	0.144	k_1
8	0.043	r_s	0.039	r_s	0.169	c_{max}
9	0.051	k_2	0.049	k_2	0.240	k_3
10	0.062	c_{min}	0.056	c_{min}	0.241	k_4
11	0.105	μ_a	0.102	μ_a	0.424	$\mu_{1/3}$
12	0.109	$\mu_{1/3}$	0.112	$\mu_{1/3}$	0.439	k_2
13	0.219	k_1	0.219	k_1	0.552	$\mu_{1/2}$
14	0.352	μ_g	0.354	μ_g	0.766	μ_a
15	0.986	μ_h	0.986	μ_h	0.978	μ_h

TAB. 7.8 : *Classification des techniques par biais relatif minimum (e)*

Sur l'ensemble des expériences numériques menées, le biais relatif est compris entre 1% et 180% (tableau 7.8). Il est plus grand dans la direction z que dans les directions x et y.

Pour K^{xx} et K^{yy}, si l'on exclut les *valeurs intermédiaires*, les estimateurs les moins biaisés sont la formule de Kruel-Romeu k_r ($0.1\% < e < 1\%$) et la renormalisation simplifiée c ($1\% < e < 3\%$). La renormalisation tensorielle est toujours classée en troisième position ($1\% < e < 5\%$).

pour K^{zz}, le biais est plus faible pour les petits blocs que pour les grands blocs. Pour les petits blocs, les techniques les moins biaisées sont la renormalisation standard r_s et tensorielle r_t ($e \simeq$

3%), tout juste suivies par la moyenne géométrique μ_g et la renormalisation simplifiée c ($e \simeq 4\%$). Pour les grands blocs, les meilleurs estimateurs sont à nouveau r_s, r_t, c et μ_g, mais l'ordre de grandeur du biais relatif est compris entre 22 et 25%.

Les techniques les plus biaisées sont les mêmes dans les quatre tests : pour K^{xx} et K^{yy}, c'est la moyenne harmonique μ_h ($e \simeq 100\%$) ; pour K^{zz}, c'est la moyenne arithmétique μ_a ($100\% < e < 180\%$).

7.6.2 Classement par coefficients de corrélation maximum

(a) 1 944 grands blocs, référence = Éléments finis

	K^{xx}		K^{yy}		K^{zz}	
rg.	ρ	meth.	ρ	meth.	ρ	meth.
1	0.995	$\mathbf{c}$	0.996	$\mathbf{c}$	0.961	$\mathbf{r_t}$
2	0.995	$\mathbf{c_{max}}$	0.996	$\mathbf{c_{max}}$	0.961	$\mathbf{c_{min}}$
3	0.993	$\mathbf{k_r}$	0.992	$\mathbf{c_{geo}}$	0.961	$\mathbf{r_s}$
4	0.991	$\mathbf{r_t}$	0.992	$\mathbf{k_r}$	0.957	$\mathbf{c}$
5	0.990	$\mathbf{k_3}$	0.992	$\mathbf{r_t}$	0.935	$\mathbf{c_{geo}}$
6	0.989	$\mu_{1/2}$	0.990	$\mathbf{k_3}$	0.881	$\mathbf{c_{max}}$
7	0.989	$\mathbf{c_{geo}}$	0.989	$\mu_{1/2}$	0.873	$\mu_\mathbf{g}$
8	0.985	$\mathbf{k_4}$	0.988	$\mathbf{r_s}$	0.845	$\mathbf{k_r}$
9	0.985	$\mathbf{r_s}$	0.986	$\mathbf{k_4}$	0.809	$\mathbf{k_1}$
10	0.974	$\mathbf{k_2}$	0.979	$\mathbf{c_{min}}$	0.688	$\mu_\mathbf{h}$
11	0.972	$\mu_\mathbf{a}$	0.972	$\mathbf{k_2}$	0.687	$\mu_{1/3}$
12	0.972	$\mathbf{c_{min}}$	0.971	$\mu_\mathbf{a}$	0.635	$\mathbf{k_3}$
13	0.967	$\mu_{1/3}$	0.966	$\mu_{1/3}$	0.629	$\mathbf{k_4}$
14	0.765	$\mu_\mathbf{g}$	0.765	$\mu_\mathbf{g}$	0.592	$\mu_{1/2}$
15	0.439	$\mathbf{k_1}$	0.437	$\mathbf{k_1}$	0.458	$\mathbf{k_2}$
16	0.043	$\mu_\mathbf{h}$	0.043	$\mu_\mathbf{h}$	0.378	$\mu_\mathbf{a}$

(b) 612 grands blocs, référence = Éléments finis

	K^{xx}		K^{yy}		K^{zz}	
rg.	ρ	meth.	ρ	meth.	ρ	meth.
1	0.997	$\mathbf{c}$	0.997	$\mathbf{c}$	0.975	$\mathbf{r_t}$
2	0.997	$\mathbf{c_{max}}$	0.997	$\mathbf{c_{max}}$	0.973	$\mathbf{r_s}$
3	0.997	$\mathbf{r_t}$	0.997	$\mathbf{r_t}$	0.971	$\mathbf{c_{min}}$
4	0.996	$\mathbf{k_r}$	0.995	$\mathbf{k_3}$	0.968	$\mathbf{c}$
5	0.995	$\mathbf{k_3}$	0.994	$\mathbf{c_{geo}}$	0.948	$\mathbf{c_{geo}}$
6	0.993	$\mathbf{c_{geo}}$	0.994	$\mathbf{k_r}$	0.890	$\mathbf{c_{max}}$
7	0.993	$\mu_{1/2}$	0.992	$\mu_{1/2}$	0.765	$\mathbf{k_r}$
8	0.990	$\mathbf{k_4}$	0.991	$\mathbf{r_s}$	0.717	$\mathbf{k_1}$
9	0.989	$\mathbf{r_s}$	0.990	$\mathbf{k_4}$	0.666	$\mu_\mathbf{g}$
10	0.983	$\mathbf{k_2}$	0.984	$\mathbf{c_{min}}$	0.576	$\mathbf{k_3}$
11	0.982	$\mathbf{c_{min}}$	0.980	$\mathbf{k_2}$	0.563	$\mathbf{k_4}$
12	0.981	$\mu_\mathbf{a}$	0.979	$\mu_\mathbf{a}$	0.507	$\mu_\mathbf{h}$
13	0.972	$\mu_{1/3}$	0.973	$\mu_{1/3}$	0.399	$\mu_{1/3}$
14	0.725	$\mu_\mathbf{g}$	0.729	$\mu_\mathbf{g}$	0.312	$\mathbf{k_2}$
15	0.347	$\mathbf{k_1}$	0.353	$\mathbf{k_1}$	0.310	$\mu_{1/2}$
16	-0.303	$\mu_\mathbf{h}$	-0.299	$\mu_\mathbf{h}$	0.155	$\mu_\mathbf{a}$

(c) 612 grands blocs, référence = Différences finies

	K^{xx}		K^{yy}		K^{zz}	
rg.	ρ	meth.	ρ	meth.	ρ	meth.
1	0.999	$\mathbf{r_t}$	0.999	$\mathbf{r_t}$	0.945	$\mathbf{r_t}$
2	0.998	$\mathbf{c}$	0.998	$\mathbf{c}$	0.941	$\mathbf{r_s}$
3	0.998	$\mathbf{c_{max}}$	0.998	$\mathbf{c_{max}}$	0.937	$\mathbf{c_{min}}$
4	0.997	$\mathbf{c_{geo}}$	0.997	$\mathbf{c_{geo}}$	0.934	$\mathbf{c}$
5	0.995	$\mathbf{k_r}$	0.995	$\mathbf{k_r}$	0.911	$\mathbf{c_{geo}}$
6	0.995	$\mathbf{r_s}$	0.995	$\mathbf{r_s}$	0.852	$\mathbf{c_{max}}$
7	0.993	$\mu_{1/2}$	0.993	$\mu_{1/2}$	0.802	$\mathbf{k_r}$
8	0.992	$\mathbf{k_3}$	0.993	$\mathbf{k_3}$	0.753	$\mathbf{k_1}$
9	0.989	$\mathbf{c_{min}}$	0.989	$\mathbf{c_{min}}$	0.710	$\mu_\mathbf{g}$
10	0.984	$\mathbf{k_4}$	0.986	$\mathbf{k_4}$	0.583	$\mathbf{k_3}$
11	0.980	$\mathbf{k_2}$	0.978	$\mathbf{k_2}$	0.572	$\mathbf{k_4}$
12	0.978	$\mu_\mathbf{a}$	0.976	$\mu_{1/3}$	0.530	$\mu_\mathbf{h}$
13	0.975	$\mu_{1/3}$	0.976	$\mu_\mathbf{a}$	0.438	$\mu_{1/3}$
14	0.736	$\mu_\mathbf{g}$	0.741	$\mu_\mathbf{g}$	0.346	$\mathbf{k_2}$
15	0.381	$\mathbf{k_1}$	0.386	$\mathbf{k_1}$	0.346	$\mu_{1/2}$
16	-0.283	$\mu_\mathbf{h}$	-0.280	$\mu_\mathbf{h}$	0.188	$\mu_\mathbf{a}$

(d) 67 584 petits blocs, référence = Éléments finis

	K^{xx}		K^{yy}		K^{zz}	
rg.	ρ	meth.	ρ	meth.	ρ	meth.
1	0.996	$\mathbf{r_t}$	0.996	$\mathbf{r_t}$	0.997	$\mathbf{r_t}$
2	0.995	$\mathbf{c}$	0.995	$\mathbf{c}$	0.997	$\mathbf{r_s}$
3	0.994	$\mathbf{c_{max}}$	0.995	$\mathbf{c_{geo}}$	0.997	$\mathbf{c_{min}}$
4	0.993	$\mathbf{k_r}$	0.994	$\mathbf{c_{max}}$	0.997	$\mathbf{c}$
5	0.993	$\mathbf{c_{geo}}$	0.993	$\mathbf{k_r}$	0.994	$\mathbf{c_{geo}}$
6	0.989	$\mathbf{r_s}$	0.992	$\mathbf{r_s}$	0.993	$\mathbf{k_r}$
7	0.985	$\mathbf{k_3}$	0.988	$\mathbf{c_{min}}$	0.989	$\mathbf{k_1}$
8	0.984	$\mathbf{c_{min}}$	0.985	$\mathbf{k_3}$	0.984	$\mathbf{c_{max}}$
9	0.982	$\mathbf{k_2}$	0.982	$\mathbf{k_2}$	0.967	$\mathbf{k_4}$
10	0.977	$\mathbf{k_4}$	0.978	$\mathbf{k_4}$	0.967	$\mathbf{k_3}$
11	0.958	$\mu_{1/2}$	0.958	$\mu_{1/2}$	0.893	$\mathbf{k_2}$
12	0.943	$\mu_{1/3}$	0.943	$\mu_{1/3}$	0.876	$\mu_\mathbf{g}$
13	0.926	$\mu_\mathbf{a}$	0.925	$\mu_\mathbf{a}$	0.772	$\mu_{1/3}$
14	0.909	$\mathbf{k_1}$	0.907	$\mathbf{k_1}$	0.701	$\mu_{1/2}$
15	0.812	$\mu_\mathbf{g}$	0.812	$\mu_\mathbf{g}$	0.606	$\mu_\mathbf{h}$
16	0.194	$\mu_\mathbf{h}$	0.195	$\mu_\mathbf{h}$	0.527	$\mu_\mathbf{a}$

TAB. 7.9 : *Classification des techniques par coefficient de corrélation linéaire maximum (ρ)*

En général, on observe (tableau 7.9) un groupe de techniques (r_s, r_t, c) qui ont un très bon coefficient de corrélation ($0.989 \leq \rho \leq 0.999$), et un second groupe correspondant aux moyennes algébriques ($\mu_a, \mu_g, \mu_h, \mu_{1/3}$) qui ont des coefficients de corrélations plus variables et souvent plus petits ($-0.303 \leq \rho \leq 0.993$). La formule de Kruel-Romeu est à la frontière entre ces deux groupes : pour les petits blocs, elle appartient au premier groupe ; pour les grands blocs, elle appartient au second groupe.

La moyenne arithmétique et la moyenne harmonique sont à nouveau les dernières techniques du classement.

L'étude des coefficients de corrélation de rang donne les mêmes résultats que celle des coefficients de corrélation linéaire (voir tableau 7.10)

Les coefficients de corrélation plus faibles pour les méthodes algébriques proviennent du fait que ces techniques ne prennent pas en compte l'agencement spatial des perméabilités locales. Ainsi, deux milieux présentant les mêmes perméabilités locales mais arrangés différemment dans l'espace auront toujours les mêmes moyennes algébriques. Mais leurs perméabilités équivalentes dépendent de l'agencement spatial et les deux milieux auront certainement deux perméabilités équivalentes différentes. Cela signifie que si l'on fait un graphe avec la moyenne arithmétique en abscisse et

(a) 1 944 grands blocs, référence = Éléments finis

rg.	K^{xx} ρ_s	K^{xx} meth.	K^{yy} ρ_s	K^{yy} meth.	K^{zz} ρ_s	K^{zz} meth.
1	0.997	$\mathbf{c}$	0.998	$\mathbf{c}$	0.953	$\mathbf{c_{min}}$
2	0.997	$\mathbf{c_{max}}$	0.998	$\mathbf{c_{max}}$	0.952	$\mathbf{r_s}$
3	0.997	$\mathbf{r_t}$	0.998	$\mathbf{r_t}$	0.952	$\mathbf{r_t}$
4	0.993	$\mu_{1/2}$	0.996	$\mathbf{c_{geo}}$	0.948	$\mathbf{c}$
5	0.993	$\mathbf{k_r}$	0.994	$\mathbf{r_s}$	0.916	$\mathbf{c_{geo}}$
6	0.992	$\mathbf{c_{geo}}$	0.993	$\mathbf{k_3}$	0.859	$\mathbf{k_r}$
7	0.991	$\mathbf{k_3}$	0.991	$\mathbf{k_r}$	0.856	$\mu_{\mathbf{g}}$
8	0.989	$\mathbf{r_s}$	0.991	$\mu_{1/2}$	0.854	$\mathbf{c_{max}}$
9	0.986	$\mu_{\mathbf{a}}$	0.989	$\mathbf{c_{min}}$	0.846	$\mathbf{k_1}$
10	0.986	$\mathbf{k_2}$	0.986	$\mathbf{k_4}$	0.736	$\mu_{\mathbf{h}}$
11	0.985	$\mathbf{k_4}$	0.985	$\mathbf{k_2}$	0.569	$\mathbf{k_3}$
12	0.983	$\mathbf{c_{min}}$	0.985	$\mu_{\mathbf{a}}$	0.562	$\mathbf{k_4}$
13	0.981	$\mu_{1/3}$	0.978	$\mu_{1/3}$	0.549	$\mu_{1/3}$
14	0.748	$\mu_{\mathbf{g}}$	0.747	$\mu_{\mathbf{g}}$	0.508	$\mu_{1/2}$
15	0.496	$\mathbf{k_1}$	0.492	$\mathbf{k_1}$	0.476	$\mathbf{k_2}$
16	0.141	$\mu_{\mathbf{h}}$	0.139	$\mu_{\mathbf{h}}$	0.442	$\mu_{\mathbf{a}}$

(b) 612 grands blocs, référence = Éléments finis

rg.	K^{xx} ρ_s	K^{xx} meth.	K^{yy} ρ_s	K^{yy} meth.	K^{zz} ρ_s	K^{zz} meth.
1	0.990	$\mathbf{c_{max}}$	0.990	$\mathbf{k_3}$	0.973	$\mathbf{r_t}$
2	0.988	$\mathbf{c}$	0.990	$\mathbf{c_{max}}$	0.972	$\mathbf{r_s}$
3	0.988	$\mathbf{k_3}$	0.988	$\mathbf{c}$	0.971	$\mathbf{c_{min}}$
4	0.986	$\mathbf{k_r}$	0.985	$\mathbf{r_t}$	0.968	$\mathbf{c}$
5	0.986	$\mathbf{r_t}$	0.983	$\mathbf{k_r}$	0.941	$\mathbf{c_{geo}}$
6	0.980	$\mathbf{c_{geo}}$	0.979	$\mathbf{c_{geo}}$	0.879	$\mathbf{c_{max}}$
7	0.979	$\mathbf{k_2}$	0.978	$\mathbf{k_2}$	0.798	$\mathbf{k_r}$
8	0.978	$\mathbf{r_s}$	0.978	$\mathbf{r_s}$	0.753	$\mathbf{k_1}$
9	0.976	$\mu_{\mathbf{a}}$	0.976	$\mu_{\mathbf{a}}$	0.637	$\mu_{\mathbf{h}}$
10	0.975	$\mathbf{c_{min}}$	0.974	$\mathbf{c_{min}}$	0.628	$\mu_{\mathbf{g}}$
11	0.972	$\mu_{1/2}$	0.972	$\mu_{1/2}$	0.530	$\mathbf{k_3}$
12	0.953	$\mu_{1/3}$	0.953	$\mu_{1/3}$	0.523	$\mathbf{k_4}$
13	0.922	$\mathbf{k_4}$	0.924	$\mathbf{k_4}$	0.373	$\mathbf{k_2}$
14	0.484	$\mu_{\mathbf{g}}$	0.487	$\mu_{\mathbf{g}}$	0.110	$\mu_{1/3}$
15	0.392	$\mathbf{k_1}$	0.388	$\mathbf{k_1}$	0.057	$\mu_{1/2}$
16	-0.189	$\mu_{\mathbf{h}}$	-0.186	$\mu_{\mathbf{h}}$	0.003	$\mu_{\mathbf{a}}$

(c) 612 grands blocs, référence = Différences finies

rg.	K^{xx} ρ_s	K^{xx} meth.	K^{yy} ρ_s	K^{yy} meth.	K^{zz} ρ_s	K^{zz} meth.
1	0.999	$\mathbf{r_t}$	0.998	$\mathbf{r_t}$	0.944	$\mathbf{r_t}$
2	0.998	$\mathbf{c_{geo}}$	0.998	$\mathbf{c_{geo}}$	0.942	$\mathbf{r_s}$
3	0.998	$\mathbf{c}$	0.997	$\mathbf{r_s}$	0.940	$\mathbf{c_{min}}$
4	0.998	$\mathbf{r_s}$	0.997	$\mathbf{c}$	0.937	$\mathbf{c}$
5	0.997	$\mathbf{c_{max}}$	0.997	$\mathbf{c_{max}}$	0.905	$\mathbf{c_{geo}}$
6	0.996	$\mathbf{c_{min}}$	0.995	$\mathbf{c_{min}}$	0.843	$\mathbf{c_{max}}$
7	0.991	$\mathbf{k_r}$	0.992	$\mathbf{k_r}$	0.832	$\mathbf{k_r}$
8	0.958	$\mathbf{k_3}$	0.962	$\mathbf{k_3}$	0.792	$\mathbf{k_1}$
9	0.957	$\mu_{\mathbf{a}}$	0.956	$\mu_{\mathbf{a}}$	0.673	$\mu_{\mathbf{h}}$
10	0.955	$\mu_{1/2}$	0.955	$\mu_{1/2}$	0.669	$\mu_{\mathbf{g}}$
11	0.953	$\mathbf{k_2}$	0.954	$\mathbf{k_2}$	0.529	$\mathbf{k_3}$
12	0.941	$\mu_{1/3}$	0.941	$\mu_{1/3}$	0.523	$\mathbf{k_4}$
13	0.871	$\mathbf{k_4}$	0.873	$\mathbf{k_4}$	0.400	$\mathbf{k_2}$
14	0.487	$\mu_{\mathbf{g}}$	0.490	$\mu_{\mathbf{g}}$	0.130	$\mu_{1/3}$
15	0.448	$\mathbf{k_1}$	0.448	$\mathbf{k_1}$	0.075	$\mu_{1/2}$
16	-0.180	$\mu_{\mathbf{h}}$	-0.176	$\mu_{\mathbf{h}}$	0.019	$\mu_{\mathbf{a}}$

(d) 67 584 petits blocs, référence = Éléments finis

rg.	K^{xx} ρ_s	K^{xx} meth.	K^{yy} ρ_s	K^{yy} meth.	K^{zz} ρ_s	K^{zz} meth.
1	0.999	$\mathbf{r_t}$	0.999	$\mathbf{r_t}$	0.998	$\mathbf{c_{min}}$
2	0.998	$\mathbf{c}$	0.999	$\mathbf{c}$	0.998	$\mathbf{r_s}$
3	0.998	$\mathbf{c_{max}}$	0.998	$\mathbf{c_{max}}$	0.997	$\mathbf{r_t}$
4	0.998	$\mathbf{k_r}$	0.998	$\mathbf{c_{geo}}$	0.997	$\mathbf{c}$
5	0.997	$\mathbf{c_{geo}}$	0.997	$\mathbf{k_r}$	0.993	$\mathbf{k_r}$
6	0.996	$\mathbf{r_s}$	0.997	$\mathbf{r_s}$	0.993	$\mathbf{c_{geo}}$
7	0.996	$\mathbf{k_3}$	0.995	$\mathbf{k_3}$	0.989	$\mathbf{k_1}$
8	0.994	$\mathbf{c_{min}}$	0.994	$\mathbf{c_{min}}$	0.980	$\mathbf{c_{max}}$
9	0.993	$\mathbf{k_2}$	0.993	$\mathbf{k_2}$	0.959	$\mathbf{k_3}$
10	0.987	$\mathbf{k_4}$	0.987	$\mathbf{k_4}$	0.959	$\mathbf{k_4}$
11	0.983	$\mu_{1/2}$	0.983	$\mu_{1/2}$	0.884	$\mu_{\mathbf{g}}$
12	0.976	$\mu_{\mathbf{a}}$	0.975	$\mu_{\mathbf{a}}$	0.873	$\mathbf{k_2}$
13	0.960	$\mu_{1/3}$	0.960	$\mu_{1/3}$	0.771	$\mu_{1/3}$
14	0.945	$\mathbf{k_1}$	0.944	$\mathbf{k_1}$	0.702	$\mu_{1/2}$
15	0.811	$\mu_{\mathbf{g}}$	0.811	$\mu_{\mathbf{g}}$	0.680	$\mu_{\mathbf{h}}$
16	0.255	$\mu_{\mathbf{h}}$	0.254	$\mu_{\mathbf{h}}$	0.580	$\mu_{\mathbf{a}}$

TAB. 7.10 : *Classification des techniques par coefficient de corrélation de rang maximum (ρ_s)*

la valeur de référence en ordonnée, il y aura deux points distincts pour les deux milieux. En prolongeant le raisonnement à de nombreux milieux ayant des structures spatiales différentes, la non prise en compte de l'agencement spatial par les moyennes algébriques entraîne une dispersion du nuage de points et donc un coefficient de corrélation inférieur à 1. Ce phénomène ne peut s'observer que si les milieux étudiés ont une variabilité d'agencement spatial suffisante, ce qui n'est généralement pas le cas avec les milieux log-normaux isotropes sur lesquels sont basées de nombreuses études.

Les trois techniques de renormalisation prennent en compte de façon approchée cet agencement spatial, et il n'est donc pas étonnant que la dispersion soit réduite et que les coefficients de corrélation soient plus proches de 1.

La formule de Kruel-Romeu est à la frontière car elle prend en compte l'agencement spatial (en utilisant les bornes de Cardwell et Parsons) avec moins de finesse que les trois autres techniques. Ainsi pour les petits blocs, le résultat est bon, mais pour les grands blocs et pour K^{zz}, le résultat est moins bon.

7.6.3 Effet de la valeur de référence

Comme on peut le noter sur les tableaux présentés précédemment, les classements ne sont pas tout à fait identiques selon la valeur de référence (éléments finis ou différences finies). Cette observation doit être modérée par le fait que les différences sont faibles : il s'agit essentiellement d'interversion entre deux techniques. Il semble donc que le choix de la valeur de référence calculée avec *HIGHDEN* ou *TRIMULEC* ne soit pas d'une importance majeure dans le classement des techniques rapides.

7.6.4 Étude des nuages de points

Les figures 7.8, 7.9, 7.10 et 7.11 présentent les nuages de points. Sur chaque diagramme, un point représente un milieu synthétique, ses coordonnées sont $x =$ la perméabilité équivalente calculée par une méthode rapide et $y =$ la perméabilité équivalente calculée avec *TRIMULEC*[2]. La couleur des points correspond au type de milieu synthétique : le rouge correspond aux milieux *HERESIM* ayant une longue portée ; le bleu foncé correspond aux milieux *HERESIM* ayant une courte portée ; le vert correspond aux milieux Booléens ayant des inclusions ellipsoïdales ; le bleu clair correspond aux milieux Booléens ayant des inclusions sinusoïdales. En raison de l'importance de l'anisotropie, des graphes séparés pour K^{xx}, K^{yy} et K^{zz} ont été réalisés. Les graphes pour K^{xx} et K^{yy} étant très similaire, nous ne montrons que les graphes pour K^{xx} et K^{zz}.

Ces diagrammes montrent clairement la différence entre les techniques dont le nuage de points est dispersé ou non et confirme les classements établis à partir des coefficients de corrélation linéaire. En particulier, il devient clair que pour K^{zz} pour les grands blocs, aucune technique ne donne de résultat satisfaisant (figure 7.9).

De plus, les nuages de points permettent de vérifier visuellement les bornes théoriques. Sur les graphes concernant les bornes de Wiener (μ_a et μ_h) et ceux relatifs aux bornes de Cardwell et Parsons (k_1 et k_2) on observe effectivement que les points sont toujours du bon côté de la droite $y = x$ et que les inégalités $\mu_h < K_{ref} < \mu_a$ et $k_1 < K_{ref} < k_2$ sont vérifiées dans tous les cas.

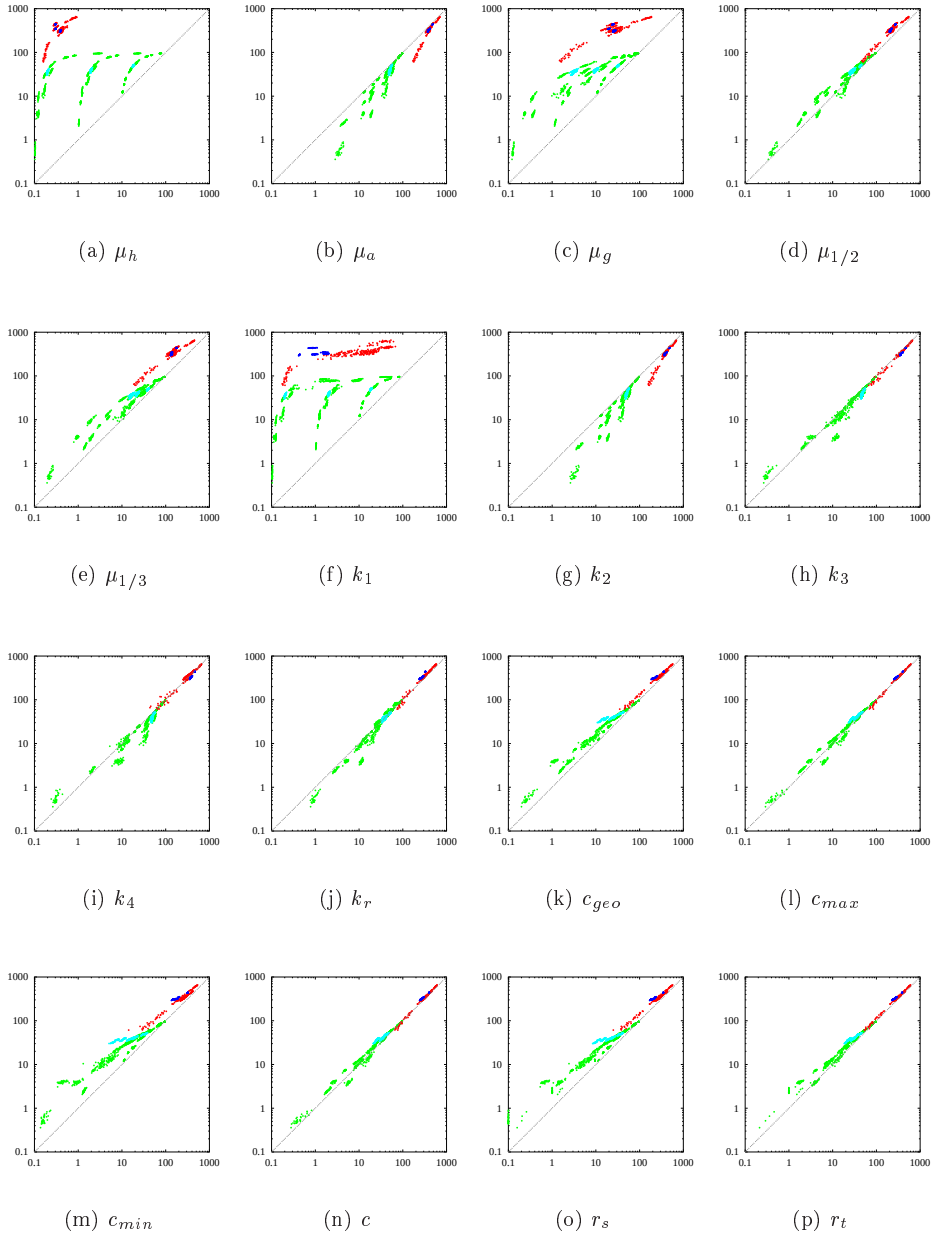
Comme nous l'attendions, les valeurs c_{min} et c_{max} présentent un écart plus faible que les bornes de Cardwell et Parsons, mais n'encadrent pas forcément la perméabilité de référence. Dans certains cas c_{min} et c_{max} peuvent être inférieures toutes les deux à la perméabilité de référence (figures 7.11 (l) et 7.11 (m)), mais, compte tenu du biais possible de la valeur de référence, nous ne pouvons pas conclure que c_{min} et c_{max} ne sont pas des bornes.

L'utilisation des couleurs sur les graphes permet d'identifier les milieux appartenant aux différents modèles géostatistiques. Elle met en valeur la nécessité d'utiliser plusieurs modèles géostatistiques différents pour tester la robustesse des méthodes de changement d'échelle. En effet, on constate par exemple sur la figure 7.9 (c) que la moyenne géométrique donne de bons résultats pour les milieux booléens (les points verts) mais donne de mauvais résultats pour les milieux *HERESIM* (points rouges).

Les graphes permettent également de distinguer les différents contrastes de perméabilité utilisés pour les milieux booléens. Cela est particulièrement clair sur la figure 7.11 (a), où l'on voit nettement trois nuages verts séparés qui correspondent aux trois contrastes de perméabilité : $K_{min}/K_{max} = 1000, 100$, et 10 pour les mêmes structures de milieu.

Une étude encore plus détaillée des graphes correspondant aux grands blocs montre que les milieux engendrés avec le même modèle géostatistique et avec les mêmes paramètres sont regroupés en paquets alignés.

[2] Les mêmes figures ont été également réalisées avec la perméabilité de référence calculée par différences finies et montrent les même résultats



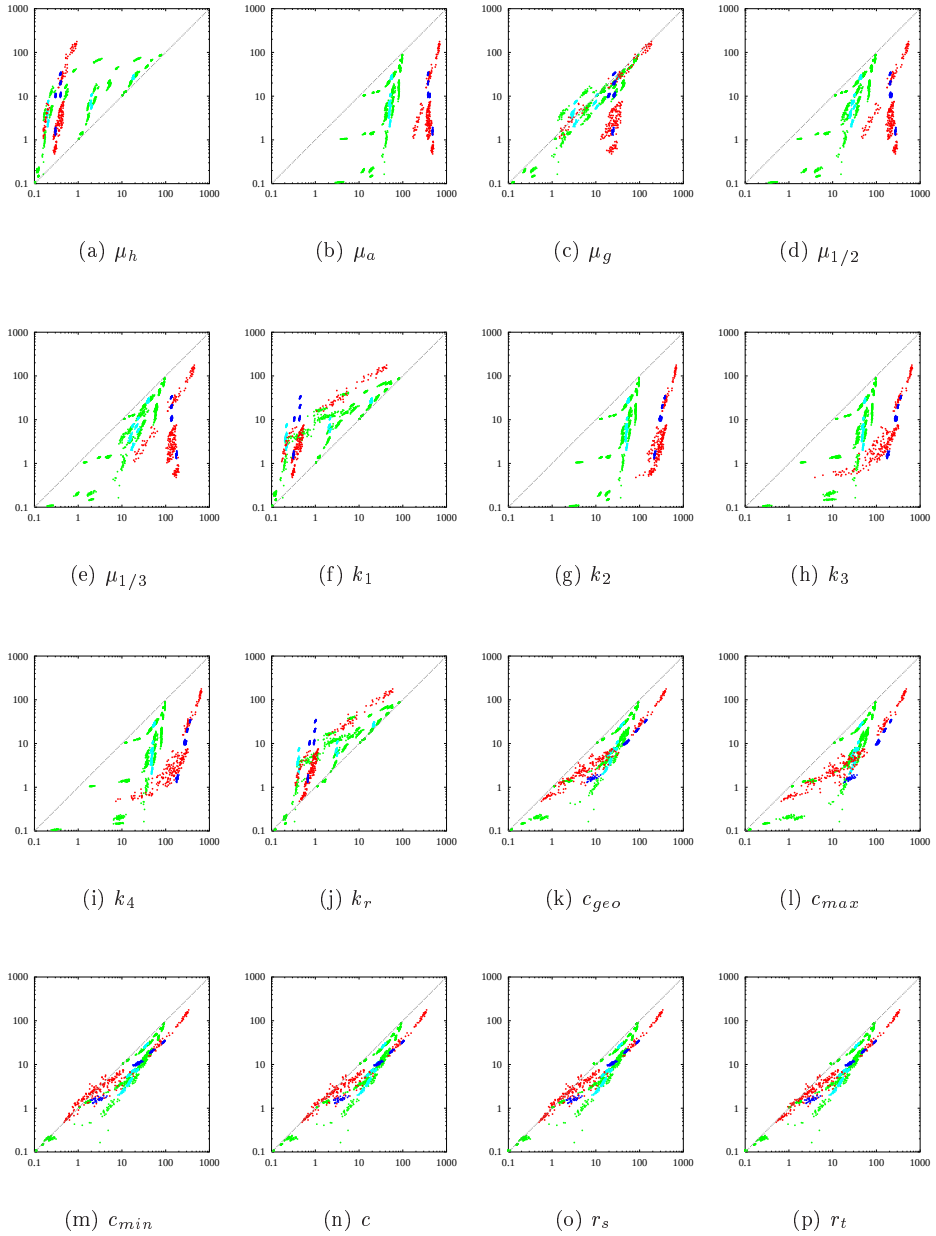
(a) μ_h (b) μ_a (c) μ_g (d) $\mu_{1/2}$

(e) $\mu_{1/3}$ (f) k_1 (g) k_2 (h) k_3

(i) k_4 (j) k_r (k) c_{geo} (l) c_{max}

(m) c_{min} (n) c (o) r_s (p) r_t

FIG. 7.8 : *Nuage de points $K^{xx}_{ref} = f(K^{xx}_{rapide})$ pour toutes les techniques rapides testées, 1 944 grands blocs, référence = éléments finis*



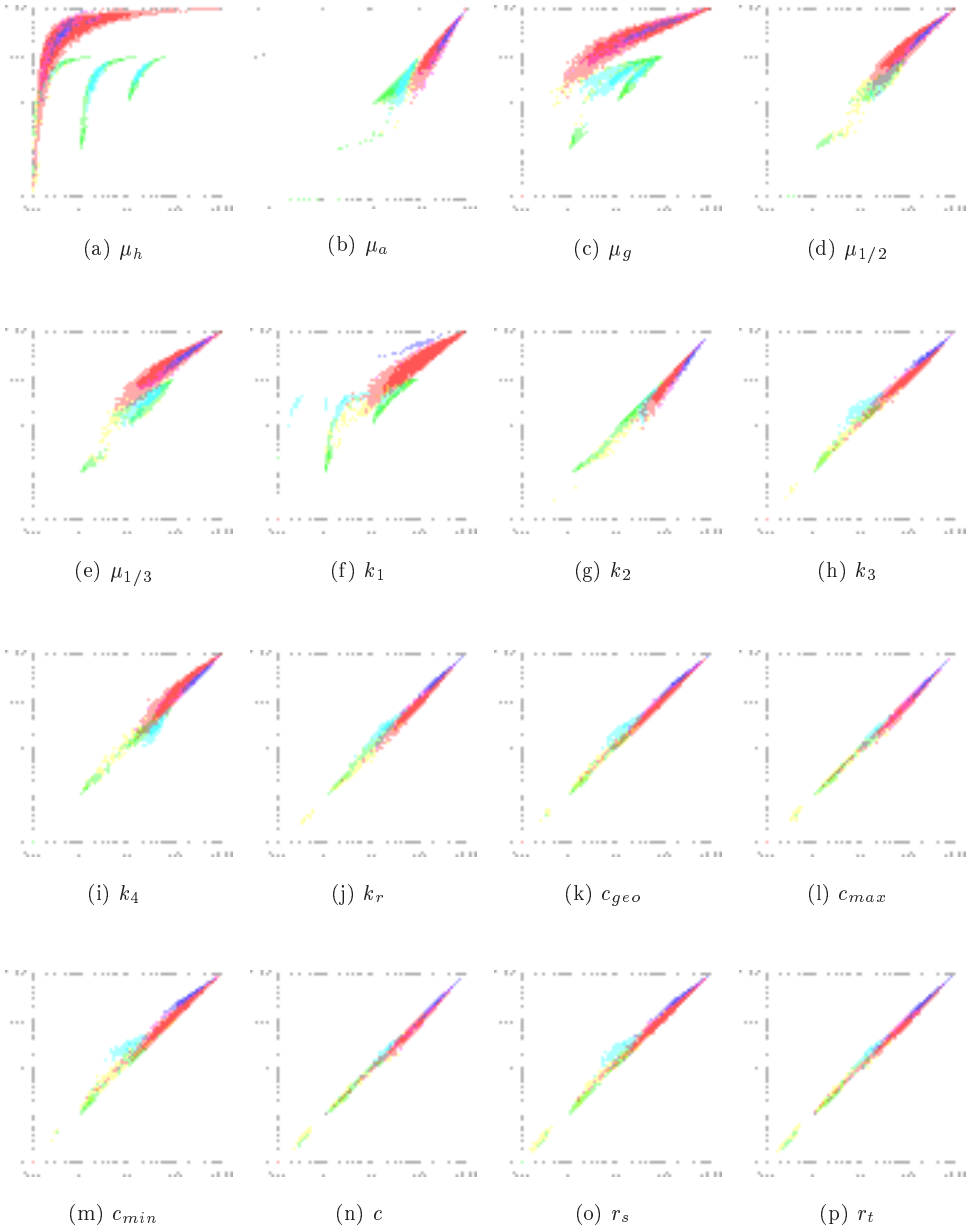
(a) μ_h (b) μ_a (c) μ_g (d) $\mu_{1/2}$

(e) $\mu_{1/3}$ (f) k_1 (g) k_2 (h) k_3

(i) k_4 (j) k_r (k) c_{geo} (l) c_{max}

(m) c_{min} (n) c (o) r_s (p) r_t

FIG. 7.9 : *Nuage de points $K^{zz}_{ref} = f(K^{zz}_{rapide})$ pour toutes les techniques rapides testées, 1 944 grands blocs, référence = éléments finis*



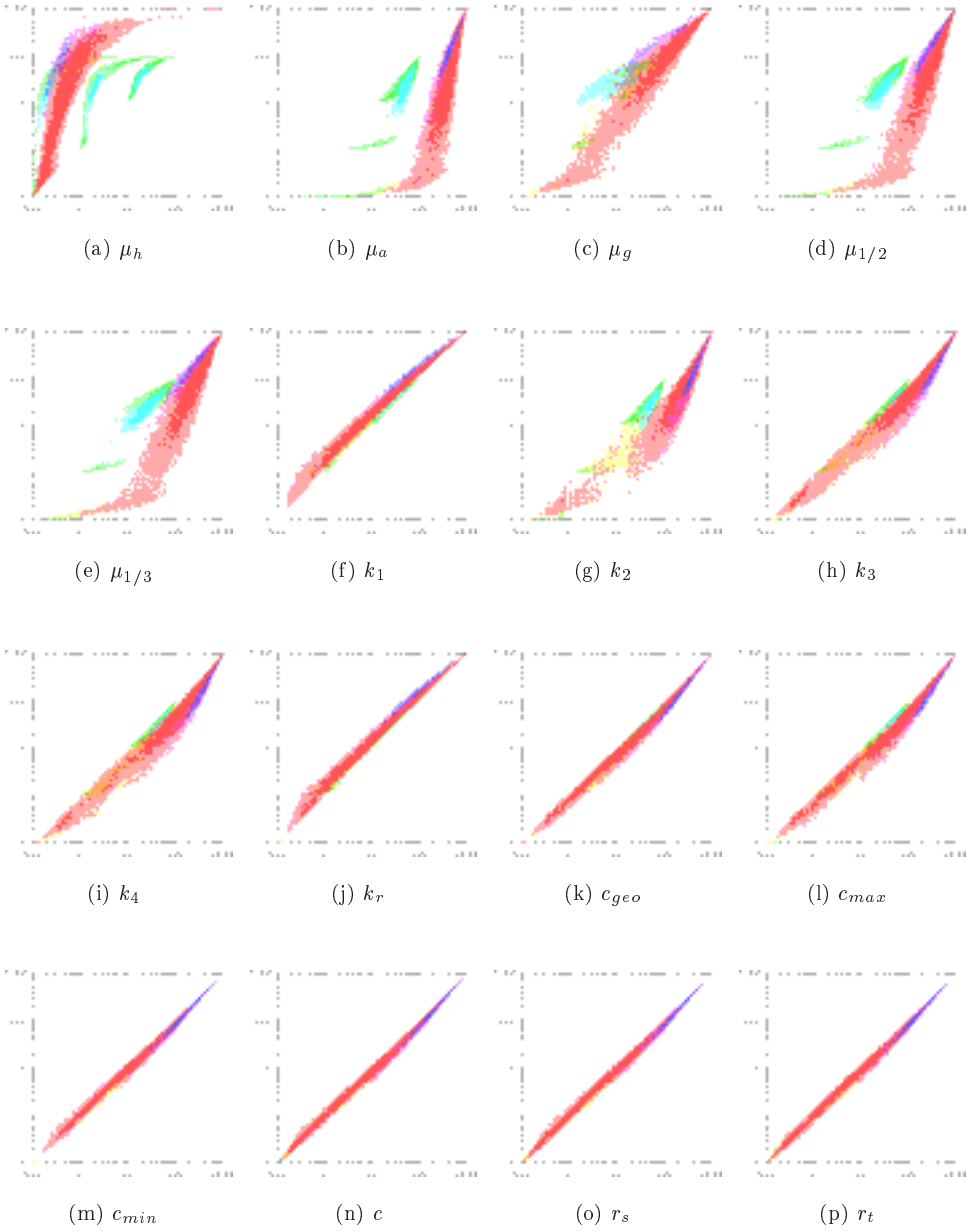
(a) μ_h (b) μ_a (c) μ_g (d) $\mu_{1/2}$

(e) $\mu_{1/3}$ (f) k_1 (g) k_2 (h) k_3

(i) k_4 (j) k_r (k) c_{geo} (l) c_{max}

(m) c_{min} (n) c (o) r_s (p) r_t

FIG. 7.10 : *Nuage de points $K^{xx}_{ref} = f(K^{xx}_{rapide})$ pour toutes les techniques rapides testées, 67 584 petits blocs, référence = différences finies*



(a) μ_h (b) μ_a (c) μ_g (d) $\mu_{1/2}$

(e) $\mu_{1/3}$ (f) k_1 (g) k_2 (h) k_3

(i) k_4 (j) k_r (k) c_{geo} (l) c_{max}

(m) c_{min} (n) c (o) r_s (p) r_t

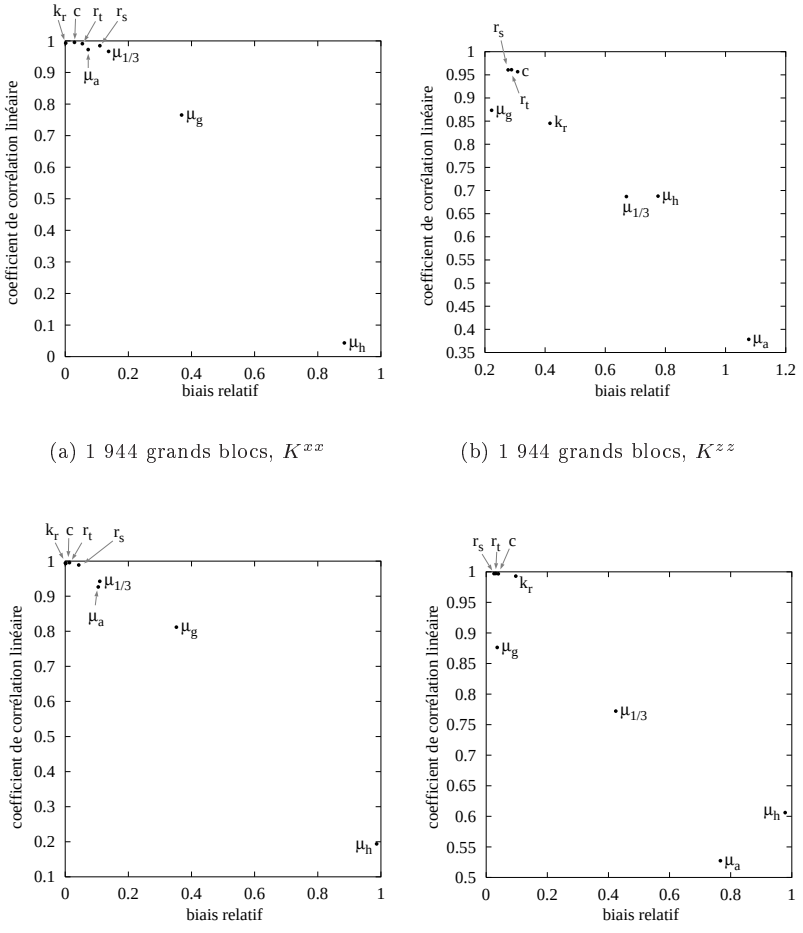
FIG. 7.11 : *Nuage de points $K^{zz}_{ref} = f(K^{zz}_{rapide})$ pour toutes les techniques rapides testées, 67 584 petits blocs, référence = différences finies*

7.6.5 Synthèse

Pour qu'une technique soit fiable il faut qu'elle donne des résultats corrects quelle que soit la taille des blocs, quelle que soit l'anisotropie et quel que soit le modèle géologique employé.

On peut tenter de résumer les observations concernant la fiabilité des différentes techniques à l'aide de leur représentation dans l'espace des critères de précision (figure 7.12). Dans ces représentations, un point correspond à une technique et ses coordonnées sont le biais relatif et le coefficient de corrélation linéaire. Plus le point est proche du coin en haut à gauche ($e = 0$, $\rho = 1$), plus la technique est précise. Pour qu'une technique soit déclarée fiable, il faut qu'elle ne s'éloigne jamais trop du point idéal, lorsque les conditions du test changent.

La figure 7.12 permet de visualiser l'effet de l'anisotropie en étudiant comment les techniques se déplacent dans le graphe lorsque l'on passe de K^{xx} (colonne de gauche) à K^{zz} (colonne de droite), et l'effet de la taille du bloc lorsque l'on passe de la ligne du haut à la ligne du bas.



(a) 1 944 grands blocs, K^{xx}

(b) 1 944 grands blocs, K^{zz}

(c) 67 584 petits blocs, K^{xx}

(d) 67 584 petits blocs, K^{zz}

FIG. 7.12 : *Fiabilité des techniques (référence = éléments finis).*

Effet de la taille des blocs

La comparaison des figures 7.12 (a) et 7.12 (c) montre que l'effet de la taille des blocs sur les estimations de la perméabilité en x est nul : le classement est inchangé. En revanche, les figures 7.12 (b) et 7.12 (d) montrent que la taille des blocs influe sur les classements obtenus à partir des perméabilités verticales : on note une nette dégradation de la précision de toutes les techniques pour les grands blocs, la chute la plus importante a lieu pour k_r.

On constate l'existence de quelques exceptions. Par exemple la moyenne de puissance 1/2 $\mu_{1/2}$ se révèle nettement plus précise pour les grands blocs que pour les petits blocs.

Plusieurs interprétations de ces faits sont possibles. Mais, notons tout d'abord que les différences principales entre les grands blocs et les petits blocs sont les suivantes :
- le rapport entre la taille des hétérogénéités (portée des modèles *HERESIM*, taille des inclusions) et la taille du domaine est plus grand pour les petits blocs que pour les grands ;
- le nombre de mailles dans les petits blocs (2 048) est plus faible que pour les grands blocs (1 048 576) ;
- d'un point de vue expérimental, nous avons moins de données sur les grands blocs (1 944 expériences) que sur les petits blocs (67 584).

L'erreur qui augmente pour K^{zz} avec la taille des blocs peut être due à l'algorithme récursif utilisé dans les algorithmes de renormalisation. Les grands blocs ayant un nombre de mailles plus grand que les petits blocs, le nombre d'approximations réalisées à chaque étape de l'algorithme de renormalisation augmente. Cette erreur d'approximation serait alors plus importante dans la direction z que dans les deux autres directions, on aborde ici l'effet de l'aplatissement qui sera discuté dans la section suivante.

Le manque de données expérimentales pour les grands blocs peut expliquer le résultat de $\mu_{1/2}$.

La confirmation ou le rejet de ces hypothèses nécessiterait de nouvelles expérimentations numériques.

Effet de l'anisotropie

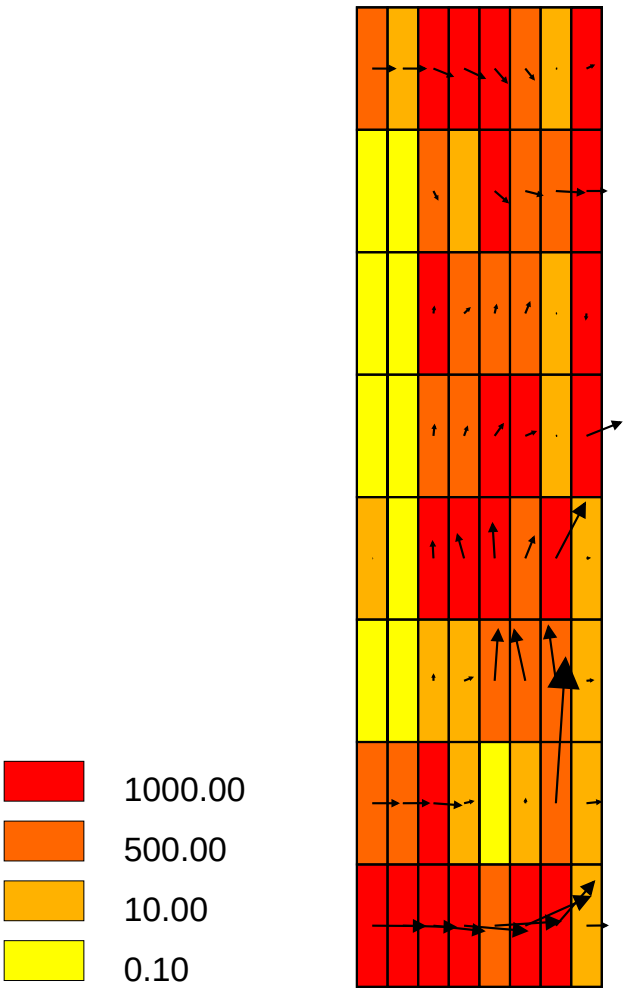
La comparaison des figures 7.12 (a) et 7.12 (b), et la comparaison des figures 7.12 (b) et 7.12 (d) montrent que pour les deux tailles de blocs, l'effet de l'anisotropie est important : les classements sont modifiés. On observe une dégradation quasi-systématique de la précision des différentes techniques. Cela est très clair pour les moyennes algébriques. Les trois renormalisations sont les techniques qui s'écartent le moins du point idéal ($e = 0, \rho = 1$). Et on retrouve le comportement intermédiaire de la formule de Kruel-Romeu.

Pour interpréter ces observations, notons que l'origine de l'anisotropie est double : elle est due à l'aplatissement des mailles élémentaires de la grille et à l'agencement spatial des perméabilités locales en strates de même perméabilité. De plus pour les milieux booléens avec des inclusions sinusoïdales, la forme de l'inclusion provoque une anisotropie entre les directions x et y.

D'un point de vue physique l'effet de l'anisotropie est de modifier le champs de vitesse. Assez grossièrement, si l'on considère une maille déformée de faible perméabilité : elle sera traversée si l'écoulement est perpendiculaire à la direction d'aplatissement (figure 7.13 b) et l'écoulement la contournera si elle est allongée dans la direction d'écoulement (figure 7.13 c).

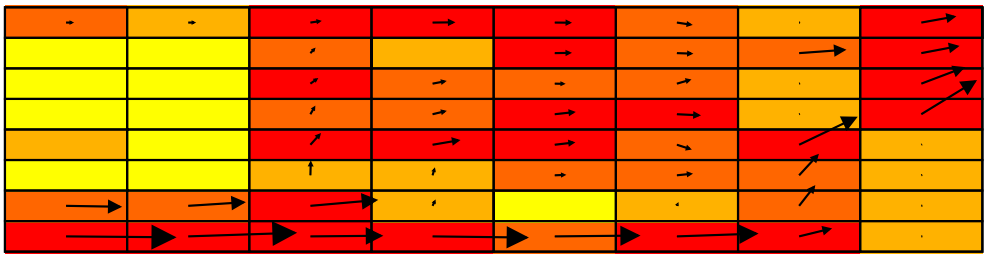
Ainsi, c'est lorsque l'écoulement est le plus éloigné d'un écoulement parallèle que les techniques de changement d'échelle sont les moins précises.

En ce qui concerne l'anisotropie horizontale pour les milieux booléens, nous avons calculé le biais relatif et les coefficients de corrélation séparément pour les milieux à inclusions ellipsoïdales et sinusoïdales. Cela nous permet d'étudier l'effet de l'anisotropie horizontale sur la classification des



(a) Codage des perméabilités

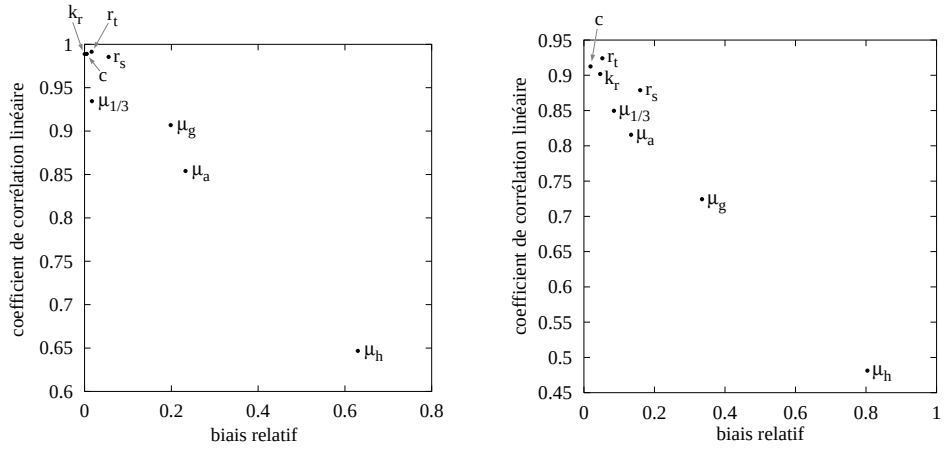
(b) Mailles aplaties



(c) Mailles allongées

FIG. 7.13 : *Influence de l'anisotropie due à la géométrie du maillage sur le champ de vitesse.*

méthodes rapides. Les résultats de ces calculs sont présentés sur la figure 7.14. On observe que la précision de l'ensemble des techniques se dégrade pour les milieux à inclusions sinusoïdales. En particulier la renormalisation standard devient nettement moins précise que la renormalisation tensorielle, la renormalisation simplifiée ou la formule de Kruel-Romeu.



(a) petits blocs, inclusions ellipsoïdales, K^{xx}

(b) sub-blocks, inclusions sinusoïdales, K^{xx}

FIG. 7.14 : *Influence de l'anisotropie horizontale, due à la géométrie des inclusions, sur la classification des méthodes de changement d'échelle pour les petits blocs booléens.*

7.7 Conclusion

Huit techniques rapides pour estimer la perméabilité équivalente d'un milieu hétérogène quelconque ont été testées à partir d'expériences numériques sur des milieux synthétiques. Les milieux synthétiques ont été construits par Gaëlle Le Loc'h en utilisant deux modèles géostatistiques : les Gaussiennes Seuillées (logiciel *HERESIM*) et le modèle Booléen. Pour une partie des milieux, la perméabilité de référence a été calculée par différences finies avec le logiciel *HIGHDEN* par David Griffin à l'université de Newcastle et pour la totalité des milieux la perméabilité de référence a été calculée par la méthode des éléments finis avec le logiciel *TRIMULEC* dans le cadre de la présente thèse. La comparaison des huit techniques rapides avec les deux valeurs de référence possibles et aux deux échelles considérées a donné les résultats suivants.

⇝ Les *méthodes algébriques* montrent quasiment toujours une dispersion importante. Cela signifie qu'elles ne fournissent pas d'estimations fiables, car même si dans certains cas ces estimations sont correctes, le risque d'erreur est important. Nous déconseillons donc l'utilisation de ce type de formule dans le cas général.

Parmi les quatre techniques restantes, nous rejetons la *technique de Kruel-Romeu* qui est la moins fiable pour estimer la perméabilité perpendiculairement à la stratification résultant de l'aplatissement des mailles et de l'anisotropie des longueurs de corrélation. On retrouve là le résultat esquissé lors du test préliminaire du chapitre 5. Nous rejetons également la *renormalisation standard* qui est la moins fiable pour l'estimation de la perméabilité horizontale.

⇝ Les deux techniques restantes sont la *renormalisation tensorielle* et la *renormalisation simplifiée*. Elles ressortent du test comme les techniques les plus fiables.

En particulier, elles donnent des estimations de la perméabilité horizontale pour les grands blocs et des perméabilités verticale et horizontale pour les petits blocs très voisines des perméabilités de référence. Toutefois, elles ne sont pas toujours précises. Par exemple, l'erreur est importante pour la perméabilité verticale pour les grands blocs, mais les autres techniques donnent des résultats encore plus erronés. De plus, il est possible que d'autres techniques rapides n'ayant pas été testées dans le cadre de cette thèse présentent une meilleure fiabilité.

⇝ Le gain en temps calcul permis par l'utilisation des renormalisations tensorielle et simplifiée est important. La renormalisation simplifiée permet d'estimer la perméabilité équivalente environ 200 fois plus rapidement que ne le permet la résolution complète de l'équation de la diffusivité par une technique numérique (spécialement dédiée à des calculs intensifs) et la renormalisation tensorielle est quant à elle environ 50 fois plus rapide que la technique numérique. Cet argument nous amène donc à proposer l'emploi de la renormalisation simplifiée, au moins dans tous les cas où les termes non diagonaux du tenseur de perméabilité ne sont pas nécessaires. Lorsque ce n'est pas le cas (axes d'anisotropie clairement non parallèles aux axes du maillage) nous conseillons l'utilisation de la renormalisation tensorielle.

Chapitre 8

Application aux écoulements diphasiques Un test numérique

Les principaux utilisateurs des méthodes de calcul de la perméabilité équivalente sont pour l'instant les compagnies pétrolières. De plus, dans d'autres domaines nécessitant la modélisation d'écoulements polyphasiques, comme par exemple le stockage de gaz naturel, les techniques de modélisation géologique et de changement d'échelle sont amenées à se développer. Il nous a donc semblé important de tester la renormalisation simplifiée dans le cas d'écoulements mettant en jeu au moins deux phases.

Comme dans le chapitre précédent, nous avons comparé les résultats obtenus par la renormalisation simplifiée à une référence calculée par simulation numérique et aux résultats obtenus par différentes techniques. Mais ici, le temps calcul nécessaire ne nous a pas permis d'effectuer un test qui ait une signification statistique. Nous avons étudié en détail deux cas de milieux hétérogènes bi-dimensionnels : un milieu périodique et un milieu binaire. Les conditions d'écoulement sont de type quart de five-spot et l'on néglige l'effet de la pression capillaire.

Contrairement à la plupart des tests présentés dans la littérature, nous avons quantifié l'erreur de chaque méthode par rapport à la référence. Les classements ainsi obtenus, dans le cas du milieu périodique (§ 8.3) et dans le cas du milieu binaire (§ 8.4), ne nous permettent pas de conclure que la renormalisation simplifiée est meilleure ou pire que les autres techniques. Ces résultats mettent, toutefois, en évidence la nécessité de calculer des perméabilités relatives équivalentes et montrent l'importance du choix du milieu et des conditions aux limites dans la conception du test.

Mais auparavant (§ 8.1), nous rappelons les équations des écoulements polyphasiques et les principales approches permettant le changement d'échelle pour ce type d'écoulement. Nous définissons ensuite (§ 8.2) les outils, les méthodes et la terminologie qui seront utilisés pour les deux cas tests.

8.1 Théorie

8.1.1 Équations phénoménologiques macroscopiques

Pour décrire les écoulements polyphasiques, les équations les plus couramment utilisées sont les équations introduites par Wyckoff and Botset (1936) sur des bases expérimentales. On en trouvera une description détaillée dans Marle (1972). L'équation de base est une équation reliant la vitesse de la phase i à son gradient de pression. C'est l'*équation de Darcy généralisée*, fréquemment dénommée *schéma de Muskat* (Muskat, Wyckoff, Botset, and Meres 1937) :

$$\boldsymbol{v}^i = -\frac{k k_r^i(s^i)}{\mu^i}\left(\mathbf{grad}\, p^i + \rho_i g\, \mathbf{grad}\, z\right) \tag{8.1}$$

Cette équation se différencie de la loi Darcy par la présence du facteur multiplicatif $k_r^i(s^i)$: la *perméabilité relative*, qui dépend de la phase (i) considérée et de la saturation du fluide (s^i). C'est une grandeur adimensionnelle, habituellement comprise entre 0 et 1. Nous rappelons que la saturation est définie comme le volume occupé par le fluide de la phase considérée sur le volume des pores.

$$s^i = \frac{V \text{ fluide } i}{V \text{ pores}} \tag{8.2}$$

La loi de Darcy généralisée est parfois sujette à discussion ; plusieurs auteurs suggèrent notamment qu'il y ait un couplage des équations correspondant à chaque phase par l'intermédiaire de perméabilités croisées (Zapata and Lake 1981; Kalaydjian 1987). Bien qu'ayant conscience de ce problème, nous ne l'avons pas pris en compte dans cette étude.

On dispose également d'une équation de conservation pour chaque phase, supposée incompressible :

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v}^i = -\omega \frac{\partial s^i}{\partial t} \tag{8.3}$$

avec ω qui représente la porosité du milieu ; et d'une relation de continuité entre les phases pour un volume de pore totalement occupé. Pour un écoulement diphasique on a :

$$s^1 + s^2 = 1 \qquad \Rightarrow \qquad s = s^1 = 1 - s^2 \tag{8.4}$$

Enfin, si l'on néglige l'effet de la pression capillaire, on a égalité entre les pressions des phases :

$$p^1 = p^2 = p \tag{8.5}$$

Finalement les variables d'un problème d'écoulement diphasique sans pression capillaire sont la saturation $s = s^1$ en fluide 1, la pression p et les vitesses de chaque fluide $\boldsymbol{v}^1$ et $\boldsymbol{v}^2$.

8.1.2 Équations phénoménologiques mégascopiques

Équations homogènes

La théorie de l'homogénéisation (Bourgeat 1984; Sáez et al. 1989; Amaziane 1993; Bourgeat 1996) et la théorie de la prise de moyenne avec fermeture (Quintard and Whitaker 1988; Quintard and Whitaker 1990a; Quintard and Whitaker 1990b) permettent de démontrer que l'écoulement polyphasique à l'échelle mégascopique est régi par une loi de Darcy généralisée, analogue à celle de l'échelle macroscopique.

$$\boldsymbol{V^i} = -\frac{\boldsymbol{K} K_r^i(S^i)}{\mu_i}\left(\mathbf{grad}\, P^i + \rho_i g\, \mathbf{grad}\, z\right) \tag{8.6}$$

Ces démonstrations supposent que la loi de Darcy généralisée est valide à l'échelle macroscopique, que la taille des hétérogénéités est petite devant la taille du domaine et que l'écoulement est quasi-permanent (pour la théorie de la prise de moyenne spatiale).

Avec l'hypothèse supplémentaire où les perméabilités relatives macroscopiques sont constantes dans l'espace, ces auteurs démontrent que les perméabilités relatives mégascopiques sont identiques aux perméabilités relatives macroscopiques.

$$K_r^i(S^i) = k_r^i(s^i) \tag{8.7}$$

Ils démontrent également que la perméabilité absolue mégascopique s'exprime à l'aide d'un système d'équations différentielles identique à celui permettant de déterminer la perméabilité équivalente dans le cas d'un écoulement monophasique (voir par exemple l'équation 3.21, page 37).

Pour changer d'échelle, dans le cas d'écoulements polyphasiques, de nombreux auteurs (Amaziane et al. 1991; Njifenjou 1994; Durlofsky et al. 1994; Badea and Bourgeat 1995) se basent sur ces résultats théoriques et se limitent au calcul de la perméabilité absolue équivalente.

Cette approche semble donner de bons résultats tant que les hypothèses sous-jacentes sont approximativement vérifiées. Nous constatons toutefois, dans les expériences numériques de Amaziane et al. (1991), qu'il peut y avoir une nette dégradation des résultats lorsque la taille des hétérogénéités n'est pas très petite par rapport à la taille du domaine.

Pseudo-fonctions de perméabilité relative

Une approche radicalement différente est de supposer que la loi de Darcy généralisée (équation 8.6) s'applique à l'échelle mégascopique, mais que les perméabilités relatives sont différentes aux deux échelles. Lors du changement d'échelle, les perméabilités relatives sont utilisées dans un modèle numérique dont le nombre de mailles est réduit. Les perméabilités relatives sont alors déterminées, par calage, de façon à compenser les erreurs numériques résultant de la discrétisation grossière. Pour indiquer qu'il s'agit de courbes utilisées comme des perméabilités relatives, mais que ce n'en sont pas réellement, l'usage est de les dénommer *pseudo-fonctions* de perméabilité relative.

En pratique, une pseudo-fonction différente est calculée pour chaque maille du maillage grossier. Le principe général du calcul des pseudo-fonctions est le suivant. La partie du maillage fin correspondant à la maille grossière est isolée. On simule un écoulement diphasique sur ce bloc. Puis le bloc hétérogène est remplacé par une maille unique, soumise aux même conditions aux limites que le bloc. Sa perméabilité relative est ajustée pour que le résultat de la simulation sur la maille unique soit le plus proche possible de celui obtenu sur le bloc hétérogène. Plusieurs variantes de la méthode existent (Kyte and Berry 1975; Kossack, Aasen, and Opdal 1989; Stone 1991; Muggeridge 1991) ; nous renvoyons à Abbaszadeh (1995) ou Fayers and Hewett (1992) pour une synthèse bibliographique.

Perméabilité relative équivalente

Une approche intermédiaire consiste à supposer que la loi de Darcy généralisée est valide à l'échelle mégascopique et qu'il faut calculer une perméabilité relative équivalente ayant une signification physique (indépendante du biais numérique).

Cette approche se distingue de l'approche par équations homogènes car même si la perméabilité relative est homogène à l'échelle macroscopique, une hétérogénéité de perméabilité absolue peut provoquer une différence entre les perméabilités relatives macroscopiques et mégascopiques.

Deux techniques ont été proposées pour calculer les perméabilités relatives équivalentes. Muggeridge (1991) propose de simuler numériquement une expérience de mesure de la perméabilité relative et d'interpréter le résultat comme on le ferait s'il s'agissait d'une expérience de laboratoire. Il utilise pour cela la méthode graphique de Jones and Roszelle (1978). King, Muggeridge, and Price (1993) proposent une méthode rapide de type renormalisation.

L'approche choisie

Nous avons adopté initialement le point de vue de la théorie des équations homogènes en ne calculant que les perméabilités absolues équivalentes. Nous nous sommes alors aperçus que nous étions incapables de reproduire le comportement des fluides dans le milieu hétérogène avec un milieu homogène équivalent dont seule la perméabilité absolue avait été modifiée.

Nous pensons donc qu'il est nécessaire de calculer des perméabilités relatives équivalentes pour pouvoir faire un changement d'échelle complet, et nous partageons ainsi les points de vue de Muggeridge (1991) et de King et al. (1993).

Toutefois, le but de la thèse n'étant pas de résoudre le problème du calcul des perméabilités relatives équivalentes, nous montrons, dans la suite de ce chapitre et pour les deux cas tests, deux séries de résultats :
- ceux obtenus sans modifier les perméabilités relatives et en utilisant différentes méthodes de calcul de la perméabilité équivalente absolue ;
- ceux obtenus en modifiant la perméabilité relative équivalente et en utilisant la perméabilité absolue calculée par renormalisation simplifiée.

La méthode utilisée pour calculer la perméabilité relative équivalente est présentée dans le paragraphe 8.2.3.

8.2 Outils et méthodes

8.2.1 Le modèle numérique *SUNIDJ*

Toutes les simulations diphasiques présentées dans ce chapitre ont été réalisées par Alain Genty à l'aide du modèle numérique *SUNIDJ* développé au Centre d'Informatique Géologique (François 1993). Il est basé sur une méthode aux éléments finis mixtes en pression et discontinus en saturation. Les éléments finis mixtes résolvent simultanément le champ de pression et de vitesse, ce qui permet de bien décrire le champ de vitesse, y compris dans des milieux présentant de forts contrastes de perméabilité absolue (Mosé et al. 1994; Durlofsky 1994). Les éléments finis discontinus en saturation permettent la simulation de fronts abrupts de concentration. Ces caractéristiques rendent le modèle particulièrement adapté à la modélisation des interfaces en mouvement. On notera de plus que le modèle a récemment fait l'objet d'une validation par confrontation à des expériences de laboratoire (Genty 1996).

8.2.2 Le quart de five-spot

Les simulations sont réalisées avec des conditions aux limites du type de celles utilisées dans le domaine pétrolier, ou plus généralement dans tout dispositif d'injection-pompage permettant l'extraction d'un fluide d'un milieu poreux[1]. Le dispositif consiste en un ensemble de puits d'injection

[1] Il peut s'agir par exemple d'un dispositif de nettoyage de sol pollué, voir par exemple Schäfer and Kinzelbach (1996)

et de puits de soutirage disposés alternativement aux mailles d'une grille régulière (figure 8.1). On peut démontrer que si le milieu est homogène, l'étude d'une cellule élémentaire carrée, avec un puits d'injection et un puits de soutirage dans deux coins opposés et des conditions de flux nul sur les bords, est suffisante pour décrire le système. C'est cette cellule élémentaire avec ce type de conditions aux limites qui est dénommé :*quart de five-spot*.

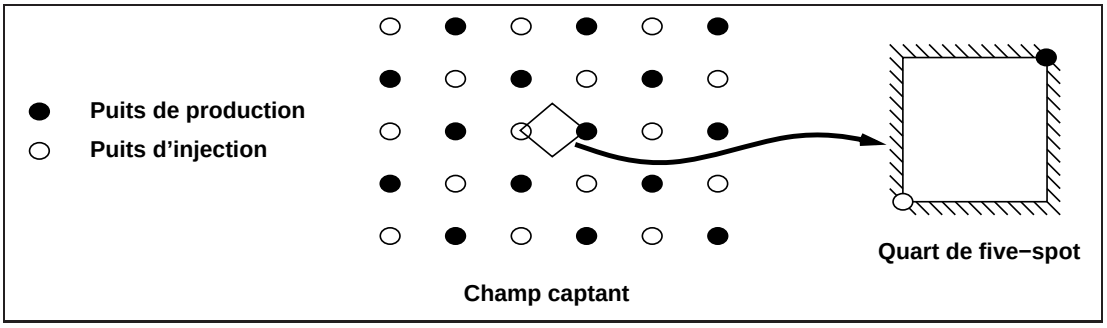


FIG. 8.1 : *Conditions aux limites de type quart de five-spot.*

Dans le domaine pétrolier, on extrait plusieurs informations synthétiques des simulations réalisées sur les quarts de five-spot :
- Le *temps de percée* est le temps à partir duquel on commence à extraire du fluide injecté au niveau du puits de production.
- L'*historique de pression* est la courbe qui représente la variation de la pression dans le puits d'injection au cours du temps.
- La courbe de *water cut* représente le rapport du flux de fluide injecté (eau dans un contexte pétrolier) sortant du puits de production sur le flux total sortant (fluide injecté et fluide en place : eau et huile), en fonction du temps ou du nombre de volumes de pore injectés[2].
- Enfin, la *courbe de production* représente le volume cumulé d'huile récupérée au puits de production en fonction du temps ou du nombre de volumes de pore injectés.

Ces informations synthétiques sont utilisées par la suite pour comparer les résultats des simulations sur les milieux homogénéisés et sur le milieu hétérogène.

8.2.3 Calcul de la perméabilité relative équivalente

Nous utilisons une technique qui consiste à inverser le résultat de la simulation numérique sur le milieu hétérogène soumis aux conditions aux limites de type quart de five-spot.

Nous supposons que la loi de Darcy généralisée est valable à l'échelle mégascopique pour chaque phase i entre les puits d'injection et de production. Comme l'écoulement est horizontal, nous ne prenons pas en compte le terme en $\mathbf{grad}\, z$. Le gradient de pression est égal à la différence de pression entre les puits d'injection et de production, divisée par la distance l les séparant.

$$V^i = -\frac{K K_r^i(S_i)}{\mu_i} \frac{\Delta P}{l} \tag{8.8}$$

Lors de la simulation de l'écoulement sur le milieu hétérogène, on peut définir à chaque date :
- S_i la saturation moyenne sur le five-spot, obtenue comme la moyenne des saturations aux nœuds du maillage (la porosité est constante dans le domaine) ;
- ΔP la perte de pression entre l'entrée et la sortie du five-spot ;
- V^i la vitesse moyenne de la phase i suivant l'axe entrée-sortie sur le five-spot, obtenue comme la moyenne des vitesses projetées sur l'axe entrée-sortie.

[2] Le volume de pore injecté est le rapport du volume injecté sur le volume poreux total du milieu.

Au cours du déplacement, S_i prendra toutes les valeurs possibles. Connaissant μ_i et l la distance entre les puits d'entrée et de sortie, on peut obtenir pour chaque date un couple S_i-$KK_r^i(S_i)$. La perméabilité absolue équivalente (K) est déterminée par ailleurs, on obtient ainsi une série de points $K_r^i = f(S_i)$. La dernière étape consiste à ajuster une courbe analytique du type loi de Corey ($K_r(S) = aS^b$ ou $K_r(S) = a(1-S)^b$ selon la phase considérée) aux points expérimentaux.

Pour le deuxième cas test (celui qui pose le plus de difficultés), nous avons également réalisé des simulations en faisant varier systématiquement la perméabilité relative équivalente afin d'évaluer l'effet de la modification des perméabilités relatives sur le résultat après changement d'échelle.

8.2.4 Les critères de comparaison

L'étude bibliographique succincte qui a été menée montre que les techniques de changement d'échelle (perméabilité absolue, pseudo-fonctions, etc.) sont le plus souvent comparées en traçant les courbes de production ou de *water cut* de la solution de référence et des solutions obtenues avec chaque technique. La sélection de la meilleure technique se fait visuellement sur ces graphes. Les champs de saturation sont parfois dessinés et sont également comparés visuellement.

Nous nous proposons de mener une comparaison plus détaillée qui permette de quantifier les différences entre les méthodes puis de les classer sur la base de critères numériques. À cette fin, nous utilisons des erreurs quadratiques moyennes pour mesurer la distance entre la référence et le résultat d'une méthode donnée.

D'autre part, il nous est apparu indispensable d'utiliser toute l'information disponible : c'est-à-dire les champs de pression, de saturation, et de vitesse et pas uniquement les courbes aux puits. En effet ces courbes ne donnent pas, a priori, d'informations sur le comportement dans le domaine. Leur bon ajustement est donc une condition nécessaire mais non suffisante.

Pour les deux cas tests, les simulations numériques sur les maillages initiaux permettent le calcul des solutions de référence. Les simulations sont effectuées en régime transitoire, et leurs résultats consistent en un champ de pression variable au cours du temps $p_{ref}(x,y,t)$, un champ de saturation $s_{ref}(x,y,t)$ et les champs de vitesse de chaque phase $\boldsymbol{v}_{ref}^{eau}(x,y,t)$ et $\boldsymbol{v}_{ref}^{huile}(x,y,t)$.

Considérons une méthode de changement d'échelle m. L'écoulement est simulé avec les paramètres obtenus par la méthode m sur le même maillage que celui utilisé pour calculer la solution de référence. Cela présente le double avantage de pouvoir imposer exactement les mêmes conditions aux limites sur la référence et sur le milieu après changement d'échelle ; et de pouvoir comparer facilement les variables d'état. Le résultat de cette simulation est comme précédemment le champ de pression $p_m(x,y,t)$, le champ de saturation $s_m(x,y,t)$ et les champs de vitesse de chaque phase $\boldsymbol{v}_m^{eau}(x,y,t)$ et $\boldsymbol{v}_m^{huile}(x,y,t)$.

L'écart entre la référence et le résultat de la méthode m est évalué grâce aux erreurs quadratiques. Les équations 8.9 et 8.10 donnent la définition de ces critères pour la pression.

$$L_p^2(m,t) = \frac{1}{N_x \cdot N_y} \sum_x \sum_y \left(p_m(x,y,t) - p_{ref}(x,y,t)\right)^2 \tag{8.9}$$

$$L_p^2(m) = \frac{1}{N_t} \sum_t L_p^2(m,t) \tag{8.10}$$

Les mêmes critères sont également définis pour la saturation $L_s^2(m,t)$ et $L_s^2(m)$, et pour les vitesses $L_{\boldsymbol{v}^1}^2(m,t)$, $L_{\boldsymbol{v}^2}^2(m,t)$, $L_{\boldsymbol{v}^1}^2(m)$ et $L_{\boldsymbol{v}^2}^2(m)$.

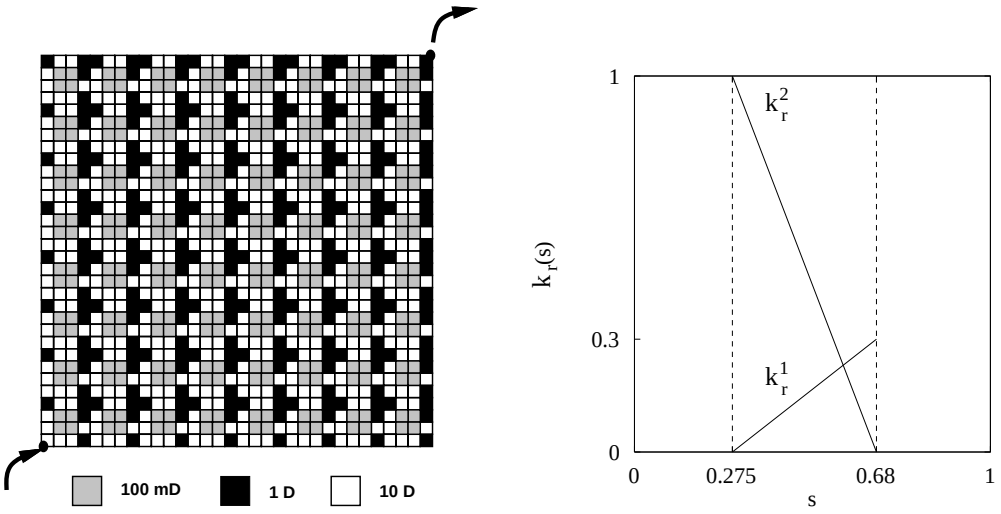
En plus de ces critères, faisant intervenir les variables d'états calculées sur l'ensemble du domaine, nous avons utilisé les informations synthétiques que sont l'historique des pressions au puits d'injection, la courbe de production, la courbe de water cut et les temps de percée. De même que

précédemment, une erreur quadratique permet de mesurer l'écart entre la référence et les résultats d'une méthode donnée :$L_t^2(m)$ pour le temps de percée, $L_h^2(m)$ pour l'historique de pression, $L_w^2(m)$ pour la courbe de water cut et $L_c^2(m)$ pour la courbe de production.

8.3 Premier cas test : le milieu périodique

8.3.1 Données

Pour le premier cas test, nous utilisons un milieu périodique qui a servi à Njifenjou (1994) pour montrer l'intérêt d'une méthode issue de la théorie de l'homogénéisation (voir figure 3.24, page 61). Ce milieu présente une hétérogénéité de perméabilité absolue, avec un contraste de 100. En revanche, les courbes de perméabilité relative sont homogènes (identiques pour chaque faciès) dans le domaine. Elles sont représentées sur la figure 8.2, ce sont des courbes en croix avec une saturation irréductible en eau de 0.275 et une saturation résiduelle de 0.68.



(a) Champ de perméabilité

(b) Perméabilités relatives

FIG. 8.2 : *Champ de perméabilité et courbes de perméabilités relatives (d'après Njifenjou, 1994)*

L'épaisseur du domaine est de 6.1 m et les dimensions de la maille élémentaire sont de 6.7×6.7 m^2. La porosité vaut uniformément $\omega = 0.2$. La viscosité du fluide injecté est de $\mu_1 = 1 \cdot 10^{-3}$ $kg.m^{-1}.s^{-1}$ et celle du fluide initialement en place de $\mu_2 = 5 \cdot 10^{-3}$ $kg.m^{-1}.s^{-1}$.

Les conditions aux limites sont : un débit imposé de 2.38 $m^3.j^{-1}$ sur les deux faces extérieures de la maille formant le puits d'injection ; et une pression imposée de 31 0275 MPa sur les deux faces extérieures de la maille formant le puits de soutirage. La saturation initiale en fluide injecté dans le domaine est imposée à la valeur de la saturation irréductible $s(t = 0, x, y) = 0.275$.

8.3.2 Paramètres équivalents

Perméabilités absolues

Le milieu hétérogène est remplacé par un milieu homogène. Les techniques testées, pour le calcul de la perméabilité absolue, ont été décrites dans les chapitres 3, 5 et 6. Il s'agit des moyennes géométriques et de puissance 1/3 (μ_g et $\mu_{1/3}$), des techniques de renormalisation standard, tensorielle et simplifiée (r_s, r_t et c), de la technique numérique par résolution de l'équation de la diffusivité qui est notée n (voir chapitre 6), du General Tensor Scaling noté g et pour le premier

cas test, de la théorie de l'homogénéisation, notée h, en reprenant le résultat de Njifenjou (1994). On donne dans le tableau 8.1 les perméabilités absolues calculées par chacune des méthodes. On notera que *SUNIDJ* ne permet que l'emploi d'un tenseur de perméabilité absolue diagonal. Nous avons donc utilisé uniquement les composantes diagonales des tenseurs de perméabilité calculés par les techniques de renormalisation tensorielle et d'homogénéisation.

nom	K_{eq}^{xx} $(10^{-12}m^2)$	K_{eq}^{yy} $(10^{-12}m^2)$	Méthode de calcul
μ_g	1.755	1.755	moyenne géométrique
$\mu_{1/3}$	1.980	1.980	moyenne de puissance 1/3
n	3.289	2.943	résolution numérique
r_s	1.625	1.451	renormalisation standard
r_t	2.723	2.535	renormalisation tensorielle
c	2.921	2.706	renormalisation simplifiée
g	3.307	3.134	General Tensor Scaling
h	1.834	1.651	homogénéisation d'après Njifenjou (1994)

TAB. 8.1 : *Milieu périodique : perméabilités absolues*

Perméabilité relatives

Nous rappelons que nous avons testé la modification des perméabilités relative uniquement avec la perméabilité absolue calculée par renormalisation simplifiée.

Les perméabilités relatives équivalentes ont été calculées par la méthode indiqué dans le paragraphe 8.2.3. Deux calculs ont été réalisés : un sur un bloc de huit par huit mailles, un sur le domaine entier. La figure 8.3 présente les points expérimentaux obtenus et les courbes de perméabilité relatives ajustées à ces points. Ces courbes sont présentées en fonction de la saturation efficace, c'est-à-dire la saturation normée entre 0 et 1.

$$s = \frac{s - s_{\text{irréductible}}}{s_{\text{résiduelle}} - s_{\text{irréductible}}}$$

On remarque que les courbes obtenus sont peu modifiées par rapport aux courbes initiales (les exposants des formules de Corey sont proches de 1).

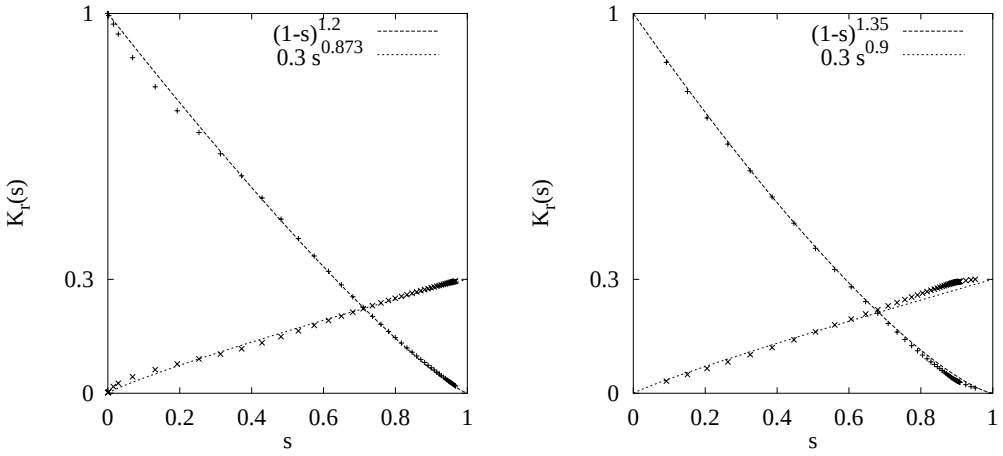
Pour distinguer ces deux résultats, nous désignerons par d la courbe de perméabilité relative calculée sur le domaine et nous désignerons par b la courbe de perméabilité relative obtenue sur le bloc (voir tableau 8.2 pour les expressions analytiques). Les couples perméabilité absolue calculée par renormalisation simplifiée-perméabilités relatives équivalentes sont notés c_d et c_b.

nom	$K_r^{huile}(s)$ (normée)	$K_r^1(s)$ (normée)	Remarques
d	$(1-s)^{1.2}$	$0.3s^{0.873}$	inversion de la référence
b	$(1-s)^{1.35}$	$0.3s^{0.9}$	inversion sur un bloc

TAB. 8.2 : *Milieu périodique : perméabilités relatives*

8.3.3 Comparaison des résultats aux puits

Nous comparons aux puits : la courbe de water cut (figure 8.4), la courbe de production (figure 8.5) et l'historique de pression (figure 8.6). Le tableau 8.3 présente l'ensemble des erreurs quadratiques pour ces trois courbes synthétiques et pour les temps de percée.



(a) Inversion sur le domaine (d)

(b) Inversion sur un bloc (b)

FIG. 8.3 : *Perméabilités relatives ajustées par inversion. Les croix représentent les valeurs expérimentales auxquelles l'expression analytique est ajustée. s représente la saturation efficace.*

(a) Temps de percée

méthode	temps (s)	L_t^2
référence	2.917	
c_b	2.863	0.054
c_d	2.507	0.410
g	4.047	1.130
c	4.062	1.145
h	4.067	1.150
r_t	4.067	1.150
n	4.072	1.155
r_s	4.072	1.155
$\mu_{1/3}$	4.092	1.175
μ_g	4.092	1.175

(b) water cut

L^2_{watercut}	m
0.002730	c_d
0.003193	c_b
0.009506	μ_g
0.009507	$\mu_{1/3}$
0.009869	r_t
0.009885	h
0.010612	c
0.010633	n
0.010636	r_s
0.030125	g

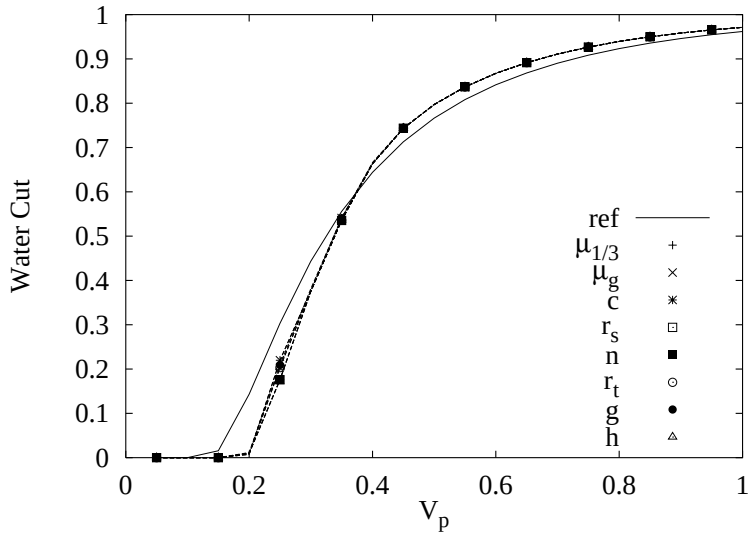
(c) Courbe de production

$L^2_{\text{production}}$	m
0.000346	c_d
0.001170	c_b
0.001975	$\mu_{1/3}$
0.001976	μ_g
0.001995	g
0.002146	r_t
0.002151	h
0.002390	c
0.002399	n
0.002400	r_s

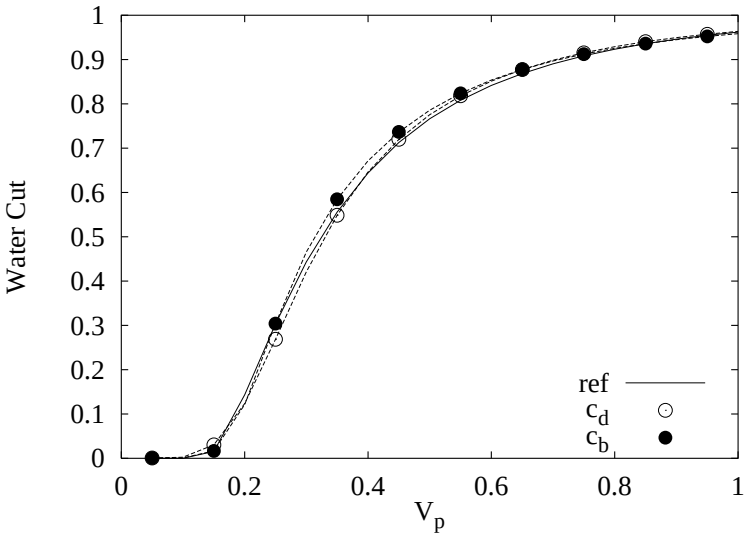
(d) Historique de pression

$L^2_h(m)$	m
698	h
719	r_s
790	μ_g
1953	$\mu_{1/3}$
4201	r_t
4589	c_b
4651	c
4696	c_d
5270	n
5369	g

TAB. 8.3 : *Classement des méthodes par erreur quadratique minimum sur les critères au puits*

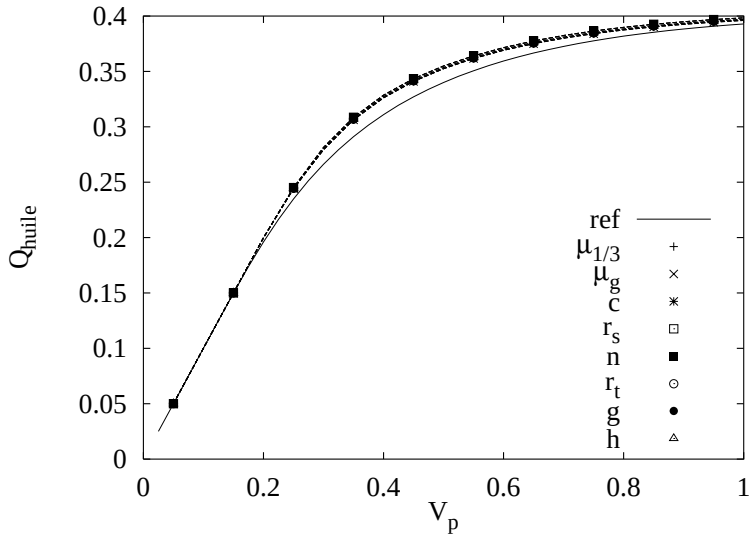


(a) Comparaison des techniques de calcul de k_{eq}

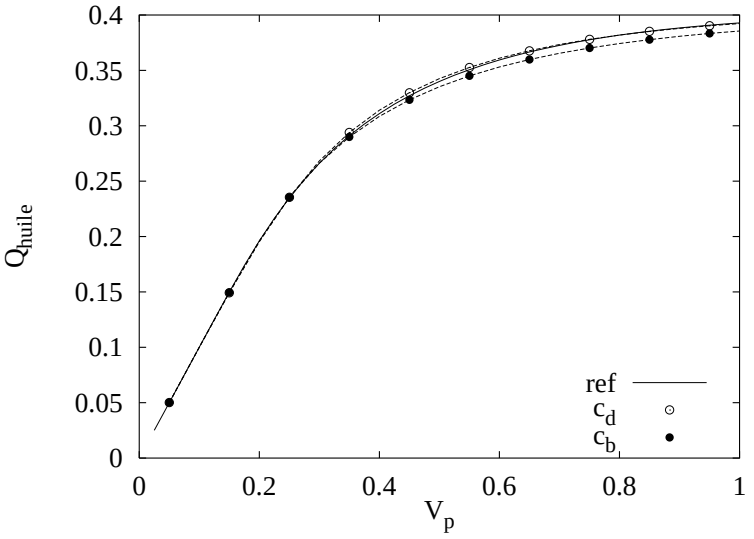


(b) Modifications des k_r

FIG. 8.4 : *Courbes de water cut*

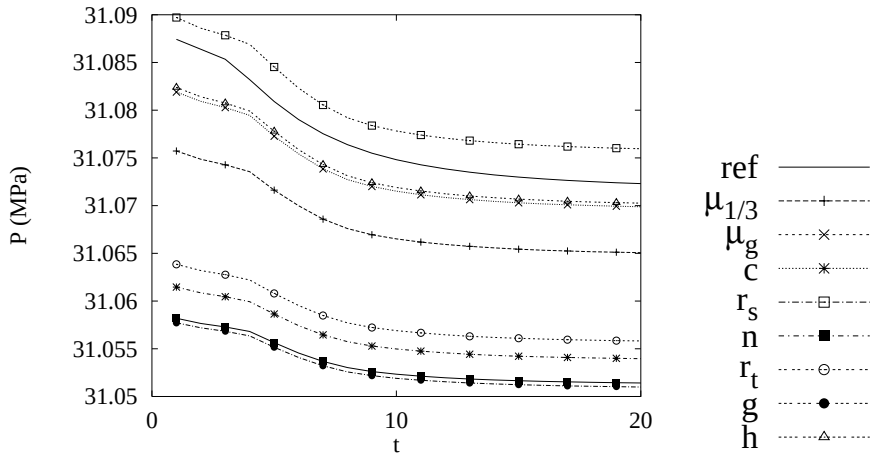


(a) Comparaison des techniques de calcul de k_{eq}

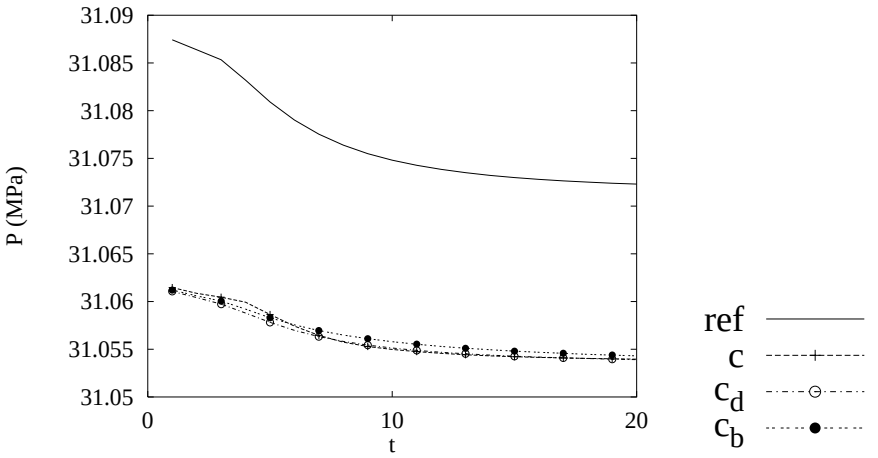


(b) Modifications des k_r

FIG. 8.5 : *Courbes de production*



(a) Comparaison des techniques de calcul de k_{eq}



(b) Modifications des k_r

FIG. 8.6 : *Historique de pression au puits d'injection*

En fonction des temps de percée (tableau 8.3 (a)), l'ensemble des méthodes testées peut être divisé en trois groupes. Le premier groupe présente une erreur très faible : il s'agit du cas où la perméabilité relative a été calculée sur le bloc (c_b). Le second correspond à la technique pour laquelle la perméabilité relative a été calculée par inversion sur le domaine (c_d), dans ce cas l'erreur est faible. Le troisième groupe correspond aux techniques pour lesquelles la perméabilité relative n'a pas été modifiée, pour ces méthodes on constate que le temps de percée est toujours du même ordre de grandeur quelle que soit la méthode employée.

Pour la courbe de water cut, on observe sur la figure 8.4 (a) que toutes les techniques de calcul de la perméabilité absolue équivalente donne des résultats presque identiques. En revanche, comme le montre la figure 8.4 (b), on observe que les modifications de perméabilités relatives permettent une amélioration de la courbe de water cut. Par comparaison des erreurs L^2, on retrouve les trois groupes précédemment décrits (tableau 8.3 (b)) : perméabilités relatives calculées sur le domaine, sur le bloc et perméabilités relatives non modifiées. Les meilleurs résultats sont obtenus pour les méthodes avec inversion de la courbe de perméabilité relative sur le domaine (c_d) puis sur le bloc (c_b). Parmi les résultats obtenus sans modifier les $k_r(s)$, le meilleur résultat est donné par la moyenne géométrique μ_g et la moyenne de puissance un tiers $\mu_{1/3}$, mais les écarts ne sont pas significatifs.

Comme pour les courbes de water cut, les courbes de production (figure 8.5) montrent une très faible sensibilité aux modifications des perméabilités absolues, et une amélioration du résultat liée à la modification des perméabilités relatives. Le classement est voisin de celui obtenu pour les courbes de water cut (tableau 8.3 (c)) .

La figure 8.6 montre les historiques de pression. Avant toute discussion on notera que les différences entre les techniques sont toutes très faibles en valeurs absolues. On constate que, contrairement aux courbes de water cut ou aux courbes de production, l'historique de pression est sensible aux modifications de la perméabilité absolue (figure 8.6 (a)). Parmi les différentes techniques de calcul de la perméabilité équivalente, c'est l'homogénéisation h et la renormalisation standard r_s qui fournissent les meilleurs résultats (tableau 8.3 (d)). Le tableau 8.3 (c) ou la figure 8.6 (b) montrent, enfin, que les trois résultats calculés avec la même perméabilité absolue et des perméabilités relatives différentes (c, c_b et c_d) donnent presque le même historique de pression. Dans ce cas, la modification des perméabilités relatives ne semble donc pas modifier le résultat en pression.

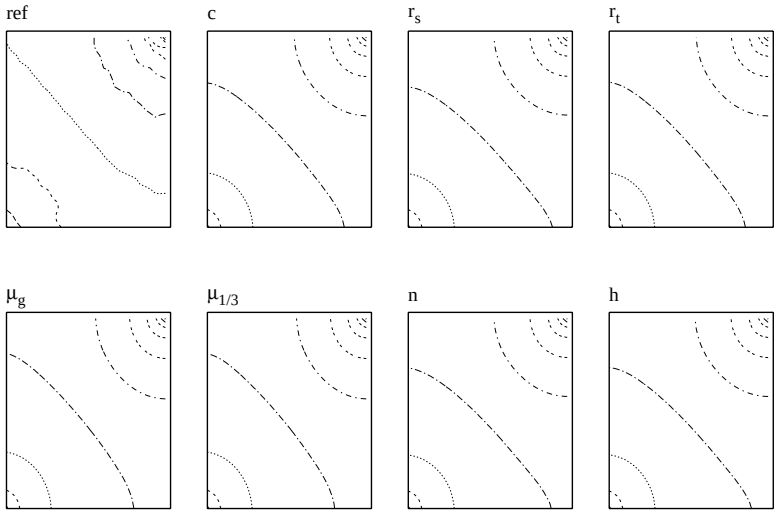
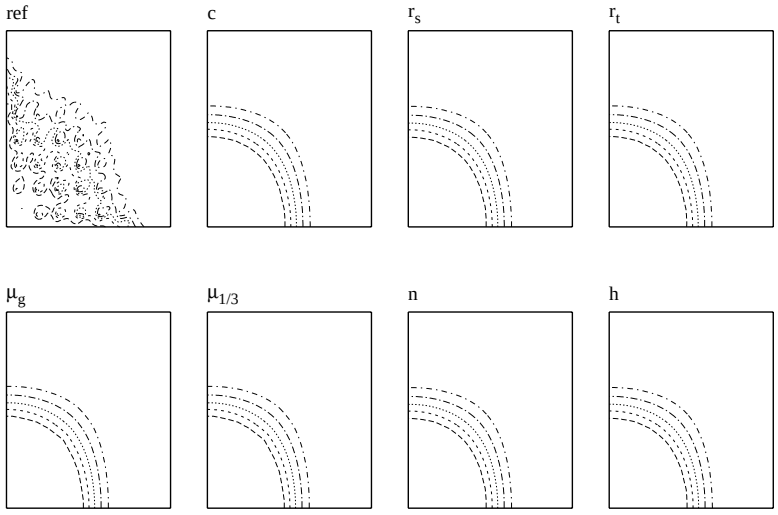


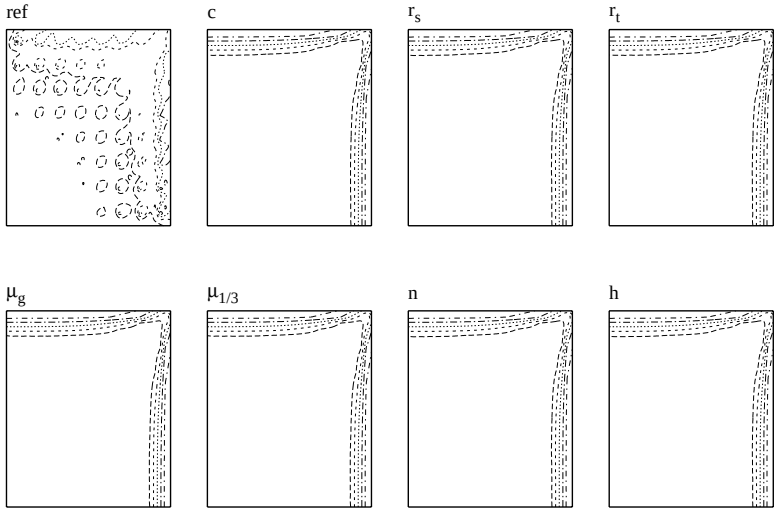
FIG. 8.7 : *Cartes de pressions normées*

8.3.4 Comparaison des résultats dans le domaine

La comparaison des différents critères $L^2(t, m)$ dans le domaine montre que le classement des techniques change au cours du temps. Le nombre de figures correspondantes est important. Nous les avons regroupé en Annexe G. Pour garder un point de vue synthétique, nous ne présentons ici que les classements globaux indépendants du temps.



(a) t=10



(b) t=20

FIG. 8.8 : *Cartes de saturation sans modification des k_r*

A partir du champ de pression, on peut s'intéresser d'une part aux valeurs prises et d'autre part à sa forme.

Pour pouvoir comparer les formes des champs de pression, indépendamment des valeurs prises,

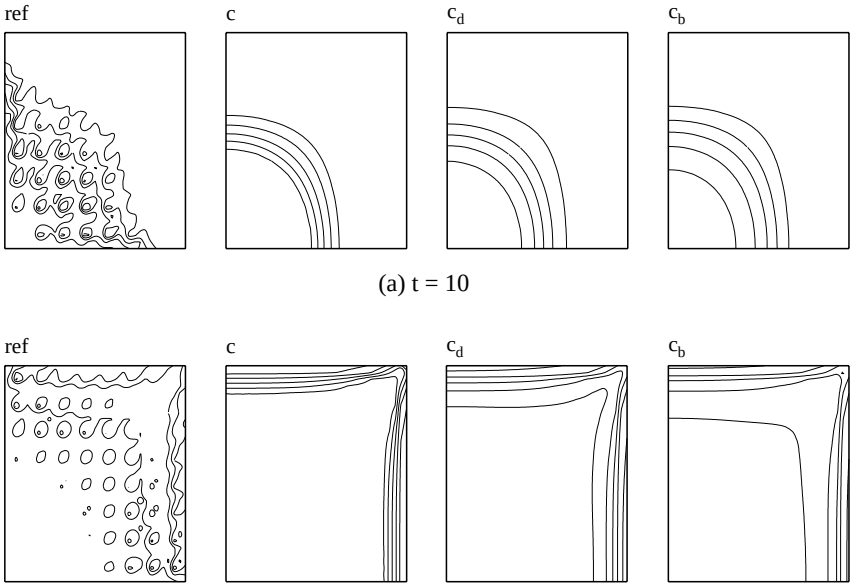


FIG. 8.9 : *Cartes de saturation avec modifications des k_r*

(a) Pression

L_p^2	m
88	r_s
166	μ_g
194	h
227	$\mu_{1/3}$
345	r_t
369	c
374	c_b
383	c_d
402	n
415	g

(b) Pression normée

L_{pn}^2	m
3.35 e-6	r_t
3.65 e-6	c
3.68 e-6	c_b
3.70 e-6	c_d
3.73 e-6	$\mu_{1/3}$
4.19 e-6	n
4.40 e-6	g
4.90 e-6	μ_g
5.05 e-6	h
6.78 e-6	r_s

(c) Saturation

L_s^2	m
7.53 e-3	c_b
7.82 e-3	c_d
8.20 e-3	r_s
8.20 e-3	n
8.21 e-3	h
8.21 e-3	c
8.21 e-3	r_t
8.21 e-3	μ_g
8.22 e-3	$\mu_{1/3}$
8.26 e-3	g

(d) Flux d'eau

L_v^2	m
3.80 e-9	c_b
3.80 e-9	c_d
3.80 e-9	r_s
3.80 e-9	n
3.80 e-9	h
3.80 e-9	c
3.80 e-9	r_t
3.81 e-9	μ_g
3.81 e-9	$\mu_{1/3}$
3.81 e-9	g

(e) Flux d'huile

L_v^2	m
1.13 e-9	c_b
1.14 e-9	c_d
1.16 e-9	μ_g
1.16 e-9	$\mu_{1/3}$
1.16 e-9	r_t
1.16 e-9	c
1.16 e-9	h
1.16 e-9	n
1.16 e-9	r_s
1.16 e-9	g

TAB. 8.4 : *Classement des méthodes par erreur quadratique minimum sur les critères dans le domaine*

nous avons normé tous les champs de pression obtenus par les différentes méthodes.

$$p_{\text{normée}} = \frac{p - p_{\min}}{p_{\max} - p_{\min}}$$

Du fait des conditions aux limites (pression libre et flux imposé en entrée et pression imposée en sortie), la pression maximale $p_{\max}$ dans le domaine est la pression en entrée, c'est-à-dire au puits d'injection, la pression minimum $p_{\min}$ est la pression imposée en sortie. Les cartes de pression ainsi obtenues sont présentées sur la figure 8.7. On constate que, pour le milieu périodique, toutes les méthodes donnent des cartes très voisines.

Nous avons déjà vu pour l'historique de pression que la valeur de la pression en entrée dépend de la valeur de la perméabilité absolue. La comparaison des erreurs quadratiques en fonction du temps pour les cartes de pression non normées donne un classement proche de celui obtenu par la comparaison des historiques de pression (voir figure G.1 en Annexe).

On compare également les cartes de saturation à différents pas de temps (figure 8.8 et 8.9). On observe que le champ de saturation ne dépend pas de la perméabilité absolue[3]. En revanche la modification des courbes de perméabilité relative modifie l'allure générale du front de saturation (figure 8.9). On constate en particulier que la méthode notée c_b, correspondant à l'inversion des perméabilités relatives sur un bloc, donne une bonne approximation (voir tableau 8.4 (c)). On retrouve ensuite la méthode correspondant à l'inversion sur le domaine (c_d), puis les techniques pour lesquelles la perméabilité relative n'a pas été modifiée.

Comme on peut le voir sur les figures G.4 et G.5 en Annexe, les flux sont identiques dans le cas du milieu périodique pour toutes les techniques testées. En fait, le milieu après changement d'échelle est homogène et le flux est fixé par les conditions aux limites de type débit imposé à la sortie. Les erreurs sur les flux ne peuvent donc pas constituer dans ce cas un bon critère permettant de classer les différentes techniques.

8.3.5 Discussion

Le milieu périodique devient un milieu homogène à l'échelle supérieure. Cela représente un cas relativement favorable pour le changement d'échelle.

Dans ce cas, la renormalisation simplifiée permet d'obtenir de bons résultats que ce soit pour la restitution des informations synthétiques au puits ou pour les champs de saturation, de vitesse et de pression. Mais, toutes les autres techniques donnent également de bons résultats. Ceci est dû au fait que la perméabilité est constante dans le domaine après changement d'échelle et que les conditions aux limites imposent le flux. Les différences observées sont faibles. Elles concernent essentiellement les historiques de pression au puits d'injection. Amaziane, Bourgeat, and Koebbe (1991) avaient déjà émis la même observation pour les mêmes conditions aux limites, avec des milieux périodiques et pour un fluide incompressible. Ainsi, un tel test ne suffit pas pour différencier nettement les méthodes de calcul de la perméabilité équivalente.

En revanche, nous avons observé que la modification de la perméabilité relative même si elle semble peu importante quand on compare visuellement les perméabilités relatives macroscopiques et mégascopiques, permet d'améliorer les résultats, en obtenant à la fois une bonne restitution des champs de saturation dans le domaine et des courbes synthétiques au puits (water cut, courbe de production).

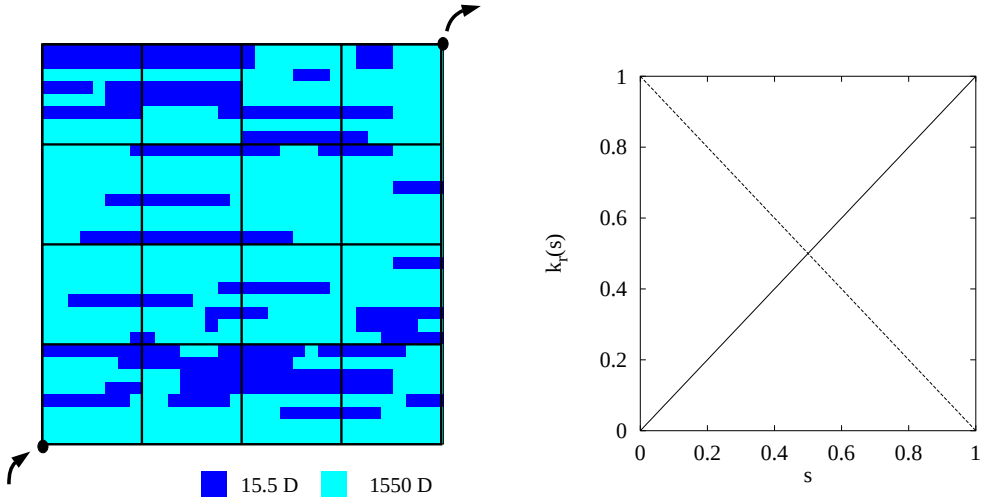
Ce test montre que pour changer d'échelle avec des écoulements diphasiques, il est nécessaire de calculer non seulement des perméabilités absolues équivalentes correctes, mais également des perméabilités relatives équivalentes.

[3] Voir figure G.3, page 224 en Annexe, pour une vérification quantitative.

8.4 Second cas test : le milieu binaire

8.4.1 Données

Le milieu utilisé est un milieu hétérogène binaire présentant des inclusions de faible perméabilité orientées préférentiellement selon la direction parallèle à l'axe des x. Ce milieu avait été utilisé par Fayers and Hewett (1992) pour montrer l'importance de prendre en compte les termes non-diagonaux du tenseur de perméabilité (voir figure 3.30, page 67). Les perméabilités relatives sont constantes dans le domaine et sont des courbes en croix sans saturation résiduelle.



(a) Champ de perméabilité

(b) Perméabilités relatives

FIG. 8.10 : *Champ de perméabilité et courbes de perméabilités relatives (d'après Fayers et Hewett, 1992)*

L'épaisseur du domaine est prise égale à 1 mètre. Les dimensions de la maille élémentaire sont de 0.01×0.01 m^2. La porosité vaut uniformément $\omega = 0.333$. La viscosité du fluide injecté est de $\mu_1 = 1.10^{-3}$ kg.m^{-1}.s^{-1} et celle du fluide initialement présent est de $\mu_2 = 0.810^{-3}$ kg.m^{-1}.s^{-1}.

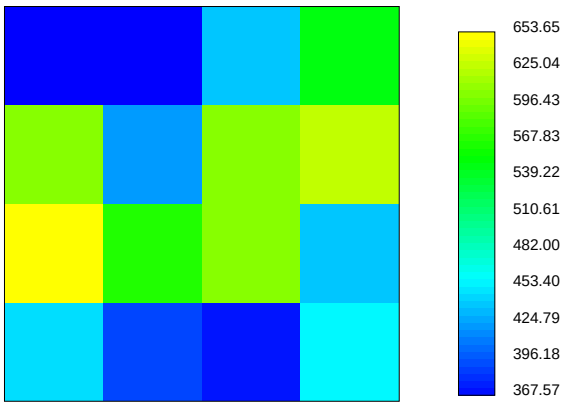
Les conditions aux limites sont du même type que celles utilisées pour le milieu binaire : un débit imposé de 11.9 m^3.j^{-1} en entrée et une pression imposée de 0 Pa en sortie. La saturation initiale en fluide injecté est imposée à 0.

8.4.2 Paramètres équivalents

Perméabilités absolues

Le milieu hétérogène initial est remplacé par un milieu homogénéisé sur des blocs de 8×8 mailles. Pour chaque bloc, une perméabilité équivalente est calculée par les même méthodes que celles utilisées pour le milieu périodique, excepté la théorie de l'homogénéisation qui n'a pas été utilisée. Contrairement au milieu périodique, les perméabilités équivalentes calculées sont variables dans l'espace (voir figure 8.11).

Le milieu homogénéisé est discrétisé de la même façon que le milieu initial (32×32 mailles). Ainsi chaque bloc, de perméabilité équivalente constante, est divisé en huit par huit mailles de même perméabilité.



(a) Distribution des perméabilités (b) Légende

FIG. 8.11 : *Exemple de carte de perméabilité équivalente (calculé par la moyenne géométrique) pour le milieu binaire.*

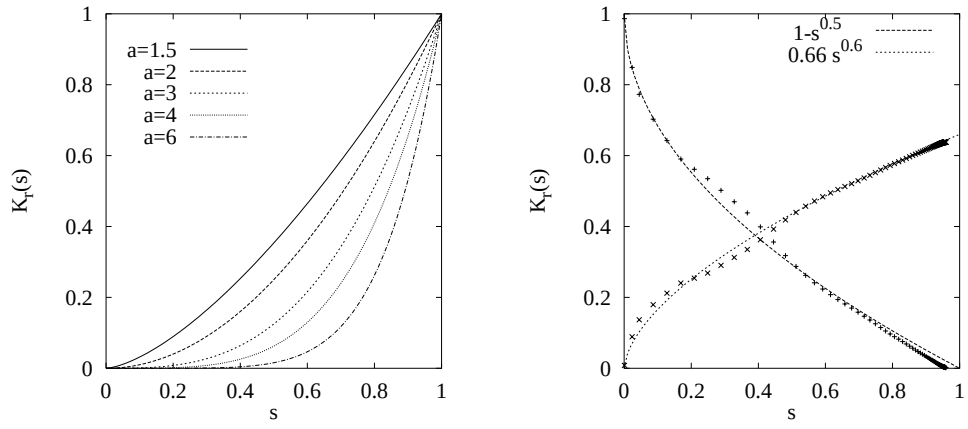
Perméabilité relatives

En gardant les perméabilités absolues calculées par renormalisation simplifiée, nous avons d'une part fait des tests en faisant varier systématiquement la courbure de la perméabilité relative du fluide injectée (figure 8.12 (a)) et d'autre part nous avons calculé des courbes de perméabilité relatives équivalente par inversion sur le domaine (figure 8.12 (b)).

Les tests systématiques ont été effectués avec une courbe de perméabilité relative du fluide injecté de la forme $K_r(s) = s^a$ pour cinq valeurs de a différentes. En ce qui concerne les courbes obtenues par inversion, on remarque sur la figure 8.12 (b) que les points expérimentaux présentent deux points d'inflexion. Le type de courbe analytique choisie (modèle de Corey) ne permet pas de prendre en compte ce comportement, mais en première approximation nous pensons que cette formulation est suffisante. Les expressions analytiques des perméabilités relatives équivalentes utilisées et la nomenclature qui s'y réfère sont présentées dans le tableau 8.5.

nom	$K_r^{huile}(s)$ (normée)	$K_r^{eau}(s)$ (normée)	Remarques
$a = 1.5$	$1 - s$	$s^{1.5}$	Tests systématique
$a = 2$	$1 - s$	s^2	Tests systématique
$a = 3$	$1 - s$	s^3	Tests systématique
$a = 4$	$1 - s$	s^4	Tests systématique
$a = 6$	$1 - s$	s^6	Tests systématique
d	$1 - s^{0.5}$	$0.66s^{0.6}$	Inversion de la référence

TAB. 8.5 : *Perméabilités relatives*



(a) Tests systématiques

(b) Inversion sur le domaine

FIG. 8.12 : *Perméabilités relatives.*

8.4.3 Comparaison des résultats aux puits

Le tableau 8.6 donne le classement des techniques pour les critères au puits.

Quel que soit le critère utilisé, les résultats sont en général beaucoup moins bons que ceux obtenus pour le milieu périodique.

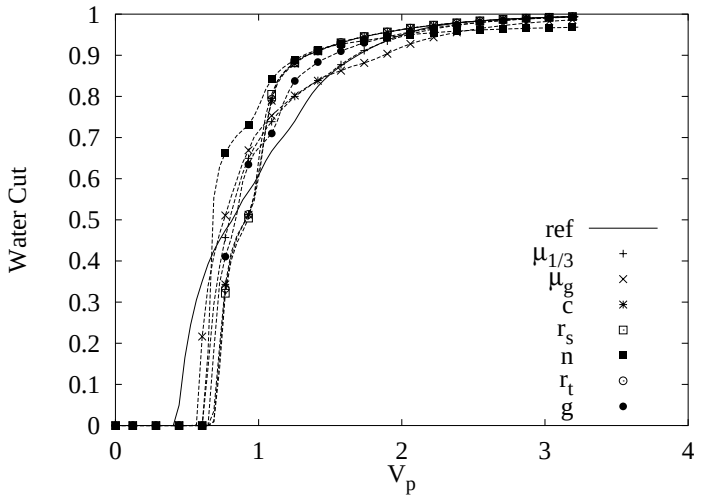
Les temps de percée sont très variables selon les techniques (tableau 8.6 (a)). Le meilleur résultat est obtenu pour une perméabilité relative modifiée (a=4).

Pour les courbes de water cut (figure 8.13), la méthode donnant le résultat le moins mauvais (erreur L^2_{watercut} la plus faible dans le tableau 8.6 (b)) est la moyenne géométrique μ_g, mais comme le montre la figure 8.13 (a), la forme de la courbe n'est pas bien restituée. Les modifications systématiques de la courbure de la perméabilité relative ($a = 1.5$ à 6) ont pour effet de déplacer les courbes de water cut (figure 8.13 (b)), il en résulte qu'il existe une valeur de a permettant d'obtenir un temps de percée correct. Mais la modification de a ne change pas la forme des courbes de water cut. En revanche, la courbe de perméabilité relative obtenue par inversion sur le domaine c_d modifie la forme de la courbe de water cut, mais celle-ci reste très différente de la référence.

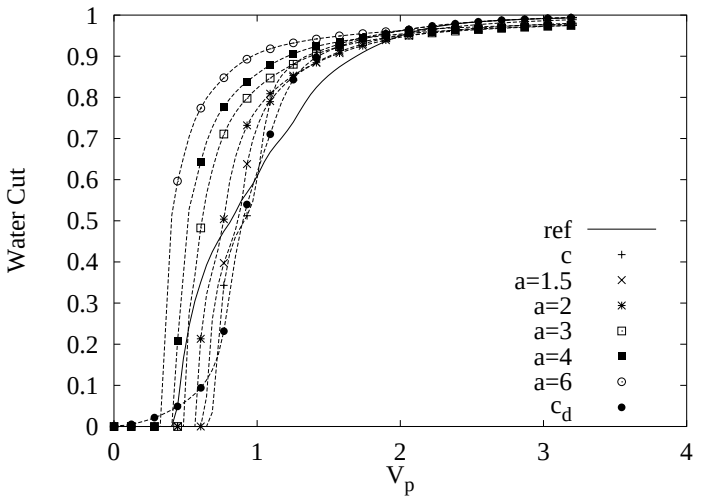
Pour les courbes de production (figure 8.14 et tableau 8.6 (c)), les observations sont les même que pour la courbe de water cut. La moyenne géométrique μ_g permet d'obtenir le résultat le plus proche de la référence. La perméabilité relative obtenue par inversion de la référence c_d est décevante et ne permet pas d'obtenir un résultat excellent. L'augmentation de la courbure de la perméabilité relative, lors des tests systématiques, provoque un abaissement du palier de la courbe de production.

En ce qui concerne l'historique de pression(figure 8.6 et tableau 8.6 (d)), là encore, la moyenne géométrique donne le résultat le plus proche de la référence. La méthode c_d est toujours dans le groupe de tête mais reste derrière la moyenne de puissance un tiers $\mu_{1/3}$.

On notera que pour ces quatre critères la renormalisation simplifiée et la renormalisation tensorielle fournissent toujours des résultats très voisins.

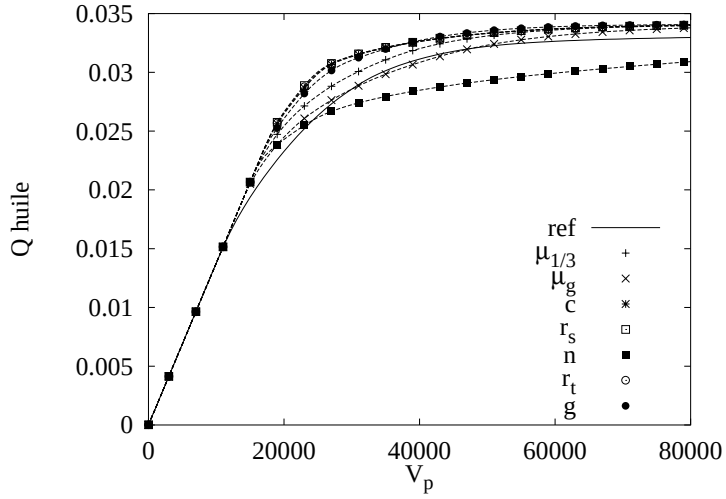


(a) Comparaison des techniques de calcul de k_{eq}

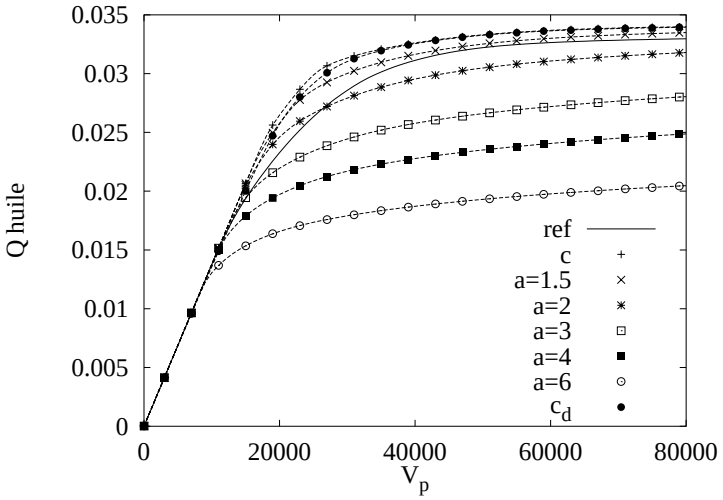


(b) Modifications des k_r

FIG. 8.13 : *Courbes de water cut.*

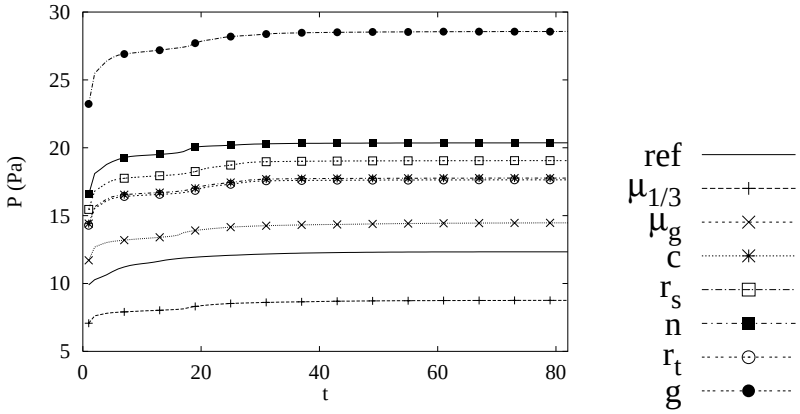


(a) Comparaison des techniques de calcul de k_{eq}

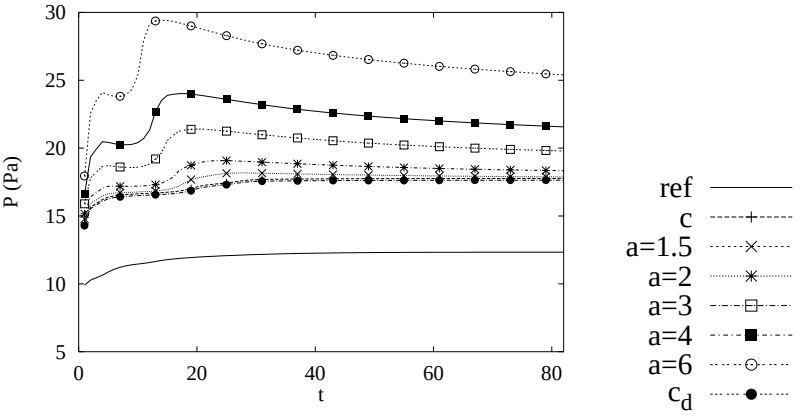


(b) Modifications des k_r

FIG. 8.14 : *Courbes de production*



(a) Comparaison des techniques de calcul de k_{eq}



(b) Modifications des k_r

FIG. 8.15 : *Historique de pression au puits d'injection*

(a) Temps de percée

méthode	temps (s)	L_t^2
référence	10580	
$a = 4$	10630	50
$a = 3$	12130	1550
$a = 6$	8666	1914
μ_g	14140	3560
$a = 2$	14290	3710
$\mu_{1/3}$	15410	4830
$a = 1.5$	15550	4970
n	15630	5050
g	16300	5720
c	16610	6030
c_d	4236	6344
r_t	16950	6370
r_s	16990	6410

(b) water cut

L^2_{watercut}	m
0.69 e-2	μ_g
0.82 e-2	$\mu_{1/3}$
0.85 e-2	$a = 2$
0.94 e-2	c_d
0.96 e-2	$a = 1.5$
0.99 e-2	g
1.08 e-2	$a = 3$
1.14 e-2	n
1.15 e-2	c
1.18 e-2	r_t
1.21 e-2	r_s
1.48 e-2	$a = 4$
2.17 e-2	$a = 6$

(c) Courbe de production

$L^2_{\text{production}}$	m
0.06 e-4	μ_g
0.11 e-4	$a = 1.5$
0.12 e-4	$\mu_{1/3}$
0.14 e-4	$a = 2$
0.16 e-4	c_d
0.18 e-4	g
0.19 e-4	c
0.19 e-4	r_t
0.19 e-4	r_s
0.23 e-4	n
0.47 e-4	$a = 3$
0.76 e-4	$a = 4$
1.15 e-4	$a = 6$

(d) Historique de pression

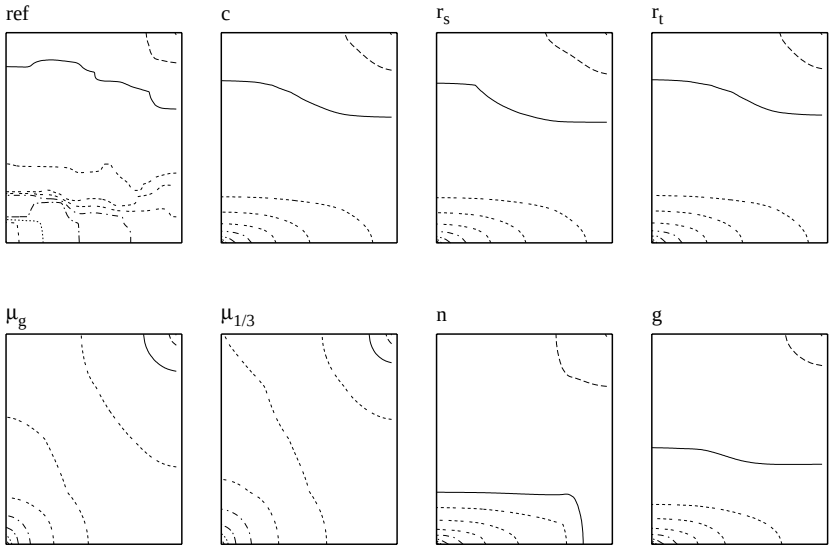
$L_h^2(m)$	m
0.23	μ_g
0.39	$\mu_{1/3}$
0.58	c_d
0.58	r_t
0.59	c
0.63	$a = 1.5$
0.66	g
0.70	$a = 2$
0.73	r_s
0.89	n
0.90	$a = 3$
1.13	$a = 4$
1.61	$a = 6$

TAB. 8.6 : *Classement des méthodes par erreur quadratique minimum sur les critères au puits*

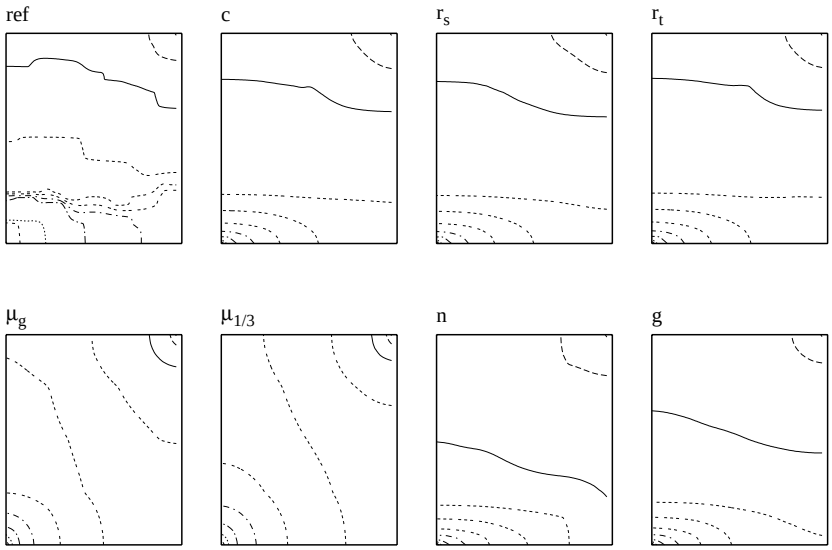
8.4.4 Comparaison des résultats dans le domaine

Les cartes de pression ont été normées comme cela a été indiqué pour le milieu périodique. Leur comparaison (figures 8.16 et 8.17) montre que les moyennes algébriques donnent un champ de pression très différent de la référence. La raison en est que l'anisotropie dans les blocs n'est pas prise en compte par les techniques algébriques. Toutes les autres techniques prenant en compte l'anisotropie donnent des résultats qui sont visuellement plus satisfaisants. L'étude des erreurs quadratiques (tableau 8.7 (b)) montre que les résultats les plus proches de la référence sont ceux issus des perméabilités relatives modifiées.

Pour les cartes de saturation (figures 8.18 et 8.19), on constate à nouveau que les moyennes algébriques μ_g et $\mu_{1/3}$ donnent des champs de saturation relativement symétriques alors que la référence est nettement asymétrique. Cela est encore du à la non prise en compte de l'anisotropie par les moyennes algébriques. Les techniques numériques et de renormalisation qui prennent en compte l'anisotropie permettent une meilleure restitution de la forme globale du champ de saturation. L'effet de la modification des perméabilités relatives est d'abaisser le front de saturation, cela permet d'améliorer l'estimation du champ de saturation (tableau 8.7 (c)). Ainsi, les techniques restituant le mieux le champ de saturation sont $a = 1.5$, $a = 2$, ou c_d.

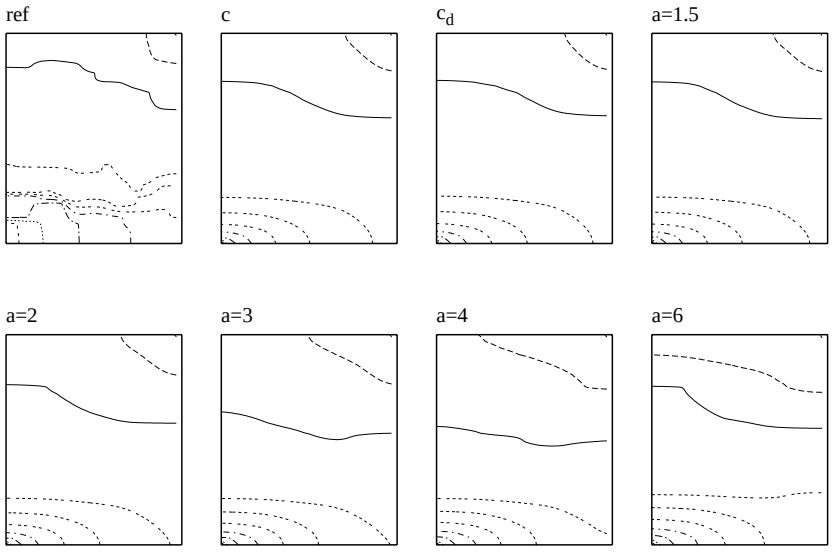


(a) t=10

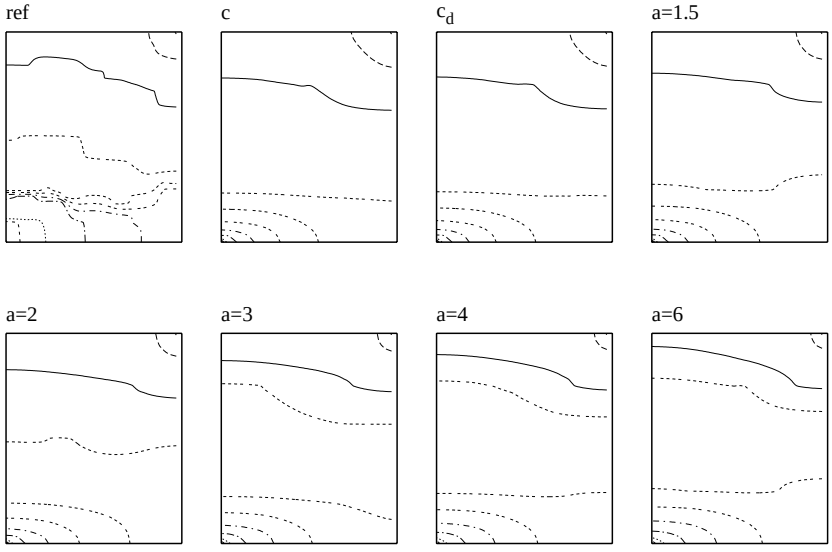


(b) t=20

FIG. 8.16 : *Cartes de pression normée, comparaison des techniques de calcul de* k_{eq}

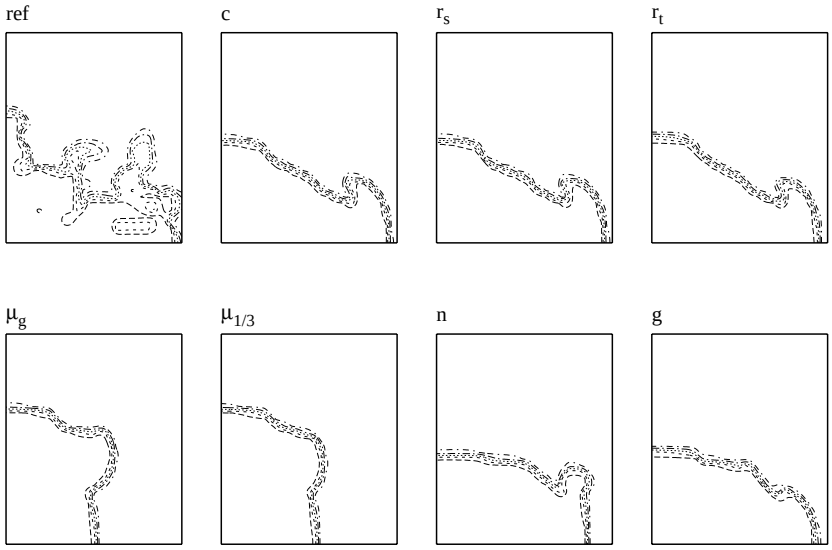


(a) t=10

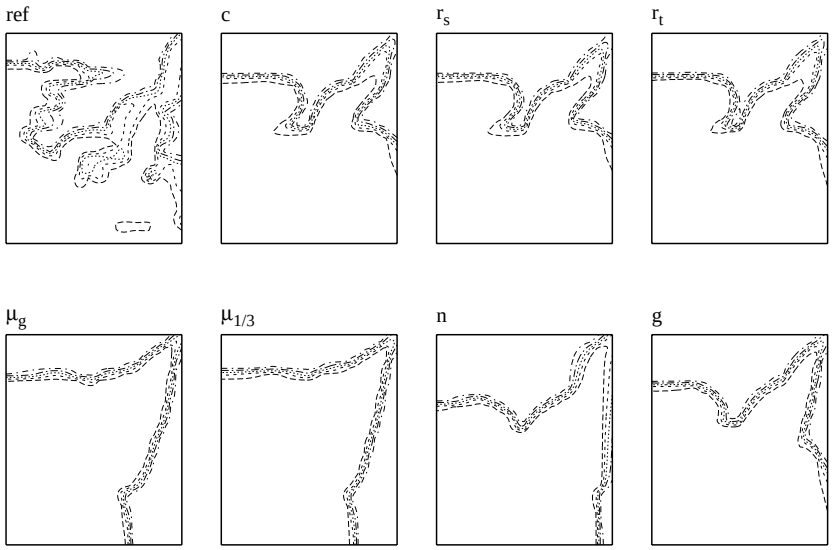


(b) t=20

FIG. 8.17 : *Cartes de pression normée, modification des k_r*

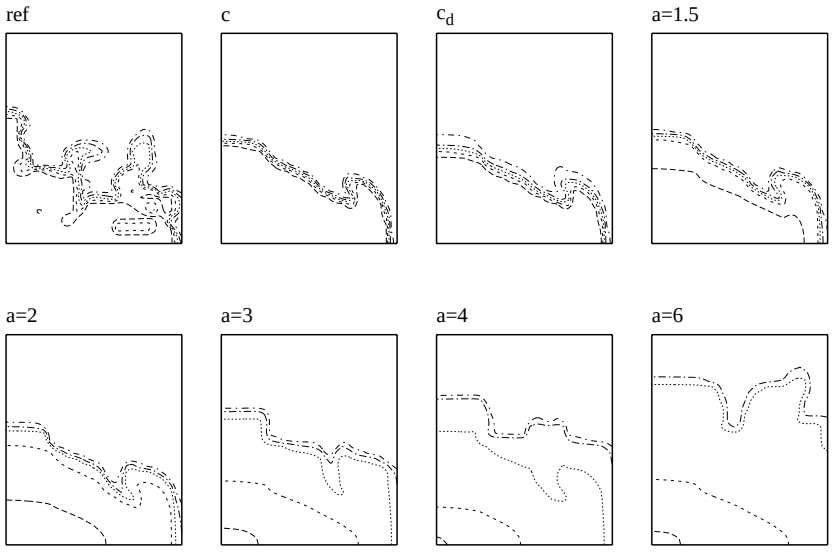


(a) t=10

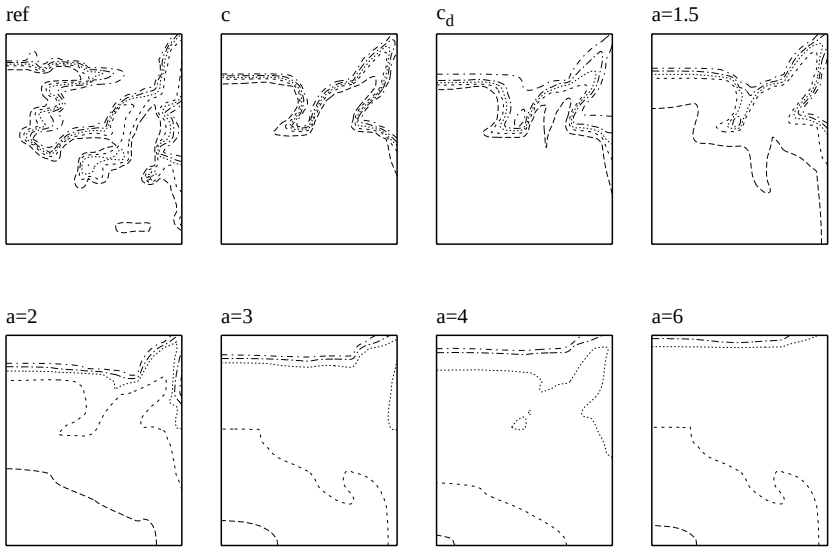


(b) t=20

FIG. 8.18 : *Cartes de saturation, comparaison des techniques de calcul de* k_{eq}



(a) t=10



(b) t=20

FIG. 8.19 : *Cartes de saturation, modification des k_r*

(a) Pression

L_p^2	m
0.19 e-1	g
0.23 e-1	n
0.23 e-1	c
0.23 e-1	r_t
0.26 e-1	r_s
0.27 e-1	$a = 1.5$
0.34 e-1	$a = 2$
0.41 e-1	$\mu_{1/3}$
0.43 e-1	μ_g
0.53 e-1	$a = 3$
0.65 e-1	c_d
0.73 e-1	$a = 4$
1.13 e-1	$a = 6$

(b) Pression normée

L_{pn}^2	m
2.19 e-3	$a = 6$
2.25 e-3	$a = 4$
2.35 e-3	$a = 3$
2.59 e-3	$a = 2$
2.76 e-3	$a = 1.5$
2.80 e-3	r_t
2.87 e-3	c
2.94 e-3	r_s
3.08 e-3	μ_g
3.09 e-3	c_d
3.33 e-3	$\mu_{1/3}$
3.40 e-3	g
3.81 e-3	n

(c) Saturation

L_s^2	m
0.53 e-2	$a = 1.5$
0.53 e-2	$a = 2$
0.58 e-2	c_d
0.60 e-2	r_s
0.61 e-2	c
0.61 e-2	r_t
0.65 e-2	g
0.68 e-2	$a = 3$
0.81 e-2	$\mu_{1/3}$
0.84 e-2	μ_g
0.85 e-2	$a = 4$
0.88 e-2	n
1.12 e-2	$a = 6$

(d) Flux d'eau

L_v^2	m
9.17 e-10	g
9.46 e-10	n
9.46 e-10	$a = 2$
9.46 e-10	c_d
9.46 e-10	r_t
9.46 e-10	$a = 1.5$
9.47 e-10	r_s
9.48 e-10	c
9.49 e-10	$a = 3$
9.55 e-10	$a = 4$
9.65 e-10	$a = 6$
1.03 e-09	$\mu_{1/3}$
1.04 e-09	μ_g

(e) Flux d'huile

L_v^2	m
2.39 e-10	$a = 3$
2.39 e-10	$a = 2$
2.43 e-10	$a = 4$
2.44 e-10	$a = 1.5$
2.47 e-10	g
2.50 e-10	c_d
2.53 e-10	r_s
2.53 e-10	r_t
2.53 e-10	c
2.54 e-10	$a = 6$
2.54 e-10	n
2.55 e-10	$\mu_{1/3}$
2.65 e-10	μ_g

TAB. 8.7 : *Classement par erreur quadratique minimum sur les critères dans le domaine*

La technique qui donne la meilleure estimation à la fois des flux d'eau et des flux d'huile (tableau 8.7 (d) et e) est le General Tensor Scaling (g). Il est étonnant de constater que même si cette technique donne le meilleur résultat pour les flux, ce n'est pas elle qui donne le meilleur résultat pour les champs de saturation. On constatera que c'est également le General Tensor Scaling qui trouve le meilleur compromis entre la valeur absolue de la pression en entrée et la forme du champ de pression (tableau 8.7 (a)).

8.4.5 Discussion

Ce test correspond à un cas défavorable pour lequel la taille des blocs est petite par rapport à la taille des hétérogénéités. Mais, on peut craindre que ce type de cas soit plus courant que le milieu périodique.

Nous constatons, dans ce cas, que la renormalisation simplifiée ne donne pas un résultat totalement satisfaisant, mais cette observation est également valable pour toutes les autres techniques testées. Plus précisément, la moyenne géométrique est la technique la mieux classée pour la restitution des courbes synthétiques au puits ; dans le domaine, le classement dépend de la variable considérée et la renormalisation simplifiée est globalement bien classée alors que la moyenne géométrique est

parmi les moins bonnes techniques. Aucune technique testée ne donne donc un bon résultat. Nous avons envisagé trois interprétations possibles de cette observation :
- Nous n'avons pas testée la technique idéale qui aurait donnée un bon résultat.
- Nous sommes dans un cas où il est impossible de changer d'échelle car les conditions d'existence d'une loi de Darcy généralisée mégascopiques ne sont pas vérifiée (taille des hétérogénéités trop grande par rapport à la taille du domaine, écoulement radial), ainsi aucune technique ne peut donner un bon résultat.
- L'utilisation d'une courbe de perméabilité relative équivalente constante dans le domaine est insuffisante pour décrire l'hétérogénéité du milieu.

Même si les deux premières interprétations ne peuvent être écartées, il nous semble que l'utilisation de courbes de perméabilités relatives différentes pour chaque bloc devrait permettre une amélioration des résultats. De plus, comme le font remarquer Pickup and Sorbie (1994), ces perméabilités relatives sont très certainement tensorielles et non scalaires. Toutefois, il n'a pas été possible de tester la validité de ces hypothèses, car *SUNIDJ* ne permet, pour l'instant, que l'emploi d'une perméabilité relative scalaire, constante dans le domaine.

Nous observons également que les méthodes permettant d'estimer un tenseur (même diagonal) de perméabilité absolue donnent un meilleur résultat dans le domaine que les techniques donnant seulement une perméabilité équivalente scalaire. En revanche, ces dernières peuvent donner un meilleur résultat au puits. Nous interprétons ceci comme un concours de circonstances favorables. Les erreurs sur l'estimation des perméabilités absolues seraient plus ou moins compensées par l'erreur sur l'estimation des perméabilités relatives équivalentes.

8.5 Conclusion

L'objectif du travail présenté dans ce chapitre était de déterminer si la renormalisation simplifiée était applicable aux cas d'écoulements diphasiques. Pour cela, un test comparatif a été conduit sur des quarts de five-spot en négligeant l'effet de la pression capillaire. Les deux milieux hétérogènes utilisés ont été tirés des publications de Njifenjou (1994) et Fayers and Hewett (1992). Pour limiter les effets du biais numérique, nous avons utilisé la même discrétisation pour décrire les milieu hétérogènes et les milieux homogénéisés.

Les résultats obtenus sont sensiblement différents pour les deux milieux étudiés.

Dans le premier cas, le milieu hétérogène est périodique, il est remplacé par un milieu homogène. La renormalisation simplifiée donne alors de bons résultats, mais avec les conditions aux limites utilisées (flux imposé en entrée et charge imposée en sortie), toutes les techniques donnent des résultats voisins. Nous constatons également que l'utilisation de courbes de perméabilité relatives équivalentes, différentes des courbes de perméabilité relatives macroscopiques, permet une meilleure restitution des champs de saturation et donc des courbes de production et de water cut.

Dans le second cas, le milieu est constitué d'une matrice perméable et d'inclusions peu perméables orientées suivant une direction préférentielle. La renormalisation simplifiée ne permet pas de donner un résultat complètement satisfaisant dans le cadre des hypothèses testées, mais les autres techniques souffrent du même défaut. La moyenne géométrique donne les meilleurs résultats au niveau des courbes synthétiques au puits. Les méthodes utilisant des perméabilités directionnelles différentes (les méthodes numériques et les renormalisations) donnent les meilleurs résultats au niveau des champs de pression, de saturation et de vitesse dans le domaine. Pour pouvoir mener à bien un changement d'échelle dans un milieu de ce type, il semble nécessaire d'utiliser un tenseur de perméabilité équivalente (au moins diagonal) et des courbes de perméabilités relatives équivalentes différentes pour chaque bloc. Cette dernière hypothèse n'a pas été testée.

$\rightsquigarrow$ En conclusion, nous pensons que la technique de renormalisation simplifiée présente un intérêt,

pour le changement d'échelle en écoulement diphasique, dans la mesure où elle donne un résultat équivalent aux autres techniques permettant le calcul d'un tenseur diagonal de perméabilité absolue (résolution numérique de l'équation de la diffusivité, renormalisations standard et tensorielle) avec un coût informatique nettement plus faible. Toutefois, comme pour toute technique de changement d'échelle appliquée à ce type d'écoulement, elle doit vraisemblablement être couplée à une technique de calcul des perméabilités relatives équivalentes. Pour l'instant, nous avons utilisé une technique qui nécessite de résoudre le problème d'écoulement sur le domaine ou sur un bloc, et d'en déterminer la perméabilité relative équivalente par inversion. Cette méthode est très coûteuse en temps calcul. Il est envisageable de développer une technique rapide, basée sur le principe de la renormalisation. Plutôt que la technique de King, Muggeridge, and Price (1993) qui utilise une résolution d'un problème local sur quatre mailles, l'idée qui est à la base de la renormalisation simplifiée, consistant à résoudre des problèmes locaux mono-dimensionnels, pourrait être exploitée. On pourrait, dans ce cas, utiliser les résultats analytiques, en une dimension, de Dale et al. (1994) qui permettent de calculer la perméabilité relative équivalente en prenant en compte les phénomènes de pression capillaire.

Il reste bien sûr à tester ces idées. On insistera d'une part sur l'importance d'utiliser des milieux aussi nombreux et aussi différents que possible et d'autre part sur l'importance de comparer toutes les variables en jeu pour pouvoir donner une signification statistique à la comparaison et ainsi valider une technique de changement d'échelle ou au moins augmenter la confiance que l'on porte en elle.

Chapitre 9

Conclusion

“ Les faits inexacts sont très nuisibles aux progrès de la science, car ils persistent souvent fort longtemps ; mais les opinions erronées, quand elles reposent sur certaines preuves, ne font guère de mal car chacun s'empresse heureusement d'en démontrer la fausseté ; or la discussion, en fermant une route qui conduit à l'erreur, ouvre souvent en même temps le chemin à la vérité. ” Ch. Darwin

La question posée en introduction de cette thèse était : "Comment calculer la perméabilité équivalente à partir des perméabilités locales?". Plus précisément, il s'agissait de proposer une ou des méthodes permettant de passer d'une grille fine de perméabilité à une grille grossière utilisable dans les modèles d'écoulements souterrains.

Étant donné la taille des modèles géologiques et le coût informatique des simulations de type Monte-Carlo, le problème consistait également à rechercher des techniques à la fois rapides et fiables.

La recherche a été menée en trois étapes :
– un inventaire des techniques existantes ;
– des développements ;
– des expérimentations numériques.

9.1 Inventaire des techniques

L'inventaire a été réalisé avec pour objectif d'indiquer les limites de validité et les principes permettant la mise en œuvre de chaque technique recensée. Cet inventaire constitue ainsi un outil en soi.

Dans l'optique de rechercher une technique rapide, l'inventaire a permis de sélectionner les techniques qui nous semblaient les plus générales. Il s'agit des algorithmes de renormalisation standard ou tensorielle, de l'algorithme itératif de Le Loc'h et de la formule de Kruel-Romeu. Ces techniques sont rapides et ne font pas d'hypothèses sur la nature du milieu, mais leur niveau de précision est sujet à discussion et plusieurs techniques nécessitaient des développements. Ainsi, la renormalisation tensorielle n'avait été développée que pour le cas bi-dimensionnel, elle nécessitait une extension en trois dimensions. La formule de Kruel-Romeu n'avait pas encore été intensivement testée et l'algorithme de Le Loc'h nécessitait une extension pour les milieux anisotropes.

Par ailleurs, cet inventaire a montré que l'équivalence entre milieu homogène et milieu hétérogène est définie à l'aide de trois critères différents selon les auteurs : égalité des énergies dissipées, des flux ou des vitesses moyennes. Un éclaircissement sur la question de l'équivalence entre ces trois critères était utile.

9.2 Développements

Nous avons défini la perméabilité équivalente comme la perméabilité d'un milieu homogène fictif tel que s'il est soumis aux mêmes conditions aux limites que le milieu hétérogène réel il donne la même vitesse moyenne et le même gradient de charge moyen que le milieu hétérogène. En supposant que la loi de Darcy s'applique sur le milieu homogène, cette définition permet le calcul du tenseur de perméabilité de bloc avec une formule identique à celle proposée par Rubin and Gómez-Hernández (1990). Cette formule peut se simplifier, les intégrales volumiques deviennent des intégrales surfaciques. Il apparaît alors qu'il est possible de calculer le tenseur de perméabilité avec des conditions aux limites de type perméamètre. Ce qui, jusqu'à présent et à ma connaissance, n'avait pas été imaginé. Or les conditions aux limites de type perméamètre sont extrêmement aisée à mettre en œuvre au laboratoire. Ce résultat théorique permet donc de proposer une technique expérimentale originale pour mesurer le tenseur complet de perméabilité au laboratoire.

En s'appuyant sur l'algorithme de Le Loc'h (1987) et sur les travaux de Kruel-Romeu (1994), une nouvelle méthode rapide a été proposée : *la renormalisation simplifiée*. Elle permet le calcul de la perméabilité équivalente au moins 200 fois plus rapidement que ne le permet la résolution

numérique de l'équation de la diffusivité. Son principe est d'appliquer itérativement les résultats exacts en une dimension (association en série ou en parallèle) sur des paquets de deux mailles. Le nombre de mailles est ainsi réduit d'un facteur deux à chaque itération jusqu'à ne plus obtenir qu'une seule maille. Cet algorithme donne deux valeurs qui sont ensuite utilisées dans une formule heuristique permettant d'obtenir une estimation unique. La composition des deux valeurs prend en compte l'anisotropie due à l'aplatissement des mailles.

Pour pouvoir être comparée aux autres techniques, la renormalisation tensorielle a été étendue en trois dimensions.

9.3 Expériences numériques

Les effets du choix du critère d'équivalence et du choix des conditions aux limites sur le calcul du tenseur de perméabilité équivalente ont été illustrés pour des milieux stratifiés bi-dimensionnels.

Le biais lié à l'emploi des méthodes numériques pour le calcul de la perméabilité équivalente a été étudié en comparant des résultats numériques à des expériences de laboratoire.

Pour évaluer la fiabilité des méthodes rapides, un grand nombre d'expériences numériques ont été réalisées sur des milieux synthétiques. Ces expériences ont montré que les moyennes algébriques donnent des estimations de la perméabilité équivalente très dispersées par rapport aux perméabilités de référence. Ainsi, même si les moyennes algébriques sont parfois non-biaisées (nuage centré sur la première bissectrice), elles ont tendance à être peu fiables (nuage fortement dispersé) A l'opposé, les techniques qui sont ressorties de ce test comme les techniques les plus fiables sont les renormalisations tensorielle et simplifiée. La renormalisation simplifiée étant environ quatre fois plus rapide que la renormalisation tensorielle, nous avons conseillé son emploi tant que les axes principaux d'anisotropie sont voisins des axes de la grille. Nous insistons sur le fait que même si ces techniques sont les plus fiables parmi celles que nous avons testées, elles peuvent parfois présenter des écarts importants avec les valeurs de référence, ces écarts étant simplement plus petits que ceux obtenus avec les autres techniques, et, dans un grand nombre de cas, très faibles.

Les expériences d'écoulements diphasiques, avec des perméabilités absolues hétérogènes et des perméabilités relatives homogènes dans le milieu avant changement d'échelle, nous ont montré la nécessité d'utiliser, en plus des perméabilités absolues équivalentes, des courbes de perméabilités relatives équivalentes. Nous avons constaté que l'utilisation de la renormalisation simplifiée était envisageable pour des écoulements diphasiques. Des tests supplémentaires seraient cependant nécessaires pour confirmer ce résultat.

9.4 Synthèse et perspective

Finalement, le travail mené durant cette thèse a fourni plusieurs niveaux de résultats :
- le développement d'une technique de calcul du tenseur complet de perméabilité équivalente que ce soit dans un contexte de changement d'échelle ou de mesure de perméabilité au laboratoire ;
- le développement d'une nouvelle méthode rapide de calcul de la perméabilité équivalente : *la renormalisation simplifiée* ;
- un guide détaillé des techniques existantes ;
- l'évaluation de l'effet des conditions aux limites sur la perméabilité de bloc ;
- la comparaison de plusieurs techniques rapides ;
- un ensemble de milieux aléatoires, de perméabilités de référence et de perméabilités calculées par des méthodes rapides auquelles il est possible de confronter à l'avenir n'importe quelle nouvelle méthode rapide.

A cela s'ajoute un certain nombre de perspectives de travaux futurs.

Tout d'abord, il a été envisagé d'étendre la renormalisation simplifiée à une formulation tensorielle. Cette modification est prête du point de vue théorique en ce qui concerne l'algorithme itératif. Il reste à établir la formule de composition adéquate pour les termes non-diagonaux.

Pour déterminer au mieux les limites d'application des deux techniques rapides retenues (renormalisations tensorielle et simplifiée), il serait nécessaire de les tester dans des conditions d'anisotropie différentes de celles utilisées ici et dans des conditions d'application plus réalistes avec différents types de conditions aux limites.

La seconde voie dans laquelle nous avons pensé pouvoir étendre la renormalisation simplifiée est le calcul des perméabilités relatives équivalentes. Il est possible d'appliquer itérativement les résultats analytiques de Dale et al. (1994). Mais là encore il faudrait résoudre le problème de la composition des deux résultats obtenus à la fin du processus itératif.

Pour exploiter la base de donnée de plus de soixante mille milieux, perméabilités de référence et perméabilités calculés par les différentes méthodes rapides, il serait judicieux de l'utiliser afin de tester de nouvelles méthodes rapides. Par exemple, McCarthy (1995) montre sur une trentaine de milieux que la méthode de marche aléatoire qu'il propose (McCarthy 1990) serait environ trois foi plus rapide et plus précise que la renormalisation standard. Que donnerait la comparaison avec la renormalisation simplifiée et la renormalisation tensorielle ?

Enfin, il me paraît également extrêmement important de construire le dispositif expérimental permettant de mesurer les axes d'anisotropie d'un échantillon, afin de confronter la théorie à la pratique de laboratoire.

Dans une perspective plus générale, une question fondamentale reste ouverte : il est clair que la perméabilité de bloc dépend des conditions aux limites et du critère utilisée pour la définir. Si le volume du bloc étudié est suffisament grand par rapport à la taille des hétérogénéité, que le milieu peut être considéré comme statistiquement homogène et que l'écoulement est uniforme, alors on peut appliquer la loi de Darcy à grande échelle. Mais si ce n'est pas le cas, quelle est l'erreur que l'on fait ? Faut-il utiliser alors une autre loi que la loi de Darcy ? Les expressions non-locales (Neuman and Orr 1993; Indelman and Abramovich 1994) permettent-elles de donner une solution pratique à ces problèmes ?

Une autre question soulevée récemment est de savoir pourquoi la perméabilité ou la transmissivité mesuré sur le terrain augmente puis se stabilise lorsque l'échelle d'investigation augmente (Neuman 1994; Rovey and Cherkauer 1995; Sánchez-Vila, Carrera, and Girardi 1996) ?

Pour répondre à toutes ces questions, qui peuvent déboucher sur des applications pratiques importantes, il est clair que la recherche sur le changement d'échelle, ne serait-ce que pour les écoulements monophasiques, est encore un domaine extrêmement ouvert.

Annexes

LES

FONTAINES PUBLIQUES

DE LA VILLE DE DIJON

EXPOSITION ET APPLICATION

DES PRINCIPES A SUIVRE ET DES FORMULES A EMPLOYER

DANS LES QUESTIONS

DE

DISTRIBUTION D'EAU

OUVRAGE TERMINÉ

PAR UN APPENDICE RELATIF AUX FOURNITURES D'EAU DE PLUSIEURS VILLES

AU FILTRAGE DES EAUX

ET

A LA FABRICATION DES TUYAUX DE FONTE, DE PLOMB, DE TOLE ET DE BITUME

PAR

HENRY DARCY

INSPECTEUR GÉNÉRAL DES PONTS ET CHAUSSÉES.

La bonne qualité des eaux étant une des choses qui contribuent le plus à la santé des citoyens d'une ville, il n'y a rien à quoi les magistrats aient plus d'intérêt qu'à entretenir la salubrité de celles qui servent à la boisson commune des hommes et des animaux, et à remédier aux accidents par lesquels ces eaux pourraient être altérées, soit dans le lit des fontaines, des rivières, des ruisseaux où elles coulent, soit dans les lieux où sont conservées celles qu'on en dérive, soit enfin dans les puits d'où naissent des sources.

[De Jussieu, *Hist. de l'Académie royale des sciences*, 1733, p. 351.

PARIS

VICTOR DALMONT, ÉDITEUR,

Successeur de Carilian-Gœury et Ve Dalmont,

LIBRAIRE DES CORPS IMPÉRIAUX DES PONTS ET CHAUSSÉES ET DES MINES,

Quai des Augustins, 49.

1856

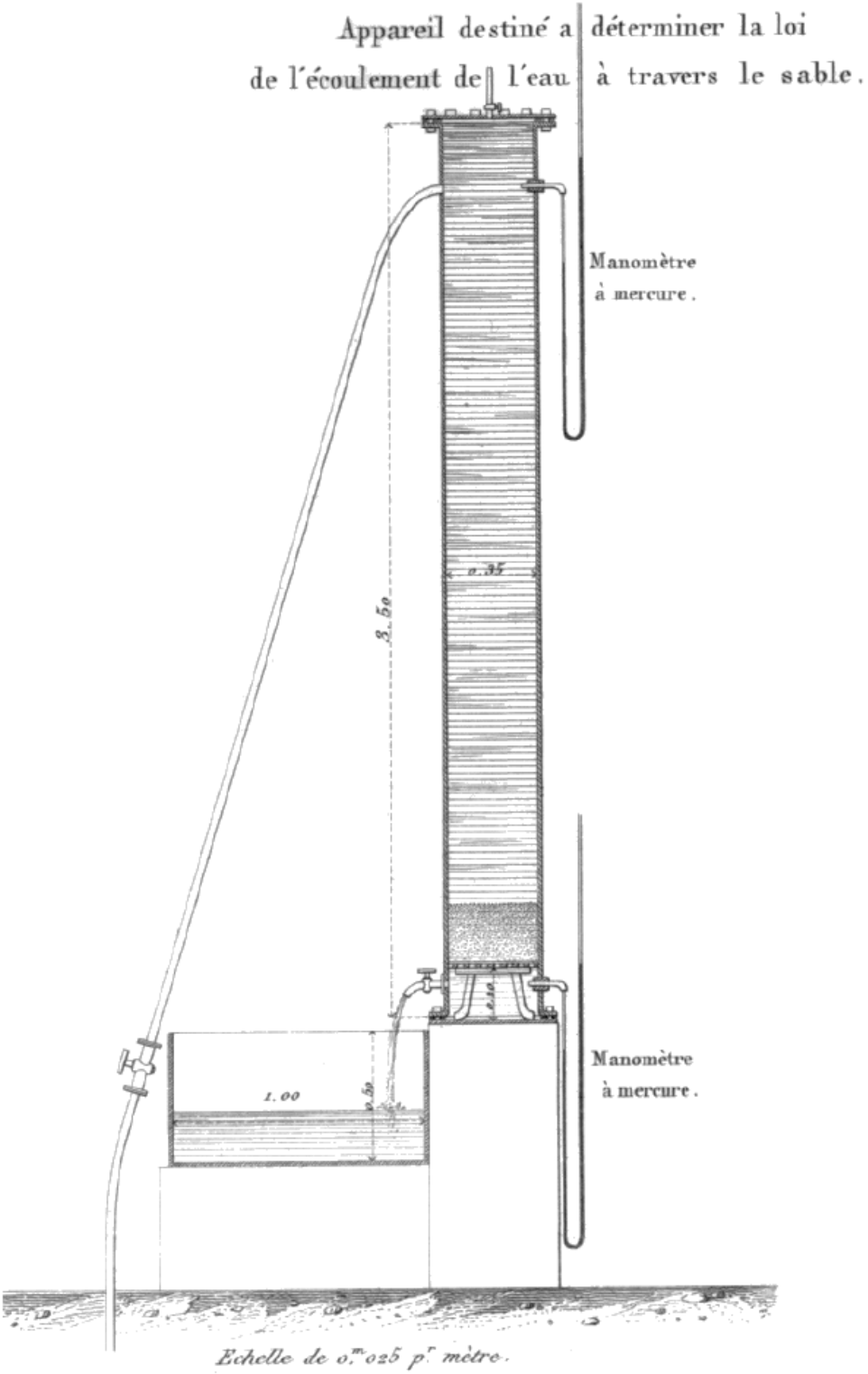
Annexe A

Histoire des fontaines publiques de Dijon

Cette annexe présente le texte original de l'annexe D de l'ouvrage de Darcy (1856) décrivant la loi de filtration de l'eau à travers le sable. Ce document a pu être numérisé et présenté dans cette thèse grâce à l'aimable coopération de la Bibliothèque de l'École des Mines de Paris.

Fig. 3.

Appareil destiné a déterminer la loi de l'écoulement de l'eau à travers le sable.



Echelle de o.m 025 p.r mètre.

table de la rivière, si, en un mot, la perte de charge subie par les eaux, au moment de leur pénétration à travers le radier, est grande, on comprend, dans ce cas, que la diminution de hauteur procurée par l'élargissement du radier à l'eau qui le surmonte serait à peu près insignifiante en présence de la perte de charge nécessaire à l'introduction du volume primitif. Cette diminution de hauteur ne pourrait donc apporter au débit de la galerie aucune amélioration sensible.

On peut, au reste, se rendre à peu près compte de l'accroissement de débit qu'un élargissement de galerie entraînerait; il suffirait pour cela d'établir une retenue à l'extrémité aval de la galerie, et de déterminer, au moyen de l'abaissement successif du niveau de cette retenue, la loi qui lie les accroissements du volume aux diminutions de hauteur d'eau sur le radier. Cette loi, comme on le sait, sera linéaire.

Et l'on déduira, de l'abaissement probable qui résulterait de l'élargissement du radier, l'accroissement de volume que cet abaissement entraînera. Il est facile d'obtenir immédiatement le cas limite, celui où la largeur du radier étant infinie, la hauteur d'eau sur sa surface pourrait être considérée comme nulle; et si, dans cette hypothèse extrême, on n'arrive qu'à un accroissement très-faible dans le débit, on n'aura pas à songer davantage à augmenter la largeur de la galerie.

Profondeur des galeries. — L'approfondissement des galeries présente des chances certaines d'accroissement de produit, et ces accroissements peuvent être mesurés d'une manière très-approchée (je suppose toujours la couche à traverser homogène), par le moyen indiqué plus haut pour déterminer la loi qui lie les diminutions de hauteur d'eau sur le radier aux accroissements du volume.

Je bornerai ici ce que j'avais à dire sur les grands filtres artificiels ou naturels. Quant aux filtres de ménage et des fontaines marchandes de la ville de Paris, on pourra recourir, si on veut en connaître les dispositions, à l'ouvrage de M. Dupuit sur les distributions d'eau.

Détermination des lois d'écoulement de l'eau à travers le sable.

J'aborde maintenant le récit des expériences que j'ai faites à Dijon de concert avec M. l'ingénieur Charles Ritter, pour déterminer les lois de l'écoulement de l'eau à travers les sables. Les expériences ont été répétées par M. l'ingénieur en chef Baumgarten.

L'appareil employé pl. 24, fig. 3, consistait en une colonne verticale de $2^m 50$ de hauteur, formée d'une portion de conduite de $0^m 35$ de diamètre intérieur, et close à chacune de ses extrémités par une plaque boulonnée.

A l'intérieur, et à $0^m 20$ au-dessus du fond, se trouve une cloison horizontale à

claire-voie, destinée à supporter le sable, et qui divise la colonne en deux chambres. Cette cloison est formée par la superposition de bas en haut d'une grille en fer à barreaux prismatiques de $0^m 007$, d'une grille à barreaux cylindriques de $0^m 005$, enfin d'une toile métallique à mailles de $0^m 002$. L'écartement des barreaux de chacune des grilles est égal à leur épaisseur, et les deux grilles sont disposées de façon que leurs barreaux soient dans des directions perpendiculaires l'une à l'autre.

La chambre supérieure de la colonne reçoit l'eau par un tuyau embranché sur la conduite de l'hôpital, et dont un robinet permet de modérer à volonté le débit; la chambre inférieure s'ouvre par un robinet sur un bassin de jaugeage de 1 mètre de côté.

La pression aux deux extrémités de la colonne est indiquée par des manomètres à mercure en U; enfin chacune des chambres est munie d'un robinet à air, essentiel pour la mise en charge de l'appareil.

Les expériences ont été faites avec du sable siliceux de Saône, composé ainsi qu'il suit :

$0^m 58$ de sable passant au crible de $0^{mil.} 77$
$0^m 13$ — — $1\ 10$
$0^m 12$ — — $2\ 00$
$0^m 17$ de menu gravier, débris de coquilles, etc.

Il présente environ $\frac{38}{100}$ de vide.

Le sable était versé et tassé dans la colonne préalablement remplie d'eau, afin que les vides de la masse filtrante ne continssent plus d'air, et la hauteur du sable n'était mesurée qu'à la fin de chaque série d'expériences, après que le passage de l'eau l'avait convenablement tassé.

Chaque expérience consistait à établir dans la chambre supérieure de la colonne, par la manœuvre du robinet d'amenée, une pression déterminée ; puis, lorsque par deux observations l'on s'était assuré que l'écoulement était devenu sensiblement uniforme, on notait le débit du filtre pendant un certain temps et on en concluait le débit moyen par minute.

Pour de faibles charges, le repos presque complet du mercure du manomètre permettait d'apprécier le millimètre, représentant $26^{mil.} 2$ d'eau ; lorsqu'on opérait sous de fortes pressions, le robinet d'amenée était presqu'entièrement ouvert, et alors le manomètre, malgré le diaphragme dont il était muni, présentait des oscillations continuelles; néanmoins, les fortes oscillations n'étaient qu'accidentelles, et on pouvait apprécier, à 5 millimètres près, la hauteur moyenne du mercure, c'est-à-dire connaître la pression en eau à $1^m 30$ près.

Toutes ces oscillations manométriques étaient dues aux coups de bélier pro-

duits par le jeu des nombreuses bornes-fontaines de l'hôpital, lieu où était placé l'appareil expérimental.

Toutes les pressions ont été rapportées au niveau de la face inférieure du filtre, et on n'a tenu aucun compte du frottement dans la partie supérieure de la colonne, lequel était évidemment négligeable.

Tableau des expériences faites à Dijon les 29 et 30 octobre et 2 novembre 1855.

NUMÉROS de L'EXPÉRIENCE	DURÉE.	DÉBIT MOYEN par minute	PRESSIONS moyennes.	RAPPORT entre LES VOLUMES ET LA PRESSION.	OBSERVATIONS.
	1re Série, avec une épaisseur de sable de 0m 58.				
	25′	3lit. 60	1.11	3.25	Le sable n'a pas été lavé.
1	20′	7 65	2.36	3.24	
2	15′	12 00	4.00	3.00	
3	18′	14 28	4.90	2.91	La colonne manométrique n'a éprouvé que de faibles mouvements.
4	17′	15 20	5.02	3.03	
5	17′	21 80	7.63	2.86	
6	11′	23 41	8.13	2.88	
7	15′	24 50	8.58	2.85	Oscillations très-sensibles.
8	13′	27 80	9.86	2.82	
9	10′	29 40	10.89	2.70	Fortes oscillations manométriques.
10					
	2me Série, avec une épaisseur de sable de 1m 14.				
1	30′	2 66	2.60	1.01	Le sable n'est pas lavé.
2	21′	4 28	4.70	0.91	
3	26′	6 26	7.71	0.81	
4	18′	8 60	10.34	0.83	
5	10′	8 90	10.75	0.83	Très-fortes oscillations.
6	24′	10 40	12.34	0.84	
	3me Série, avec une épaisseur de sable de 1m 71.				
1	31′	2 13	2 57	0.83	Sable lavé.
2	20′	3 90	5.09	0.77	
3	17′	7 25	9.46	0.76	
4	20′	8 55	12.35	0.69	Très-fortes oscillations.
	4me Série, avec une épaisseur de sable de 1m 10.				
1	20′	5 25	6.98	0.75	Sable lavé d'un grain un peu plus gros que le précédent.
2	20′	7 00	9.95	0.70	Faibles oscillations par suite de l'obturation partielle de l'ouverture du manomèt.
3	20′	10 30	13.93	0.74	

Le tableau des expériences, ainsi que leur représentation graphique, démontrent que le débit de chaque filtre croît proportionnellement à la charge.

Pour les filtres sur lesquels on a opéré, le débit par seconde et par mètre carré est lié très-approximativement à la charge par les relations suivantes :

1re série. . . $Q = 0{,}493\,P$ — 3me — . . . $Q = 0{,}126\,P$

2me — . . . $Q = 0{,}145\,P$ — 4me — . . . $Q = 0{,}123\,P$.

En appelant I la charge proportionnelle par mètre d'épaisseur du filtre, ces formules se transforment dans les suivantes :

1re série. . . $Q = 0{,}286\,I$	3me — . . . $Q = 0{,}216\,I$
2me — . . . $Q = 0{,}165\,I$	4me — . . . $Q = 0{,}332\,I$.

Les différences entre les valeurs du coefficient $\frac{Q}{I}$ proviennent de ce que le sable employé n'a pas été constamment homogène. Pour la 2me série, il n'avait pas été lavé; pour la 3me, il était lavé; pour la 4me, il était très-bien lavé et d'un grain un peu plus fort.

Il paraît donc que, pour un sable de même nature, on peut admettre que le volume débité est proportionnel à la charge et en raison inverse de l'épaisseur de la couche traversée.

Dans les expériences précédentes, la pression sous le filtre a toujours été égale à celle de l'atmosphère; il était intéressant de rechercher si la loi de proportionnalité que l'on vient de reconnaître entre les volumes débités et les charges qui les produisent subsistait encore, lorsque la pression sous le filtre était plus grande ou plus petite que la pression atmosphérique: tel est le but des expériences nouvelles opérées les 17 et 18 février 1856 par les soins de M. Ritter.

Ces expériences sont rapportées dans le tableau synoptique suivant : la colonne 4 donne les pressions sur le filtre; la colonne 5 les pressions sous le filtre, tantôt plus grandes et tantôt plus petites que le poids P de l'atmosphère; la colonne 6 présente les différences des pressions; enfin la colonne 7 indique les rapports des volumes débités aux différences des pressions existant sur et sous le filtre. L'épaisseur de la couche de sable traversée était égale à 1m 10.

NUMÉRO de L'EXPÉRIENCE	DURÉE.	DÉBIT MOYEN par minute.	PRESSION MOYENNE SUR LE FILTRE	PRESSION MOYENNE SOUS LE FILTRE	DIFFÉRENCE des PRESSIONS.	RAPPORT des VOLUMES aux pressions.	OBSERVATIONS.
1	2	3	4	5	6	7	8
		l.	m.	m.	m.		
1	15′	18,8	P + 9,48	P − 3,60	13,08	1,44	Fortes oscillations dans le manomètre supérieur.
2	15′	18,3	P + 12,88	P 0	12,88	1,42	*Id.*
3	10′	18,0	P + 9,80	P − 2,78	12,58	1,43	*Id.*
4	10′	17,4	P + 12,87	P + 0,46	12,41	1,40	Faibles.
5	20′	18,1	P + 12,80	P + 0,49	12,35	1,47	Assez faibles.
6	16′	14,9	P + 8,86	P − 0,83	9,69	1,54	Presque nulles.
7	15′	12,1	P + 12,84	P + 4,40	8,44	1,43	Très-fortes.
8	15′	9,8	P + 6,71	P 0	6,71	1,46	Très-faibles.
9	20′	7,9	P + 12,81	P + 7,03	5,78	1,37	Très-fortes.
10	20′	8,65	P + 5,58	P 0	5,58	1,55	Presque nulles.
11	20′	4,5	P + 2,98	P 0	2,98	1,51	*Id.*
12	20′	4,15	P + 12,86	P + 9,88	2,98	1,39	Assez fortes.
							On a déjà expliqué la cause de ces oscillations.

75

La constance des rapports de la 7e colonne témoigne de la vérité de la loi déjà énoncée : on remarquera cependant qu'ici encore les pressions sur et sous le filtre comprennent des limites très-étendues : sous le filtre, en effet, la pression a varié de P+9,88 à P—3,60, et sur le filtre de P+12,88 à P+2,98.

Ainsi, en appelant e l'épaisseur de la couche de sable, s sa superficie, P la pression atmosphérique, h la hauteur de l'eau sur cette couche, on aura P+h pour la pression à laquelle sera soumise la base supérieure; soient, de plus, P$\pm h_0$ la pression supportée par la surface inférieure, k un coefficient dépendant de la perméabilité de la couche, q le volume débité, on a

$$q = k\frac{s}{e}[h + e \mp h_0] \text{ qui se réduit à } q = k\frac{s}{e}(h+e)$$

quand $h_0 = 0$, ou lorsque la pression sous le filtre est égale à la pression atmosphérique.

Il est facile de déterminer la loi de décroissance de la hauteur d'eau h sur le filtre; en effet, soit dh la quantité dont cette hauteur s'abaisse pendant un temps dt, sa vitesse d'abaissement sera $-\frac{dh}{dt}$; mais l'équation ci-dessus donne encore pour cette vitesse l'expression

$$\frac{q}{s} = v = \frac{k}{e}(h+e)$$

On aura donc $$-\frac{ah}{at} = \frac{k}{e}(h+e); \text{ d'où } \frac{dh}{(h+e)} = -\frac{k}{e}dt,$$

et $$l(h+e) = C - \frac{k}{e}t.$$

Si la valeur h_0 correspond au temps t_0 et h à un temps quelconque t, il viendra

$$l(h+e) = l(h_0+e) - \frac{k}{e}[t - t_0] \qquad (1)$$

Si on remplace maintenant $h+e$ et h_0+e par $\frac{qe}{sk}$ et $\frac{q_0 e}{sk}$, il viendra

$$lq = lq_0 - \frac{k}{e}(t - t_0) \qquad (2)$$

et les deux équations (1) et (2) donnent, soit la loi d'abaissement de la hauteur sur le filtre, soit la loi de variation des volumes débités à partir du temps t_0.

Si k et e étaient inconnus, on voit qu'il faudrait deux expériences préliminaires pour faire disparaître de la seconde le rapport inconnu $\frac{k}{e}$.

Annexe B

Calcul du tenseur équivalent pour l'assemblage de deux blocs

Le calcul présenté ci-dessous s'inspire de l'article de Kasap and Lake (1989). En effet on prend les mêmes hypothèses de base et on arrive au même résultat. Mais ici le calcul est mené en trois dimensions et les équations ne sont pas posées exactement de la même façon. C'est pourquoi la démonstration est reprise ici.

Soit un parallélépipède composé de deux blocs, appelés 1 et 2, dont les tenseurs de perméabilité K_1 et K_2 sont constants. On cherche le tenseur équivalent au sens des flux, sous les hypothèses suivantes :

1. Les lignes de courant sont des droites ;

2. Les tenseurs de perméabilité des milieux 1 et 2 sont symétriques.

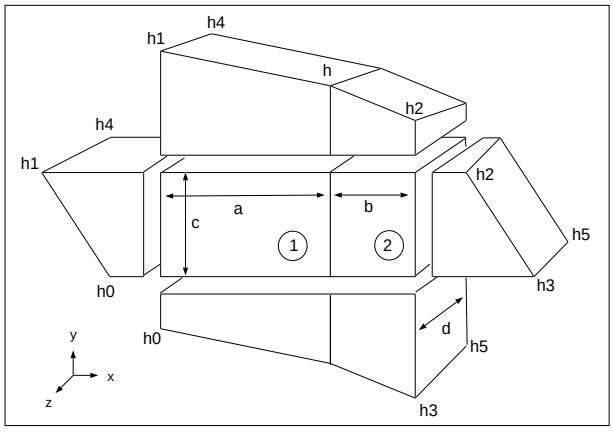


FIG. B.1 : *Conditions aux limites de type potentiel imposé variant linéairement sur les faces du bloc étudié.*

B.1 choix des conditions limites

L'hypothèse 1 est vérifiée si dans chaque milieu la vitesse est constante dans l'espace, donc par application de la loi de Darcy, si le gradient de charge est également constant dans l'espace. On choisit donc des conditions aux limites telles que la charge varie linéairement sur chaque domaine et présente un gradient dans chaque direction de l'espace (voir Figure B.1). Avec les valeurs de charge définies sur le dessin on a :

$$\text{en 1 :} \left\{ \begin{array}{lcl} \frac{\partial h}{\partial x} & = & \frac{h_1-h}{a} \\ \frac{\partial h}{\partial y} & = & \frac{h_0-h_1}{c} \\ \frac{\partial h}{\partial z} & = & \frac{h_4-h_1}{d} \end{array} \right. , \qquad \text{en 2 :} \left\{ \begin{array}{lcll} \frac{\partial h}{\partial x} & = & \frac{h-h_2}{b} & \\ \frac{\partial h}{\partial y} & = & \frac{h_3-h_2}{c} & = \quad \frac{h_0-h_1}{c} \\ \frac{\partial h}{\partial z} & = & \frac{h_5-h_3}{d} & = \quad \frac{h_4-h_1}{d} \end{array} \right.$$

La continuité de la charge sur les deux milieux implique l'égalité des gradients en y et z d'où :

$$\begin{array}{rcl} h_3 & = & h_2 + h_0 - h_1 \\ h_5 & = & h_3 + h_4 - h_1 \end{array}$$

Pour déterminer h, on écrit l'égalité des vitesses normales à l'interface 1-2 $V_1^x = V_2^x$.

$$k_1^x \left(\frac{h_1-h}{a}\right) + k_1^{xy} \left(\frac{h_0-h_1}{c}\right) + k_1^{xz} \left(\frac{h_4-h_1}{d}\right) = k_2^x \left(\frac{h-h_2}{b}\right) + k_2^{xy} \left(\frac{h_0-h_1}{c}\right) + k_2^{xz} \left(\frac{h_4-h_1}{d}\right)$$

Et on trouve :

$$h = \frac{bk_1^x h_1 + ak_2^x h_2 + ab\left[(k_1^{xy}-k_2^{xy})\left(\frac{h_0-h_1}{c}\right) + (k_1^{xz}-k_2^{xz})\left(\frac{h_4-h_1}{d}\right)\right]}{bk_1^x + ak_2^x}$$

B.2 calcul de la perméabilité équivalente

On recherche le tenseur K qui vérifie $\boldsymbol{V} = -K \cdot \mathbf{grad}(h)$, avec V le flux moyen à l'échelle du bloc. C'est à dire :

$$\begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} K^x & K^{xy} & K^{xz} \\ K^{xy} & K^y & K^{yz} \\ K^{xz} & K^{yz} & K^z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{h_1-h_2}{a+b} \\ \frac{h_0-h_1}{c} \\ \frac{h_4-h_1}{d} \end{pmatrix}$$

B.2.1 Calcul de V_x

La composante de la vitesse en x est la même sur les domaines 1 et 2. On peut donc écrire :

$$-V_x = -V_1^x = k_1^x \left(\frac{h_1-h}{a}\right) + k_1^{xy} \left(\frac{h_0-h_1}{c}\right) + k_1^{xz} \left(\frac{h_4-h_1}{d}\right)$$

On remplace h par sa valeur, puis on développe et on regroupe. On obtient :

$$V_x = \left(\frac{(a+b)k_1^x k_2^x}{bk_1^x + ak_2^x}\right) \cdot \left(\frac{h_1-h_2}{a+b}\right) + \left(\frac{bk_1^x k_2^{xy} + ak_2^x k_1^{xy}}{bk_1^x + ak_2^x}\right) \cdot \left(\frac{h_0-h_1}{c}\right) + \left(\frac{bk_1^x k_2^{xz} + ak_2^x k_1^{xz}}{bk_1^x + ak_2^x}\right) \cdot \left(\frac{h_4-h_1}{d}\right)$$

B.2.2 Calcul de V_y et V_z

La vitesse moyenne en y est donnée par le débit total traversant le domaine en y divisé par l'aire de la section, soit :

$$-V_y = \frac{acV_1^y + bcV_2^y}{(a+b)e}$$

En remplaçant V_1^y et V_2^y par leurs valeurs, puis en développant cette équation et en regroupant on trouve :

$$\begin{aligned} -V_y &= \left(\frac{bk_1^x k_2^{xy} + ak_2^x k_1^{xy}}{bk_1^x + ak_2^x}\right) \cdot \left(\frac{h_1 - h_2}{a+b}\right) + \frac{1}{a+b}\left[ak_1^y + bk_2^y - \frac{ab(k_1^{xy} - k_2^{xy})^2}{bk_1^x + ak_2^x}\right] \cdot \left(\frac{h_0 - h_1}{c}\right) + \cdots \\ &\quad + \frac{1}{a+b}\left[ak_1^{yz} + bk_2^{yz} - \frac{ab(k_1^{xy} - k_2^{xy})(k_1^{xz} - k_2^{xz})}{bk_1^x + ak_2^x}\right] \cdot \left(\frac{h_4 - h_1}{d}\right) \end{aligned}$$

Enfin, le même calcul en z donne :

$$\begin{aligned} -V_z &= \frac{adV_1^z + bdV_2^z}{(a+b)d} \\ &= \left(\frac{bk_1^x k_2^{xz} + ak_2^x k_1^{xz}}{bk_1^x + ak_2^x}\right) \cdot \left(\frac{h_1 - h_2}{a+b}\right) + \frac{1}{a+b}\left[ak_1^{yz} + bk_2^{yz} - \frac{ab(k_1^{xy} - k_2^{xy})(k_1^{xz} - k_2^{xz})}{bk_1^x + ak_2^x}\right] \cdot \left(\frac{h_0 - h_1}{c}\right) + \cdots \\ &\quad + \frac{1}{a+b}\left[ak_1^z + bk_2^z - \frac{ab(k_1^{xz} - k_2^{xz})^2}{bk_1^x + ak_2^x}\right] \cdot \left(\frac{h_4 - h_1}{d}\right) \end{aligned}$$

B.3 Conclusion

Finalement par identification on obtient :

$$\boxed{\begin{aligned} K^x &= \tfrac{(a+b)(k_1^x k_2^x)}{bk_1^x + ak_2^x} \\ K^y &= \tfrac{1}{a+b}\left[ak_1^y + bk_2^y - ab \cdot \tfrac{(k_1^{xy} - k_2^{xy})^2}{bk_1^x + ak_2^x}\right] \\ K^z &= \tfrac{1}{a+b}\left[ak_1^z + bk_2^z - ab \cdot \tfrac{(k_1^{xz} - k_2^{xz})^2}{bk_1^x + ak_2^x}\right] \\ K^{xy} &= \tfrac{bk_1^x k_2^{xy} + ak_2^x k_1^{xy}}{bk_1^x + ak_2^x} \\ K^{xz} &= \tfrac{bk_1^x k_2^{xz} + ak_2^x k_1^{xz}}{bk_1^x + ak_2^x} \\ K^{yz} &= \tfrac{1}{a+b}\left[ak_1^{yz} + bk_2^{yz} - ab \cdot \tfrac{(k_1^{xy} - k_2^{xy})(k_1^{xz} - k_2^{xz})}{bk_1^x + ak_2^x}\right] \end{aligned}} \qquad \text{(B.1)}$$

Annexe C

Renormalisation 3D

Ce document présente les équations permettant de mettre en œuvre en trois dimensions l'ensemble des techniques dites de renormalisation.

C.1 Renormalisation standard

Nous appelons renormalisation standard la procédure proposée par King (1989). Les hypothèses de travail sont 1) les perméabilités locales sont des tenseurs diagonaux, 2) l'emploi de conditions limites de type perméamètre et 3) l'utilisation d'une méthode d'approximation de type différences finies avec un schéma centré.

C.1.1 Système d'équations

En trois dimensions, le plus simple est de poser le problème en terme de résolution de l'équation de la diffusivité sur le réseau proposé par King par une méthode de différences finies. À titre d'illustration, la figure C.3 montre toutes les étapes nécessaires pour calculer la perméabilité équivalente en trois dimensions par transformations triangle-étoile successives.

Nous étudierons les équations découlant de deux définitions de la perméabilité équivalente. La première est une perméabilité qui vérifie l'égalité de l'énergie dissipée à petite et grande échelle, la seconde vérifie l'égalité des flux.

On reprend directement l'équation de bilan pour un nœud en écoulement permanent (Marsily 1986, équation 12.2.2, page 344). Les hypothèses sont : la masse volumique est constante et il n'y

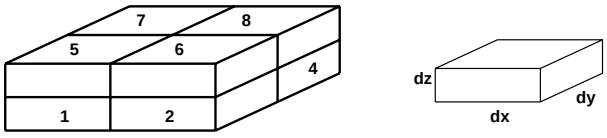


FIG. C.1 : *Cellule de base en trois dimensions. A gauche numérotation des mailles, à droite taille d'une maille.*

a pas de terme source. On rajoute les mailles H et B pour passer en 3D (figure C.2). Et on met les charges en facteur :

$$\begin{array}{l} b^x_{EC}H_E + b^x_{WC}H_W + b^y_{NC}H_N + b^y_{SC}H_C + b^z_{HC}H_H + b^z_{BC}H_B - \cdots \\ -\cdots (b^x_{EC} + b^x_{WC} + b^y_{NC} + b^y_{SC} + b^z_{HC} + b^z_{BC})H_C \end{array} \quad = \quad 0 \tag{C.1}$$

avec

$$b^u_{ij} = \left(\frac{dx \cdot dy \cdot dz}{du^2}\right) \frac{2k^u_i k^u_j}{k^u_i + k^u_j}$$

Conditions limites

Flux nul

Imaginons au nœud C une condition de flux nul en direction de la maille I. Cela revient à éliminer la maille I. L'équation (C.1) se simplifie en écrivant :

$$b_{IC} = 0$$

Potentiel imposé

Soit H_0 fixé sur la maille I (u est la l'axe correspondant au segment CI dans le repère x, y, z). Le flux venant de I est égal à : $\frac{dx \cdot dy \cdot dz}{du} k_C \left(\frac{H_0 - H_C}{1/2du}\right)$. L'équation (C.1) est modifiée :
- le terme en H_I disparaît
- le coefficient de H_C devient : $b_{IC} = 2\left(\frac{dx \cdot dy \cdot dz}{du^2}\right) k^u_C = b^u_C$
- un terme constant apparaît à droite de l'égalité. Il est égal à : $b^u_C \cdot H_0$.

Calcul des charges

Si l'on écrit l'équation de bilan en chacun des huit nœuds de la discrétisation du milieu poreux on obtient un système de huit équations à huit inconnues : les charges aux nœuds. Ce système peut se mettre sous la forme matricielle suivante :

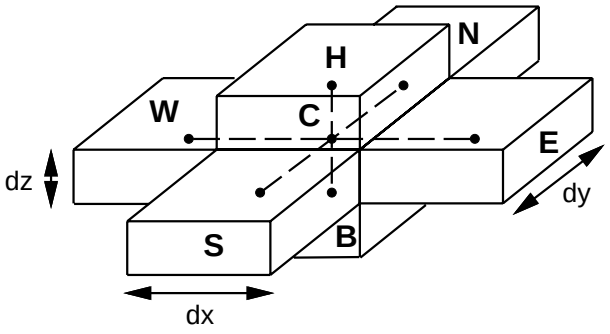


FIG. C.2 : *Schéma centré aux différences finies en trois dimensions. Les nœuds sont aux centres des mailles. Celles-ci sont notées C pour la maille centrale, E,W,N,S,H et B respectivement pour les six voisines.*

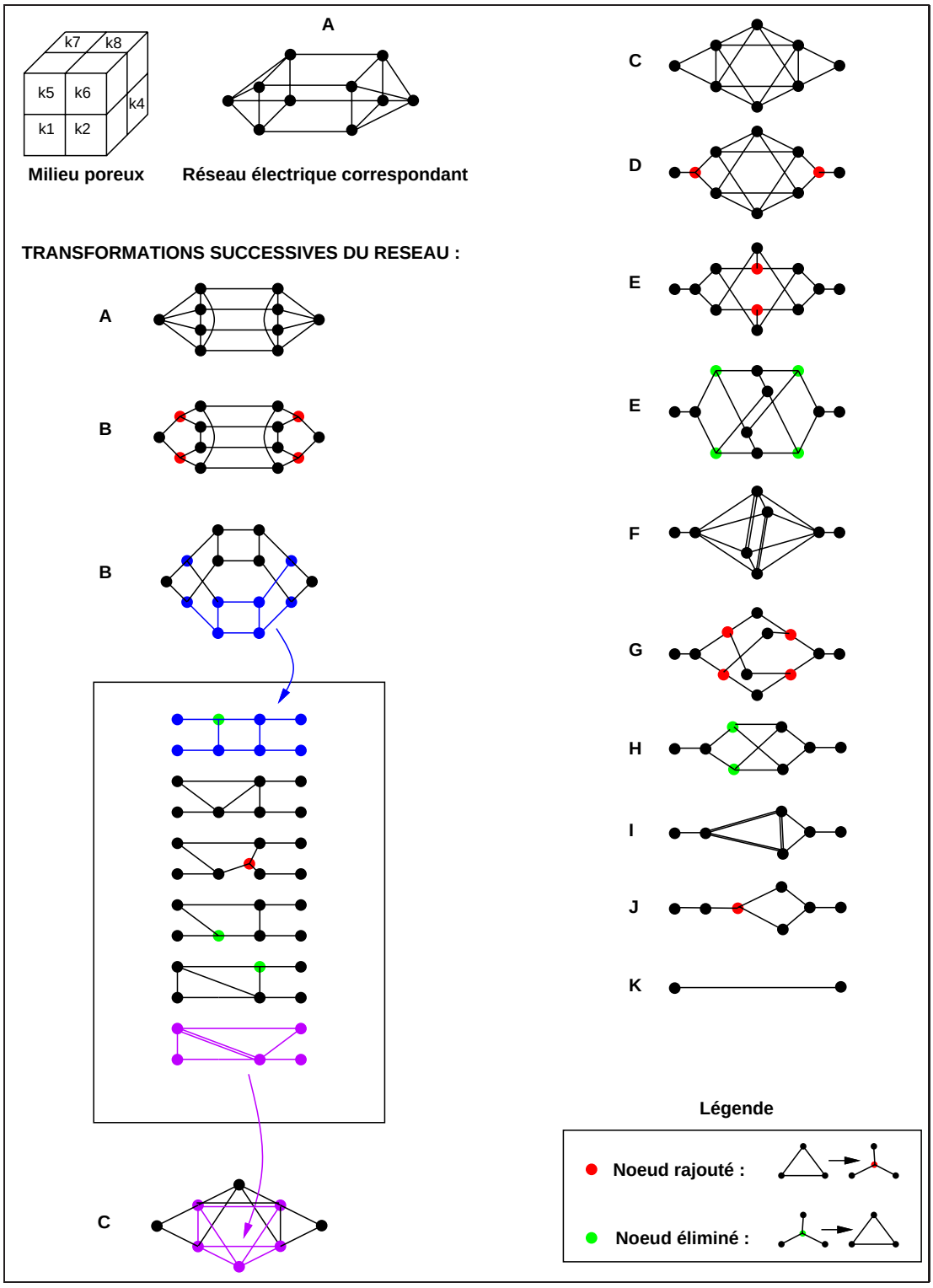


FIG. C.3 : *Renormalisation standard. Procédure de base pour assembler huit mailles en trois dimensions.*

$$\begin{pmatrix} d_1^{2,3,5} & -b_{12}^x & -b_{13}^y & 0 & -b_{15}^z & 0 & 0 & 0 \\ -b_{21}^x & d_2^{1,4,6} & 0 & -b_{24}^y & 0 & -b_{26}^z & 0 & 0 \\ -b_{31}^y & 0 & d_3^{4,1,7} & -b_{34}^x & 0 & 0 & -b_{37}^z & 0 \\ 0 & -b_{42}^y & -b_{43}^x & d_4^{3,2,8} & 0 & 0 & 0 & -b_{48}^z \\ -b_{51}^z & 0 & 0 & 0 & d_5^{6,7,1} & -b_{56}^x & -b_{57}^y & 0 \\ 0 & -b_{62}^z & 0 & 0 & -b_{65}^x & d_6^{5,8,2} & 0 & -b_{68}^y \\ 0 & 0 & -b_{73}^z & 0 & -b_{75}^y & 0 & d_7^{8,5,3} & -b_{78}^x \\ 0 & 0 & 0 & -b_{84}^z & 0 & -b_{86}^y & -b_{87}^x & d_8^{7,6,4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \\ h_5 \\ h_6 \\ h_7 \\ h_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1^x \\ 0 \\ b_3^x \\ 0 \\ b_5^x \\ 0 \\ b_7^x \\ 0 \end{pmatrix}$$

avec

$$d_i^{j,k,l} = b_i^x + b_{ij}^x + b_{ik}^y + b_{il}^z, \qquad b_i^u = 2\left(\frac{dx \cdot dy \cdot dz}{du^2}\right) k_i^u, \qquad b_{ij}^u = \left(\frac{dx \cdot dy \cdot dz}{du^2}\right) \frac{2k_i^u k_j^u}{k_i^u + k_j^u}$$

Soit, sous forme condensée :

$$A \cdot \boldsymbol{H} = \boldsymbol{B} \tag{C.2}$$

Ce système se résout numériquement et permet d'obtenir $\boldsymbol{H}$.

Calcul de la perméabilité équivalente

Égalité des débits

On définit la perméabilité à grande échelle comme la perméabilité d'un milieu homogène fictif tel qu'il donne le même débit que le milieu hétérogène s'il est soumis au même gradient de charge. Soit Q_{hom} le débit traversant le milieu homogène :

$$Q_{hom} = K_{eq}^{xx}\left(\frac{\Delta H}{2 \cdot dx}\right)(4 \cdot dy \cdot dz) = 2\left(\frac{dy \cdot dz}{dx}\right) K_{eq}^{xx}, \qquad \Delta H = 1 \quad \text{(cond. limites)}$$

Soit Q_{het} le débit traversant le milieu hétérogène. Il se calcule par addition des débits élémentaires. Si l'on prend les débits sortant des mailles 2,4,6 et 8 on obtient :

$$Q_{het} = \sum_{i=2,4,6,8} k_i^x \left(\frac{h_i - 0}{1/2dx}\right) dy \cdot dz = 2\left(\frac{dy \cdot dz}{dx}\right) \sum_{i=2,4,6,8} k_i^x \cdot h_i$$

Ensuite, on écrit l'égalité de ces deux débits et on en déduit la perméabilité équivalente.

$$Q_{het} = Q_{hom} \quad \Rightarrow \quad \boxed{K_{eq}^{xx} = \sum_{i=2,4,6,8} k_i^x \cdot h_i} \tag{C.3}$$

Égalité des énergies dissipées

L'énergie dissipée sur le milieu hétérogène s'exprime par l'intégrale volumique (Ω représente le volume du milieu poreux) :

$$E_{het} = \int_\Omega -(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla} h)\, d\omega$$

En intégrant par partie on peut simplifier cette équation :

$$E_{het} = \int_\Gamma h(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})d\gamma - \int_\Omega h\ div(\boldsymbol{v})d\omega, \quad \text{comme} \quad div(\boldsymbol{v}) = 0, \quad \Rightarrow \quad E_{tot} = \int_\Gamma h(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})d\gamma$$

Nous allons maintenant exprimer de façon discrète cette intégrale. La seule partie de la surface du bloc de huit mailles où le produit $h(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})$ est non nul est la face à potentiel imposé égal à 1. Ailleurs, soit le flux est nul, soit h est nul. On a donc :

$$E_{het} = \sum_{i=1,3,5,7} 1\ k_i^x \left(\frac{1-h_i}{1/2dx}\right)(dy\cdot dz) = \left(\frac{2\cdot dy\cdot dz}{dx}\right)\sum_{i=1,3,5,7} k_i^x\,(1-h_i)$$

L'énergie dissipée dans le milieu homogène se calcule par la même intégrale. Mais, dans ce cas la vitesse et le gradient de charge sont constants. On peut donc écrire directement :

$$E_{hom} = -\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{\nabla}H\cdot\Omega = K_{eq}^{xx}\left(\frac{\Delta H}{2\cdot dx}\right)\left(\frac{\Delta H}{2\cdot dx}\right)(8\cdot dx\cdot dy\cdot dz) = K_{eq}^{xx}\left(\frac{2\cdot dy\cdot dz}{dx}\right)$$

On écrit maintenant l'égalité de l'énergie consommée dans le milieu hétérogène et homogène et on en déduit la perméabilité équivalente :

$$E_{het} = E_{hom} \quad \Rightarrow \quad K_{eq}^{xx} = \sum_{i=1,3,5,7} k_i^x\,(1-h_i)$$

Remarque : Les deux définitions sont finalement équivalentes. Car la somme obtenue ici est égale à la précédente (équation (C.3)) du fait de l'égalité entre le flux entrant et le flux sortant du domaine.

C.2 Une première variation

C.2.1 Le schéma direct

Kruel-Romeu (1994) remarque que dans le cas des milieux log-normaux et d'un damier un schéma direct tel que celui présenté sur la figure C.4 est plus précis que le schéma centré de King (1989).

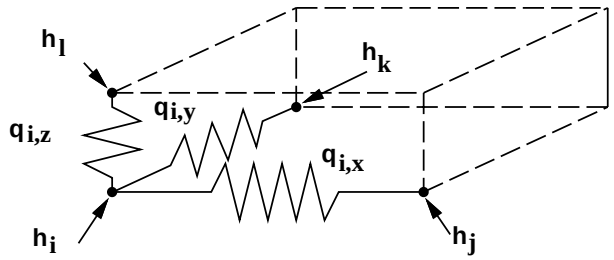


FIG. C.4 : *Réseau de liens équivalents et notations pour la maille i.*

Chaque maille est remplacée par trois liens et quatre nœuds (figure C.4). Chaque lien a la perméabilité de la maille pour la direction donnée. On calcule alors le débit sur la maille par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} q_i^x &=& k_i^{xx}\left[\frac{h_i-h_j}{dx}\right] dy\cdot dz \\ q_i^y &=& k_i^{yy}\left[\frac{h_i-h_k}{dy}\right] dx\cdot dz \\ q_i^z &=& k_i^{zz}\left[\frac{h_i-h_l}{dz}\right] dx\cdot dy \end{array}\right.$$

C.2.2 Équations pour le calcul de K_{eq}

On impose des conditions aux limites de type perméamètre successivement en x, y et z. Du fait des conditions de flux nul, le réseau se simplifie considérablement.

Pour le calcul de K_{eq}^{xx} on impose un potentiel égal à 1 sur les nœuds 1,3,5 et 7, un potentiel nul de l'autre côté et des flux nuls sur les bords. Le réseau se simplifie et on peut écrire les équations de bilan aux nœuds 2,4,6,8 sous la forme :

$$\left(\begin{array}{cccc} d_2^{1,2,2} & -b_2^y & -b_2^z & 0 \\ -b_2^y & d_4^{3,2,4} & 0 & -b_4^z \\ -b_2^z & 0 & d_6^{5,6,2} & -b_6^y \\ 0 & -b_4^z & -b_6^y & -d_8^{7,6,4} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} h_2 \\ h_4 \\ h_8 \\ h_6 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} b_1^x \\ b_3^x \\ b_5^x \\ b_7^x \end{array}\right) \quad \text{avec} \quad d_i^{j,k,l} = b_i^x + b_j^x + b_k^y + b_l^z$$

Le débit qui traverse le réseau s'obtient en faisant le calcul :

$$Q_{tot} = \frac{dy\cdot dz}{dx}\sum_{i=2,4,8,6} h_i\cdot k_i^x \quad \Rightarrow \quad \boxed{K_{eq}^{xx} = \frac{1}{2}\sum_{i=2,4,8,6} h_i\cdot k_i^x} \tag{C.4}$$

De même pour K_{eq}^{yy} :

$$\left(\begin{array}{cccc} d_3^{3,1,3} & -b_3^x & -b_3^z & 0 \\ -b_3^x & d_2^{3,2,4} & 0 & -b_4^z \\ -b_3^z & 0 & d_7^{7,5,3} & -b_7^x \\ 0 & -b_4^z & -b_7^x & -d_8^{7,6,4} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} h_3 \\ h_4 \\ h_7 \\ h_8 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} b_1^y \\ b_2^y \\ b_5^y \\ b_6^y \end{array}\right) \quad \text{avec} \quad d_i^{j,k,l} = b_i^y + b_j^x + b_k^y + b_l^z$$

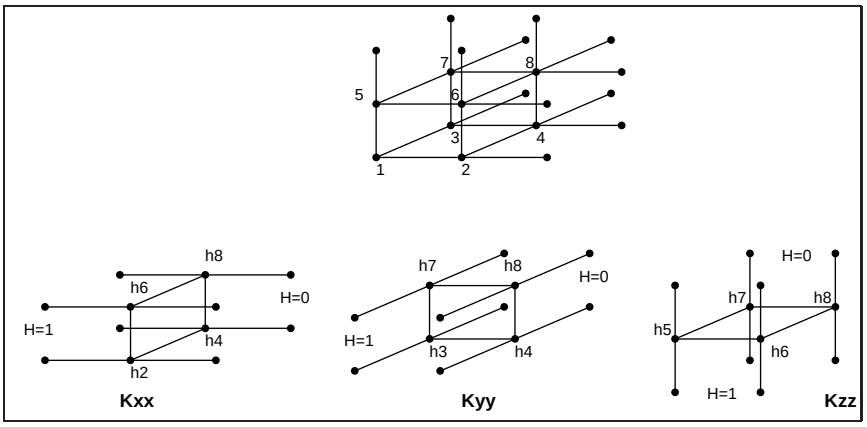


FIG. C.5 : *Réseau décrivant le milieu poreux à huit mailles (En haut). En bas les trois réseaux simplifiés correspondant aux conditions aux limites de type perméamètre. On a éliminé tous les liens traversés par un débit nul.*

$$K_{eq}^{yy} = \frac{1}{2} \sum_{i=3,4,7,8} h_i \cdot k_i^y$$

Et enfin pour K_{eq}^{zz} :

$$\begin{pmatrix} d_5^{5,5,1} & -b_5^x & -b_5^y & 0 \\ -b_5^x & d_6^{5,6,2} & 0 & -b_6^y \\ -b_5^y & 0 & d_7^{7,5,3} & -b_7^x \\ 0 & -b_6^y & -b_7^x & -d_8^{7,6,4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_5 \\ h_6 \\ h_7 \\ h_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1^z \\ b_2^z \\ b_3^z \\ b_4^z \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad d_i^{j,k,l} = b_i^z + b_j^x + b_k^y + b_l^z$$

$$K_{eq}^{yy} = \frac{1}{2} \sum_{i=5,6,7,8} h_i \cdot k_i^z$$

C.3 Renormalisation tensorielle

On présente ici une généralisation de la méthode proposée par Gautier et Nœtinger (1994) en trois dimensions.

C.3.1 Présentation du système d'approximation

Les conditions limites sont de type périodique. On prend le même réseau direct que celui présenté sur la figure C.4. Le débit qui traverse la maille i est donné par l'approximation :

$$\left\{\begin{array}{lcl} q_i^x &=& \left[k_i^{xx}\frac{h_i-h_j}{dx}+k_i^{xy}\frac{h_i-h_k}{dy}+k_i^{xz}\frac{h_i-h_l}{dz}\right]dy\cdot dz \\ q_i^y &=& \left[k_i^{yx}\frac{h_i-h_j}{dx}+k_i^{yy}\frac{h_i-h_k}{dy}+k_i^{yz}\frac{h_i-h_l}{dz}\right]dx\cdot dz \\ q_i^z &=& \left[k_i^{zx}\frac{h_i-h_j}{dx}+k_i^{zy}\frac{h_i-h_k}{dy}+k_i^{zz}\frac{h_i-h_l}{dz}\right]dx\cdot dy \end{array}\right.$$

On peut mettre ce système d'équations sous la forme

$$\begin{pmatrix} q_i^x \\ q_i^y \\ q_i^z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{k_i^{xx}}{dx}+\frac{k_i^{xy}}{dy}+\frac{k_i^{xz}}{dy}\right)dy\cdot dz & -\frac{k_i^{xx}dy\cdot dz}{dx} & -k_i^{xy}dz & -k_i^{xz}dy \\ \left(\frac{k_i^{yx}}{dx}+\frac{k_i^{yy}}{dy}+\frac{k_i^{yz}}{dz}\right)dx\cdot dz & -k_i^{yx}dz & -\frac{k_i^{yy}d\cdot dz}{dy} & -k_i^{yz}dx \\ \left(\frac{k_i^{zx}}{dx}+\frac{k_i^{zy}}{dy}+\frac{k_i^{zz}}{dz}\right)dx\cdot dy & -k_i^{zx}dy & -k_i^{zy}dx & -\frac{k_i^{zz}dx\cdot dy}{dz} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_i \\ h_j \\ h_k \\ h_l \end{pmatrix}$$

On pose :

$$b_i^{uv} = k_i^{uv}\frac{dx\cdot dy\cdot dz}{du\cdot dv}, \quad a_i^u = \sum_{v=x,y,z} b_i^{uv} \quad \text{et} \quad \overline{a}_i^u = \sum_{v=x,y,z} b_i^{vu}$$

avec u, v des indices muets sur les directions pouvant prendre les valeurs x, y, z et i, j, k, l des indices sur les numéros des nœuds (de 1 à 8). Il vient alors :

$$\boldsymbol{q}_i = A_i \cdot \begin{pmatrix} h_i \\ h_j \\ h_k \\ h_l \end{pmatrix} \qquad \text{avec} \quad A_i = \begin{pmatrix} a_i^x & -b_i^{xx} & -b_i^{xy} & -b_i^{xz} \\ a_i^y & -b_i^{yx} & -b_i^{yy} & -b_i^{yz} \\ a_i^z & -b_i^{zx} & -b_i^{zy} & -b_i^{zz} \end{pmatrix} \tag{C.5}$$

C.3.2 Calcul des charges au nœuds

Les débits par mailles sont :

$$\begin{array}{lcllllll} \boldsymbol{q}_1 &=& A_1\cdot(& h_1 & h_2 & h_3 & h_5 &)^t \\ \boldsymbol{q}_2 &=& A_2\cdot(& h_2 & h_1-\Delta H_x & h_4 & h_6 &)^t \\ \boldsymbol{q}_3 &=& A_3\cdot(& h_3 & h_4 & h_1-\Delta H_y & h_7 &)^t \\ \boldsymbol{q}_4 &=& A_4\cdot(& h_4 & h_3-\Delta H_x & h_2-\Delta H_y & h_8 &)^t \\ \boldsymbol{q}_5 &=& A_5\cdot(& h_5 & h_6 & h_7 & h_1-\Delta H_z &)^t \\ \boldsymbol{q}_6 &=& A_6\cdot(& h_6 & h_5-\Delta H_x & h_8 & h_2-\Delta H_z &)^t \\ \boldsymbol{q}_7 &=& A_7\cdot(& h_7 & h_8 & h_5-\Delta H_y & h_3-\Delta H_z &)^t \\ \boldsymbol{q}_8 &=& A_8\cdot(& h_8 & h_7-\Delta H_x & h_6-\Delta H_y & h_4-\Delta H_z &)^t \end{array}$$

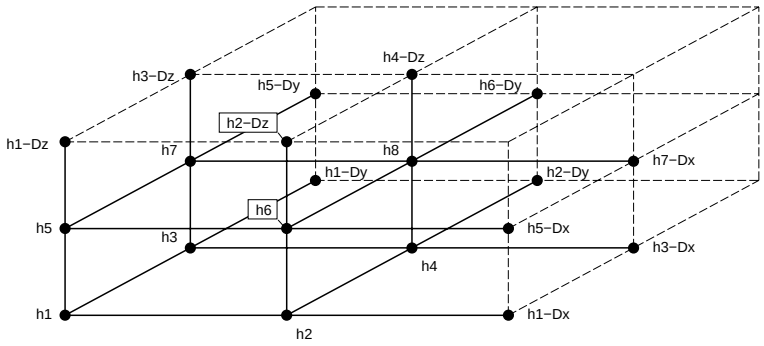


FIG. C.6 : *Charge au nœuds. Dx représente ΔH_x, Dy ΔH_y et Dz ΔH_z. Ces ΔP sont utilisés pour expliciter les conditions limites périodiques en charge.*

En chaque nœud on écrit l'équation de bilan en prenant en compte la condition de périodicité sur les débits (ce qui sort d'un côté entre de l'autre) :

$$\begin{array}{rcl}
q_1^x + q_1^y + q_1^z - q_2^x - q_3^y - q_5^z &=& 0\\
q_2^x + q_2^y + q_2^z - q_1^x - q_4^y - q_6^z &=& 0\\
q_3^x + q_3^y + q_3^z - q_4^x - q_1^y - q_7^z &=& 0\\
q_4^x + q_4^y + q_4^z - q_3^x - q_2^y - q_8^z &=& 0\\
q_5^x + q_5^y + q_5^z - q_6^x - q_7^y - q_1^z &=& 0\\
q_6^x + q_6^y + q_6^z - q_5^x - q_8^y - q_2^z &=& 0\\
q_7^x + q_7^y + q_7^z - q_8^x - q_5^y - q_3^z &=& 0\\
q_8^x + q_8^y + q_8^z - q_7^x - q_6^y - q_4^z &=& 0
\end{array}$$

Pour alléger l'écriture on pose :

$$d_i^{jkl} = \left(\sum_{u=x,y,z} a_i^u\right) + b_j^{xx} + b_k^{yy} + b_l^{zz}$$

$$m_{i,j}^u = -(\overline{a}_i^u + a_j^u) \neq m_{j,i}^u; \qquad m_{i,j}^{u,v} = b_i^{uv} + b_j^{vu} = m_{j,i}^{vu} \neq m_{j,i}^{uv}$$

Le système linéaire précédent s'exprime alors :

$$\begin{pmatrix}
d_1^{2,3,5} & m_{1,2}^x & m_{1,3}^y & m_{2,3}^{xy} & m_{1,5}^z & m_{2,5}^{xz} & m_{3,5}^{yz} & 0\\
m_{2,1}^x & d_2^{1,4,6} & m_{1,4}^{xy} & m_{2,4}^y & m_{1,6}^{xz} & m_{2,6}^z & 0 & m_{4,6}^{yz}\\
m_{3,1}^y & m_{1,4}^{yx} & d_3^{4,1,7} & m_{3,4}^x & m_{1,7}^{yz} & 0 & m_{3,7}^z & m_{4,7}^{xz}\\
m_{2,3}^{yx} & m_{4,2}^y & m_{4,3}^x & d_4^{3,2,8} & 0 & m_{2,8}^{yz} & m_{3,8}^{xz} & m_{4,8}^z\\
m_{5,1}^z & m_{1,6}^{zx} & m_{1,7}^{zy} & 0 & d_5^{6,7,1} & m_{5,6}^x & m_{5,7}^y & m_{6,7}^{xy}\\
m_{5,2}^{xz} & m_{6,2}^z & 0 & m_{8,2}^{yz} & m_{6,5}^x & d_6^{5,8,2} & m_{5,8}^{xy} & m_{6,8}^y\\
m_{5,3}^{yz} & 0 & m_{7,3}^z & m_{3,8}^{zx} & m_{7,5}^y & m_{8,5}^{xy} & d_7^{8,5,3} & m_{7,8}^x\\
0 & m_{6,4}^{yz} & m_{7,4}^{xz} & m_{8,4}^z & m_{7,6}^{xy} & m_{8,6}^y & m_{8,7}^x & d_8^{7,6,4}
\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1\\ h_2\\ h_3\\ h_4\\ h_5\\ h_6\\ h_7\\ h_8 \end{pmatrix} = \cdots$$

$$\cdots = \begin{pmatrix}
b_2^{xx} & b_3^{yy} & b_5^{zz}\\
b_4^{yx} + b_6^{zx} - \overline{a}_2^x & b_4^{yy} & b_6^{zz}\\
b_4^{xx} & b_4^{xy} + b_7^{zy} - \overline{a}_3^y & b_7^{zz}\\
b_2^{yx} + b_8^{zx} - \overline{a}_4^x & b_3^{xy} + b_8^{zy} - \overline{a}_4^y & b_8^{zz}\\
b_6^{xx} & b_7^{yy} & b_6^{xz} + b_7^{yz} - \overline{a}_5^z\\
b_2^{zx} - \overline{a}_6^x + b_8^{yx} & b_8^{yy} & b_5^{xz} + b_8^{yz} - \overline{a}_6^z\\
b_8^{xx} & b_3^{zy} + b_8^{xy} - \overline{a}_7^y & b_5^{yz} + b_8^{xz} - \overline{a}_7^z\\
b_4^{zx} + b_6^{yx} - \overline{a}_8^x & b_4^{zy} + b_7^{xy} - \overline{a}_8^y & b_7^{xz} + b_6^{yz} - \overline{a}_8^z
\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta H_x\\ \Delta H_y\\ \Delta H_z \end{pmatrix} \qquad \text{(C.6)}$$

Il peut être résolu numériquement. Les inconnues sont les huit charges aux nœuds, les ΔP sont fixés. On peut remarquer que premièrement, ce système est lié. On peut donc imposer $h_8 = 0$ et enlever la huitième ligne et la huitième colonne du système. Deuxièmement, ce système est symétrique si les tenseurs de perméabilités locaux sont symétriques.

C.3.3 Calcul des macro-débits

On somme les débits sortants pour chaque direction.

$$Q_x = q_2^x + q_4^x + q_6^x + q_8^x; \qquad Q_y = q_3^y + q_4^y + q_7^y + q_8^y; \qquad Q_z = q_5^z + q_6^z + q_7^z + q_8^z$$

Il vient :

$$\boldsymbol{Q}(\Delta H_x, \Delta H_y, \Delta H_z) = \begin{pmatrix} Q_x \\ Q_y \\ Q_z \end{pmatrix} = -B \cdot (h_1\ h_2\ h_3\ h_4\ h_5\ h_6\ h_7\ h_8) + T \cdot \begin{pmatrix} \Delta H_x \\ \Delta H_y \\ \Delta H_z \end{pmatrix}$$

avec

$$B = \begin{pmatrix} b_2^{xx} & b_3^{yy} & b_5^{zz} \\ b_4^{yx} + b_6^{zx} - a_2^x & b_4^{yy} & b_6^{zz} \\ b_4^{xx} & b_4^{xy} + b_7^{zy} - a_3^y & b_7^{zz} \\ b_2^{yx} + b_8^{zx} - a_4^x & b_3^{xy} + b_8^{zy} - a_4^y & b_8^{zz} \\ b_6^{xx} & b_7^{yy} & b_6^{xz} + b_7^{yz} - a_5^z \\ b_2^{zx} - a_6^x + b_8^{yx} & b_8^{yy} & b_5^{xz} + b_8^{yz} - a_6^z \\ b_8^{xx} & b_3^{zy} + b_8^{xy} - a_7^y & b_5^{yz} + b_8^{xz} - a_7^z \\ b_4^{zx} + b_6^{yx} - a_8^x & b_4^{zy} + b_7^{xy} - a_8^y & b_7^{xz} + b_6^{yz} - a_8^z \end{pmatrix}^t$$

et

$$T = \begin{pmatrix} b_2^{xx} + b_4^{xx} + b_6^{xx} + b_8^{xx} & b_4^{xy} + b_8^{xy} & b_6^{xz} + b_8^{xz} \\ b_4^{yx} + b_8^{yx} & b_3^{yy} + b_4^{yy} + b_7^{yy} + b_8^{yy} & b_7^{yz} + b_8^{yz} \\ b_6^{zx} + b_8^{zx} & b_7^{zy} + b_8^{zy} & b_5^{zz} + b_6^{zz} + b_7^{zz} + b_8^{zz} \end{pmatrix}$$

Il est utile d'écrire la matrice (Q) des macro-débits correspondant à trois solutions particulières. Ce sont les solutions où la différence de charge imposée est égale à 1 dans une direction et nulle dans les deux autres :

$$Q = \begin{pmatrix} Q_x(1,0,0) & Q_x(0,1,0) & Q_x(0,0,1) \\ Q_y(1,0,0) & Q_y(0,1,0) & Q_y(0,0,1) \\ Q_z(1,0,0) & Q_z(0,1,0) & Q_z(0,0,1) \end{pmatrix}$$

En effet, on a alors

$$Q = -B \cdot P + T \tag{C.7}$$

P est la matrice des trois solutions particulières en charge du système (C.6).

$$P = \begin{pmatrix} h_1(1,0,0) & h_2(1,0,0) & h_3(1,0,0) & h_4(1,0,0) & h_5(1,0,0) & h_6(1,0,0) & h_7(1,0,0) & h_8(1,0,0) \\ h_1(0,1,0) & h_2(0,1,0) & h_3(0,1,0) & h_4(0,1,0) & h_5(0,1,0) & h_6(0,1,0) & h_7(0,1,0) & h_8(0,1,0) \\ h_1(0,0,1) & h_2(0,0,1) & h_3(0,0,1) & h_4(0,0,1) & h_5(0,0,1) & h_6(0,0,1) & h_7(0,0,1) & h_8(0,0,1) \end{pmatrix}$$

C.3.4 Calcul de la perméabilité équivalente

A grande échelle le débit s'exprime en fonction de la perméabilité équivalente et de la différence de charge imposées :

$$\left\{\begin{array}{lcl} Q^x &=& \left[K^{xx}\frac{\Delta H_x}{2dx}+K^{xy}\frac{\Delta H_y}{2dy}+K^{xz}\frac{\Delta H_z}{2dy}\right]4dy\cdot dz \\ Q^y &=& \left[K^{yx}\frac{\Delta H_x}{2dx}+K^{yy}\frac{\Delta H_y}{2dy}+K^{yz}\frac{\Delta H_z}{2dy}\right]4dx\cdot dz \\ Q^y &=& \left[K^{zx}\frac{\Delta H_x}{2dx}+K^{zy}\frac{\Delta H_y}{2dy}+K^{zz}\frac{\Delta H_z}{2dy}\right]4dx\cdot dy \end{array}\right.$$

En prenant les solutions particulières on obtient :

$$\begin{array}{lll} K_{xx}=\frac{Q_x(1,0,0)dx}{2dy\cdot dz}; & K_{xy}=\frac{Q_x(0,1,0)}{2dz}; & K_{xz}=\frac{Q_x(0,0,1)}{2dy}; \\ K_{yx}=\frac{Q_y(1,0,0)}{2dz}; & K_{yy}=\frac{Q_y(0,1,0)dy}{2dx\cdot dz}; & K_{yz}=\frac{Q_y(0,0,1)}{2dx}; \\ K_{zx}=\frac{Q_z(1,0,0)}{2dy}; & K_{zy}=\frac{Q_z(0,1,0)}{2dx}; & K_{zz}=\frac{Q_z(0,0,1)dz}{2dx\cdot dy}; \end{array}$$

Que l'on peut alors écrire sous forme matricielle.

$$K=\frac{1}{2}\left[Q\cdot\begin{pmatrix} dx & 0 & 0 \\ 0 & dy & 0 \\ 0 & 0 & dz \end{pmatrix}\right]\cdot\left(\frac{1}{dy\cdot dz}\frac{1}{dx\cdot dz}\frac{1}{dx\cdot dy}\right)$$

C.3.5 En Résumé

Soit k_i^{uv} avec $i\in\{1,2,\ldots,8\}$ et $(u,v)\in\{x,y,z\}^2$ les perméabilités locales, dx, dy et dz les tailles des mailles élémentaires.

On définit :

$$b_i^{uv}=k_i^{uv}\frac{dx\cdot dy\cdot dz}{du\cdot dv},\quad a_i^u=\sum_{v=x,y,z}b_i^{uv}\quad\text{et}\quad\overline{a}_i^u=\sum_{v=x,y,z}b_i^{vu}$$

$$d_i^{jkl}=\left(\sum_{u=x,y,z}a_i^u\right)+b_j^{xx}+b_k^{yy}+b_l^{zz}$$

$$m_{i,j}^u=-(\overline{a}_i^u+a_j^u)\neq m_{j,i}^u;\qquad m_{i,j}^{u,v}=b_i^{uv}+b_j^{vu}=m_{j,i}^{vu}\neq m_{j,i}^{uv}$$

Ce qui permet de poser le système linéaire suivant (on a fixé $h_8=0$).

$$\begin{pmatrix} d_1^{2,3,5} & m_{1,2}^x & m_{1,3}^y & m_{2,3}^{xy} & m_{1,5}^z & m_{2,5}^{xz} & m_{3,5}^{yz} \\ m_{2,1}^x & d_2^{1,4,6} & m_{1,4}^{xy} & m_{2,4}^y & m_{1,6}^{xz} & m_{2,6}^z & 0 \\ m_{3,1}^y & m_{1,4}^{yx} & d_3^{4,1,7} & m_{3,4}^x & m_{1,7}^{yz} & 0 & m_{3,7}^z \\ m_{2,3}^{yx} & m_{4,2}^y & m_{4,3}^x & d_4^{3,2,8} & 0 & m_{2,8}^{yz} & m_{3,8}^{xz} \\ m_{5,1}^z & m_{1,6}^{zx} & m_{1,7}^{zy} & 0 & d_5^{6,7,1} & m_{5,6}^x & m_{5,7}^y \\ m_{5,2}^{xz} & m_{6,2}^z & 0 & m_{8,2}^{yz} & m_{6,5}^x & d_6^{5,8,2} & m_{5,8}^{xy} \\ m_{5,3}^{yz} & 0 & m_{7,3}^z & m_{3,8}^{zx} & m_{7,5}^y & m_{8,5}^{xy} & d_7^{8,5,3} \end{pmatrix}\cdot P^t=\ldots$$

$$\cdots = \begin{pmatrix} b_2^{xx} & b_3^{yy} & b_5^{zz} \\ b_4^{yx} + b_6^{zx} - \overline{a}_2^x & b_4^{yy} & b_6^{zz} \\ b_4^{xx} & b_4^{xy} + b_7^{zy} - \overline{a}_3^y & b_7^{zz} \\ b_2^{yx} + b_8^{zx} - \overline{a}_4^x & b_3^{xy} + b_8^{zy} - \overline{a}_4^y & b_8^{zz} \\ b_6^{xx} & b_7^{yy} & b_6^{xz} + b_7^{yz} - \overline{a}_5^z \\ b_2^{zx} - \overline{a}_6^x + b_8^{yx} & b_8^{yy} & b_5^{xz} + b_8^{yz} - \overline{a}_6^z \\ b_8^{xx} & b_3^{zy} + b_8^{xy} - \overline{a}_7^y & b_5^{yz} + b_8^{xz} - \overline{a}_7^z \end{pmatrix}$$

Que l'on résout numériquement. On obtient la matrice des charges :

$$P = \begin{pmatrix} h_1(1,0,0) & h_2(1,0,0) & h_3(1,0,0) & h_4(1,0,0) & h_5(1,0,0) & h_6(1,0,0) & h_7(1,0,0) \\ h_1(0,1,0) & h_2(0,1,0) & h_3(0,1,0) & h_4(0,1,0) & h_5(0,1,0) & h_6(0,1,0) & h_7(0,1,0) \\ h_1(0,0,1) & h_2(0,0,1) & h_3(0,0,1) & h_4(0,0,1) & h_5(0,0,1) & h_6(0,0,1) & h_7(0,0,1) \end{pmatrix}$$

Le tenseur de perméabilité équivalente s'exprime alors :

$$\boxed{K = \frac{1}{2}\left[(-B \cdot P + T) \cdot \begin{pmatrix} dx & 0 & 0 \\ 0 & dy & 0 \\ 0 & 0 & dz \end{pmatrix}\right] \cdot \left(\frac{1}{dy \cdot dz}\frac{1}{dx \cdot dz}\frac{1}{dx \cdot dy}\right)} \qquad \text{(C.8)}$$

avec

$$B = \begin{pmatrix} b_2^{xx} & b_3^{yy} & b_5^{zz} \\ b_4^{yx} + b_6^{zx} - a_2^x & b_4^{yy} & b_6^{zz} \\ b_4^{xx} & b_4^{xy} + b_7^{zy} - a_3^y & b_7^{zz} \\ b_2^{yx} + b_8^{zx} - a_4^x & b_3^{xy} + b_8^{zy} - a_4^y & b_8^{zz} \\ b_6^{xx} & b_7^{yy} & b_6^{xz} + b_7^{yz} - a_5^z \\ b_2^{zx} - a_6^x + b_8^{yx} & b_8^{yy} & b_5^{xz} + b_8^{yz} - a_6^z \\ b_8^{xx} & b_3^{zy} + b_8^{xy} - a_7^y & b_5^{yz} + b_8^{xz} - a_7^z \end{pmatrix}^t$$

$$T = \begin{pmatrix} b_2^{xx} + b_4^{xx} + b_6^{xx} + b_8^{xx} & b_4^{xy} + b_8^{xy} & b_6^{xz} + b_8^{xz} \\ b_4^{yx} + b_8^{yx} & b_3^{yy} + b_4^{yy} + b_7^{yy} + b_8^{yy} & b_7^{yz} + b_8^{yz} \\ b_6^{zx} + b_8^{zx} & b_7^{zy} + b_8^{zy} & b_5^{zz} + b_6^{zz} + b_7^{zz} + b_8^{zz} \end{pmatrix}$$

C.3.6 Cas où les perméabilités locales sont isotropes

On a :

$$b_i^{uv} = 0 \quad \text{si} \quad u \neq v$$

Il en résulte :

$$a_i^u = \bar{a}_i^u = b_i^{uu}, \quad d_i^{j,k,l} = \left(\sum_{u=x,y,z} b_i^{uu}\right) + b_j^{xx} + b_k^{yy} + b_l^{zz}, \quad m_{i,j}^u = -b_i^{uu} - b_j^{uu}, \quad m_{i,j}^{uv} = 0 \quad \text{si} \quad u \neq v$$

Finalement le système (C.6) devient :

$$\begin{pmatrix} d_1^{2,3,5} & m_{1,2}^x & m_{1,3}^y & 0 & m_{1,5}^z & 0 & 0 & 0 \\ m_{2,1}^x & d_2^{1,4,6} & 0 & m_{2,4}^y & 0 & m_{2,6}^z & 0 & 0 \\ m_{3,1}^y & 0 & d_3^{4,1,7} & m_{3,4}^x & 0 & 0 & m_{3,7}^z & 0 \\ 0 & m_{4,2}^y & m_{4,3}^x & d_4^{3,2,8} & 0 & 0 & 0 & m_{4,8}^z \\ m_{5,1}^z & 0 & 0 & 0 & d_5^{6,7,1} & m_{5,6}^x & m_{5,7}^y & 0 \\ 0 & m_{6,2}^z & 0 & 0 & m_{6,5}^x & d_6^{5,8,2} & 0 & m_{6,8}^y \\ 0 & 0 & m_{7,3}^z & 0 & m_{7,5}^y & 0 & d_7^{8,5,3} & m_{7,8}^x \\ 0 & 0 & 0 & m_{8,4}^z & 0 & m_{8,6}^y & m_{8,7}^x & d_8^{7,6,4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \\ h_5 \\ h_6 \\ h_7 \\ h_8 \end{pmatrix} = B^t \cdot \begin{pmatrix} \Delta H_x \\ \Delta H_y \\ \Delta H_z \end{pmatrix}$$

et la perméabilité s'obtient toujours grâce à l'équation (C.8) en prenant pour B et T les matrices suivantes :

$$B = \begin{pmatrix} b_2^{xx} & b_3^{yy} & b_5^{zz} \\ -b_2^{xx} & b_4^{yy} & b_6^{zz} \\ b_4^{xx} & -b_3^{yy} & b_7^{zz} \\ -b_4^{xx} & -b_4^{yy} & b_8^{zz} \\ b_6^{xx} & b_7^{yy} & -b_5^{zz} \\ -b_6^{xx} & b_8^{yy} & -b_6^{zz} \\ b_8^{xx} & -b_7^{yy} & -b_7^{zz} \\ -b_8^{xx} & -b_8^{yy} & -b_8^{zz} \end{pmatrix}^t$$

$$T = \begin{pmatrix} b_2^{xx} + b_4^{xx} + b_6^{xx} + b_8^{xx} & 0 & 0 \\ 0 & b_3^{yy} + b_4^{yy} + b_7^{yy} + b_8^{yy} & 0 \\ 0 & 0 & b_5^{zz} + b_6^{zz} + b_7^{zz} + b_8^{zz} \end{pmatrix}$$

Annexe D

Perméamètre tensoriel

L'idée générale est que pour mesurer un tenseur de perméabilité il faut disposer de la composante de la vitesse d'écoulement perpendiculaire au gradient de charge. Cette composante peut être mesurée expérimentalement si l'on est capable de déterminer le décalage des centres de gravité des flux d'eau entre la face d'entrée et de sortie du perméamètre (voir chapitre 4). Le dispositif décrit sur la figure D.1 permet de diviser les flux d'eau sur les faces d'entrée et de sortie de l'échantillon tout en maintenant une charge constante. Les flux d'entrée sont obtenus en faisant la différence entre le volume initial et le volume final contenu dans chaque réservoir alimentant une partie de l'échantillon.

Pour déterminer le tenseur de perméabilité, il faut de plus pouvoir mesurer le gradient de charge perpendiculaire à la direction principale d'écoulement. Pour cela, il est nécessaire d'instrumenter les faces latérales de l'échantillon d'un nombre suffisant de capteurs de pression. Le gradient latéral s'obtiendra en faisant la différence des valeurs moyennes de pression sur chacune des faces latérales.

Le problème majeur d'un tel dispositif est que les conditions latérales à flux nul perturbent le système. On peut donc s'attendre à ce que les tenseurs obtenus ne soient pas les tenseurs "intrinsèques". Toutefois, par rapport à un dispositif classique, ce système permet de détecter l'existence d'une anisotropie et d'en mesurer les directions principales. Une fois ces directions obtenues, on peut effectuer des mesures dans les directions d'anisotropie et obtenir les valeurs non perturbées. Une simple rotation permet ensuite d'obtenir le tenseur de perméabilité complet. Si l'on veut simplement détecter la présence d'une anisotropie sans déterminer les directions principales, il n'est pas nécessaire de mesurer le gradient de charge perpendiculaire à la direction principale d'écoulement.

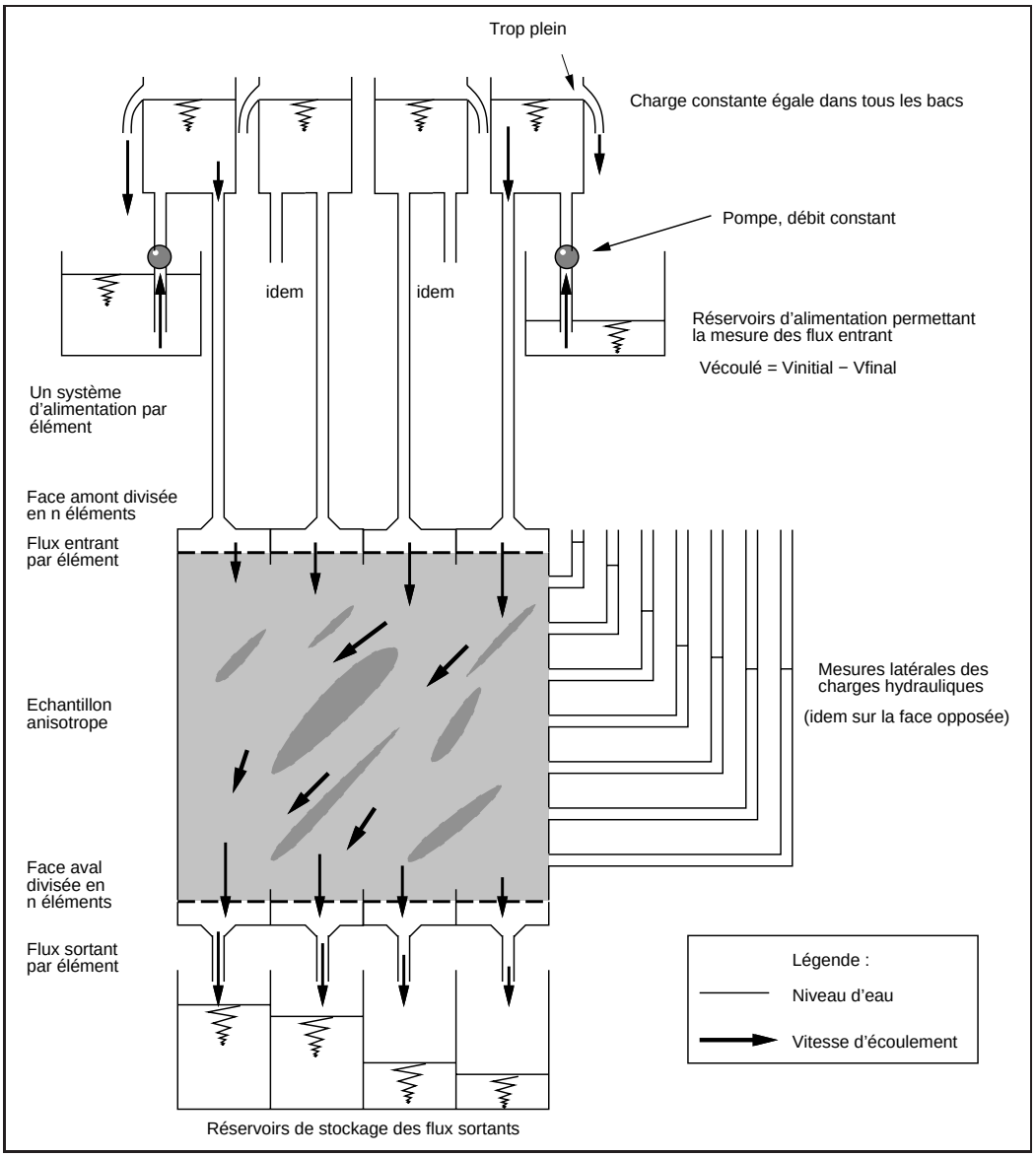


FIG. D.1 : *Schéma du perméamètre tensoriel.*

Annexe E

Présentation du logiciel TRIMULEC

Cette annexe présente les bases conceptuelles du logiciel TRIMULEC développé par Patrick Goblet (1990 et 1992) au Centre d'Informatique Géologique.

E.1 L'approximation éléments finis

La technique des éléments finis permet de remplacer l'équation différentielle que constitue l'équation de la diffusivité et les conditions aux limites associées, par un système d'équations linéaires donnant une solution approchée du problème posé.

Dans ce paragraphe nous allons faire une présentation succincte des principales étapes de la méthode des éléments finis, l'objectif est de permettre au lecteur de connaître les équations posées dans TRIMULEC.

Soit à résoudre :

$$\mathrm{div}\,[\boldsymbol{k}\,\mathbf{grad}(h)] = 0 \tag{E.1}$$

sur un domaine noté Ω, avec des conditions limites du type :

$$h(x,y,z) = h_1(x,y,z) \quad \text{sur} \quad \Gamma_1$$
$$k\frac{\partial h}{\partial n} = v_2(x,y,z) \quad \text{sur} \quad \Gamma_2$$

avec Γ la frontière de Ω et $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma$

• La première étape consiste à discrétiser le domaine Ω. C'est à dire à passer d'un domaine continu (où le nombre de points où l'on cherche h est infini) à un domaine discret (où le nombre de points où l'on cherche h est fini). Pour cela l'espace est divisé par des mailles élémentaires. Ces mailles sont les éléments finis. Leur géométrie peut être très variée : triangle, tétraèdre, prisme, etc, mais dans TRIMULEC ce sont des parallélépipèdes qui ont tous la même taille. Le maillage est dit régulier. Les sommets des mailles sont appelés les nœuds. Dans chaque élément la perméabilité est supposée constante.

• La deuxième étape consiste à écrire que la charge hydraulique h est approchée par une combinaison linéaire de fonctions élémentaires :

$$h(x,y,z) = \sum_{i=1}^{n} h_i N_i(x,y,z) \tag{E.2}$$

i est un indice sur les nœuds du maillage, h_i est la charge au nœud i et $N_i(x, y, z)$ est une fonction de base appelée fonction chapeau au nœud i. La fonction N_i est une fonction tri-linéaire, elle vaut 1 au nœud i et décroît linéairement dans toutes les directions jusqu'à valoir 0 pour chacun des nœuds voisins du nœud i.

Pour faciliter les développements analytiques, les fonctions N_i sont exprimées en fonction de coordonnées réduites : ξ, η et ζ. Ces coordonnées sont définies à l'intérieur d'un élément par :

$$\xi = 2\left(\frac{x - x_1}{a}\right) - 1 \quad \eta = 2\left(\frac{y - y_1}{b}\right) - 1 \quad \zeta = 2\left(\frac{z - z_1}{c}\right) - 1 \tag{E.3}$$

avec a, b et c la taille de l'élément dans les directions x, y et z, et (x_1, y_1, z_1) les coordonnées dans le repère global du nœud 1.

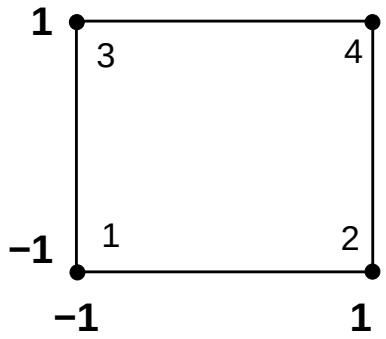


FIG. E.1 : *Numérotation des nœuds d'un élément fini rectangulaire en 2D et coordonnées réduites.*

A l'aide de ces coordonnées réduites, on exprime les fonctions N_i dans l'élément par :

$$N_i = \frac{1}{4}(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i) \quad \text{en 2D} \tag{E.4}$$

$$N_i = \frac{1}{8}(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i)(1 + \zeta\zeta_i) \quad \text{en 3D} \tag{E.5}$$

ξ_i, η_i et ζ_i sont les coordonnées réduites du nœud i.

• La dernière étape consiste à remplacer l'équation (E.1) par les n équations suivantes :

$$i = 1, \ldots, n \qquad \int_D N_i \,\mathrm{div}\,[\boldsymbol{k}\,\mathbf{grad}(h)]\, d\omega = 0 \tag{E.6}$$

En effet, il est clair que si h est solution de (E.1) alors h est solution de (E.6) et réciproquement on peut montrer que si h^* est solution de (E.6) alors h^* est une approximation de h qui tend vers h quand le nombre d'éléments finis tend vers l'infini.

⇝ *Comme le nombre d'éléments finis utilisés en pratique est toujours fini le résultat obtenu est une approximation.*

Les équations (E.6) se simplifient. On commence par faire une intégration par partie, on obtient alors :

$$i = 1, \ldots, n \qquad \int_\Gamma N_i\,[\boldsymbol{k}\,\mathbf{grad}(h)] \cdot \boldsymbol{n} d\gamma - \int_\Omega \mathbf{grad}(N_i) \cdot [\boldsymbol{k}\,\mathbf{grad}(h)]\, d\omega = 0$$

Le premier terme n'est pas calculé en pratique. On reconnaît, au signe près, le flux sortant par la partie de la frontière entourant le nœud i. Ce terme est utilisé pour imposer les conditions aux limites.

Dans le second terme, h est remplacé par son approximation (équation E.2), l'intégrale sur Ω est remplacée par une somme d'intégrales sur chaque élément e. Les fonctions N_i étant non nulles seulement lorsque le nœud i appartient à l'élément e, une grande partie des termes disparaît. On note ε_i l'ensemble des éléments dont l'un des nœud est i, et ψ_i l'ensemble des nœuds qui appartiennent aux éléments de ε_i, c'est à dire l'ensemble des voisins de i. Grâce aux simplifications indiquées et avec ces notations, le système d'équations (E.6) s'écrit sous la forme du système linéaire suivant :

$$i = 1, \ldots, n \qquad \sum_{e \in \varepsilon_i} \sum_{j \in e} \left\{ - \int_{\Omega_e} \mathbf{grad}(N_i) \cdot [\boldsymbol{k}_e \, \mathbf{grad}(N_j)] \, d\omega_e \right\} h_j = \sum_{j \in \psi_i} a_{ij} h_j = q_i \tag{E.7}$$

V_e représente le volume de l'élément e. q_i est le terme correspondant au flux sortant.

Comme les fonctions élémentaires sont connues et que le maillage est régulier, on peut calculer analytiquement les intégrales :

$$\int_{\Omega_e} \mathbf{grad}(N_i) \cdot [\boldsymbol{k}_e \, \mathbf{grad}(N_j)] \, d\omega_e = \int_{\Omega_e} \sum_{u \in \{x,y,z\}} \sum_{v \in \{x,y,z\}} k_e^{uv} \frac{\partial N_i}{\partial u} \frac{\partial N_j}{\partial v} d\omega$$

On note $c_{ij}^{\ e}$ les intégrales élémentaires :

$$c_{ij}^e = \sum_{u \in \{x,y,z\}} \sum_{v \in \{x,y,z\}} \int_{\Omega_e} k_e^{uv} \frac{\partial N_i}{\partial u} \frac{\partial N_j}{\partial v} d\omega \tag{E.8}$$

Pour illustrer le calcul des c_{ij}^e nous allons effectuer le développement en deux dimensions pour le terme en k_e^{xx}.

$$I_{xx} = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_3} \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} dx \; dy = \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial N_j}{\partial \eta} d\xi \; d\eta$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial \xi} = \frac{\xi_i}{4} (1 + \eta \eta_i) \qquad \frac{\partial N_i}{\partial \eta} = \frac{\eta_i}{4} (1 + \xi \xi_i)$$

$$\begin{aligned}
I_{xx} &= \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \frac{\xi_i \xi_j}{16} (1 + \eta \eta_i) (1 + \eta \eta_j) \, d\xi \; d\eta \\
&= \frac{\xi_i \xi_j}{16} \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \left[1 + (\eta_i + \eta_j) \, \eta + \eta_i \eta_j \eta^2 \right] d\xi \; d\eta \\
&= \frac{\xi_i \xi_j}{16} \int_{-1}^{1} \left[\eta + \frac{1}{2} (\eta_i + \eta_j) \, \eta^2 + \frac{1}{3} \eta_i \eta_j \eta^3 d\xi \; d\eta \right]_{-1}^{1} d\xi \\
&= \frac{\xi_i \xi_j}{16} \int_{-1}^{1} \left(2 + \frac{2 \eta_i \eta_j}{3} \right) d\xi \\
&= \frac{\xi_i \xi_j}{4} \left(1 + \frac{\eta_i \eta_j}{3} \right)
\end{aligned}$$

Le même type de calcul permet de calculer tous les termes de c_{ij}^e. En deux dimensions on a finalement :

$$c_{ij}^e = k_e^{xx} \frac{\xi_i \xi_j}{4} \left(1 + \frac{\eta_i \eta_j}{3} \right) + k_e^{xy} \frac{\xi_i \eta_j}{4} + k_e^{yx} \frac{\xi_j \eta_i}{4} + k_e^{yy} \frac{\eta_i \eta_j}{4} \left(1 + \frac{\xi_i \xi_j}{3} \right) \tag{E.9}$$

En trois dimensions le coefficient c_{ij}^e s'exprime de même :

$$\begin{aligned} c_{ij}^e = & k_e^{xx}\frac{\xi_i\xi_j}{8}\left(1+\frac{\eta_i\eta_j}{3}\right)\left(1+\frac{\zeta_i\zeta_j}{3}\right)+k_e^{xy}\frac{\xi_i\eta_j}{8}\left(1+\frac{\zeta_i\zeta_j}{3}\right)+k_e^{xz}\frac{\xi_i\zeta_j}{8}\left(1+\frac{\eta_i\zeta_j}{3}\right)+\dots \\ & k_e^{yy}\frac{\eta_i\eta_j}{8}\left(1+\frac{\xi_i\xi_j}{3}\right)\left(1+\frac{\zeta_i\zeta_j}{3}\right)+k_e^{yx}\frac{\eta_i\xi_j}{8}\left(1+\frac{\zeta_i\zeta_j}{3}\right)+k_e^{yz}\frac{\eta_i\zeta_j}{8}\left(1+\frac{\xi_i\zeta_j}{3}\right)+\dots \\ & k_e^{zz}\frac{\zeta_i\zeta_j}{8}\left(1+\frac{\xi_i\xi_j}{3}\right)\left(1+\frac{\eta_i\eta_j}{3}\right)+k_e^{zx}\frac{\zeta_i\xi_j}{8}\left(1+\frac{\eta_i\xi_j}{3}\right)+k_e^{zy}\frac{\zeta_i\eta_j}{8}\left(1+\frac{\xi_i\xi_j}{3}\right) \end{aligned}$$

Les coefficients du système linéaire (E.7) se calculent alors comme des sommes de coefficients c_{ij}^e :

$$a_{ij} = \sum_{e\in\varepsilon_i}\sum_{j\in e} c_{ij}^e \qquad i=1,\dots,n \tag{E.10}$$

avec ε_i qui représente l'ensemble des éléments auxquels le nœud i appartient.

• Pour que le problème soit correctement posé, il faut encore imposer les conditions aux limites aux frontières du domaine.

Pour imposer une condition de flux au nœud i il suffit de donner à q_i la valeur désirée. Pour imposer une charge h sur le nœud i *TRIMULEC* utilise une méthode dite de pénalisation : on écrit $q_i = Ch$ et $a_{ii} = C$ avec C très grand ($C = 10^{10}a_{ii}$), cela présente l'avantage de garder la matrice des a_{ij} symétrique.

Pour tous les nœuds i n'appartenant pas à la frontière du domaine, l'intégrale $\int_\Gamma N_i\,[\boldsymbol{k}\,\mathbf{grad}(h)]\cdot \boldsymbol{n}d\gamma$ est nulle et donc $q_i = 0$.

E.2 La technique multigrille

Comme nous venons de le voir, la méthode des éléments finis permet de remplacer l'équation de la diffusivité et les conditions aux limites, sur une grille notée M_1, par un système linéaire :

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{h} = \boldsymbol{q} \tag{E.11}$$

où $\boldsymbol{A}$ est une matrice carrée, $\boldsymbol{h}$ et $\boldsymbol{q}$ sont des vecteurs, l'inconnue est $\boldsymbol{h}$.

La technique multigrille permet de résoudre ce système d'équation linéaire. Rappelons tout d'abord qu'elle est basée sur un ensemble de grille emboîtées sur lesquelles le système lui-même ou ses résidus sont résolus itérativement.

Pour résoudre le système (E.11), l'algorithme commence par l'application d'une méthode itérative classique, en se limitant aux premières itérations. On obtient une solution approchée $\boldsymbol{h}_1$. L'erreur (ou résidu) est calculé :

$$\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{q} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{h}_1 \tag{E.12}$$

La solution exacte de (E.11) s'exprime alors :

$$\boldsymbol{h} = \boldsymbol{h}_1 + \boldsymbol{\epsilon} \qquad \text{avec} \qquad \boldsymbol{A}\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{r}_1 \tag{E.13}$$

Si l'on remarque que le solveur itératif utilisé lors de l'étape 1 a pour effet de lisser les fréquences d'erreur bien représentées par le maillage M_1, on peut avoir l'idée de résoudre (E.13) non pas sur le maillage initial mais sur un maillage (M_2) plus grossier, qui permettra de filtrer une fréquence plus basse des erreurs. On obtient ainsi l'algorithme suivant :

1. Une ou plusieurs itérations sur M_1 pour obtenir $\boldsymbol{h}_1$

2. Calcul du résidu $\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{q} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{h}_1$
3. Projection du résidu sur un maillage plus grossier M_2
4. Une ou plusieurs itérations sur M_2, donnant une estimation de l'erreur $\boldsymbol{\epsilon}$
5. Interpolation de l'erreur sur M_1
6. Correction de la solution
7. Reprise de 1, jusqu'à convergence

Pour obtenir le maximum d'efficacité cet algorithme est étendu sur autant de niveaux de grille que possible. Ainsi, il est intéressant que la grille initiale M_1 ait un nombre de mailles dans chaque direction de l'espace qui soit une puissance de deux.

La forte hétérogénéité et les rapports d'anisotropie important des milieux étudiés ont nécessités des modifications dans la formulation multigrille (Goblet 1992) :
– les opérateurs d'interpolation et de projection ont été redéfinis en prenant en compte l'hétérogénéité des perméabilités ;
– des méthodes de relaxation par points ou par lignes ont été implémentées pour améliorer les résultats dans le cas d'anisotropie forte ;
– les équations prenant en compte le tenseur complet de perméabilité (symétrique) ont été programmées pour pouvoir faire des expériences numériques sur la nature tensorielle de la perméabilité équivalente.
Cet ensemble d'améliorations ont rendu possible la résolution de l'équation de la diffusivité avec une méthode efficace y compris pour des milieux fortement hétérogènes et anisotropes.

Annexe F

Rapports caractérisant l'anisotropie

Nous démontrons ici comment sont obtenus les rapports quantifiant l'anisotropie dans la formule de Kruel-Romeu (1994) ainsi que dans la renormalisation simplifiée. Pour alléger l'écriture, le calcul est effectué en deux dimensions.

Soit l'équation de la diffusivité pour un milieu hétérogène, anisotrope :

$$\frac{\partial\left(k^{xx}\frac{\partial h}{\partial x}+k^{xy}\frac{\partial h}{\partial y}\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(k^{xy}\frac{\partial h}{\partial x}+k^{yy}\frac{\partial h}{\partial y}\right)}{\partial y}=0$$

On fait le changement de variable suivant :

$$x'=\alpha_x x \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial h}{\partial x}=\frac{\partial h}{\partial x'}\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}x}=\alpha_x\frac{\partial h}{\partial x'}$$

$$y'=\alpha_y y \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial h}{\partial y}=\frac{\partial h}{\partial y'}\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}y}=\alpha_y\frac{\partial h}{\partial y'}$$

L'équation de diffusivité devient :

$$\frac{\partial\left(\alpha_x^2 k^{xx}\frac{\partial h}{\partial x'}+\alpha_x\alpha_y k^{xy}\frac{\partial h}{\partial y'}\right)}{\partial x'}+\frac{\partial\left(\alpha_x\alpha_y k^{xy}\frac{\partial h}{\partial x'}+\alpha_y^2 k^{yy}\frac{\partial h}{\partial y'}\right)}{\partial y'}=0$$

En écrivant :

$$\frac{\partial\left(k'^{xx}\frac{\partial h}{\partial x'}+k'^{xy}\frac{\partial h}{\partial y'}\right)}{\partial x'}+\frac{\partial\left(k'^{xy}\frac{\partial h}{\partial x'}+k'^{yy}\frac{\partial h}{\partial y'}\right)}{\partial y'}=0$$

et en identifiant les termes membre à membre on obtient :

$$\frac{k'^{xx}}{k'^{yy}}=\frac{k^{xx}}{k^{yy}}\frac{\alpha_x^2}{\alpha_y^2}, \qquad \frac{k'^{xx}}{k'^{xy}}=\frac{k^{xx}}{k^{xy}}\frac{\alpha_x}{\alpha_y}$$

Si l'on note dx une longueur élémentaire suivant x (la taille d'une maille par exemple), dy une longueur élémentaire suivant y, et leur équivalent dx' et dy' dans le second repère ($dx'=\alpha_x dx$ et $dy'=\alpha_y dy$), alors il vient :

$$\alpha_x=\frac{dx'}{dx} \qquad \alpha_y=\frac{dy'}{dy}$$

d'où pour les termes principaux du tenseur de perméabilité :

$$\frac{k'^{xx}}{k'^{yy}}\left(\frac{dx'}{dy'}\right)^2 = \frac{k^{xx}}{k^{yy}}\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = a_y^x$$

C'est ce rapport qu'il faut conserver lors du changement de repère. C'est lui qui permet de quantifier l'anisotropie de type 2 et 3.

Remarque :

$$a_v^u = (a_u^v)^{-1} \qquad a_v^u = a_w^u a_v^w$$

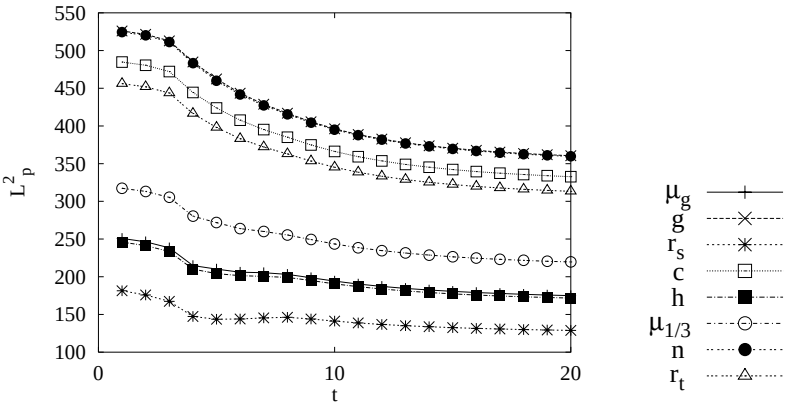
Pour les termes non diagonaux le rapport d'anisotropie est le suivant :

$$\frac{k'^{xx}}{k'^{xy}}\frac{dx'}{dy'} = \frac{k^{xx}}{k^{xy}}\frac{dx}{dy}$$

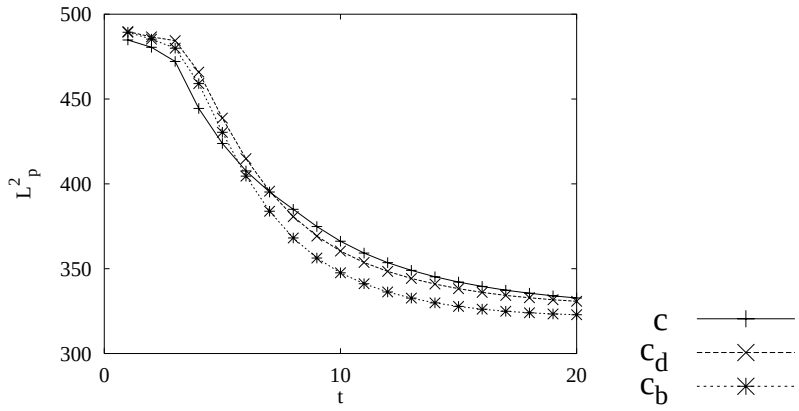
Annexe G

Résultats du test numérique en diphasique

Cette annexe présente des résultats complémentaires pour la comparaison des techniques de changement d'échelle en écoulement diphasique (chapitre 8). Il s'agit des courbes d'erreurs quadratique en fonction du temps $L^2(t, m)$.

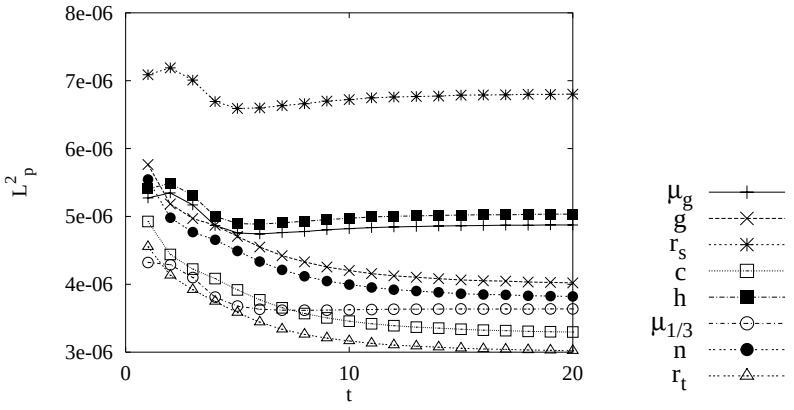


(a) Comparaison des techniques de calcul de k_{eq}

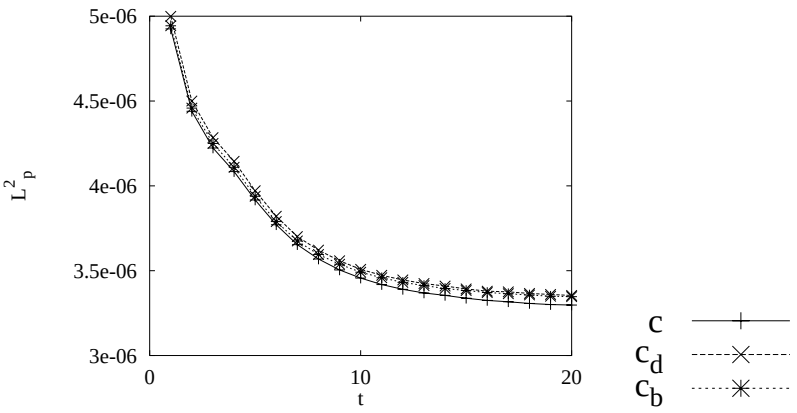


(b) Modifications des k_r

FIG. G.1 : *Milieu périodique : $L_p^2(m,t)$ sur les pressions non normées*

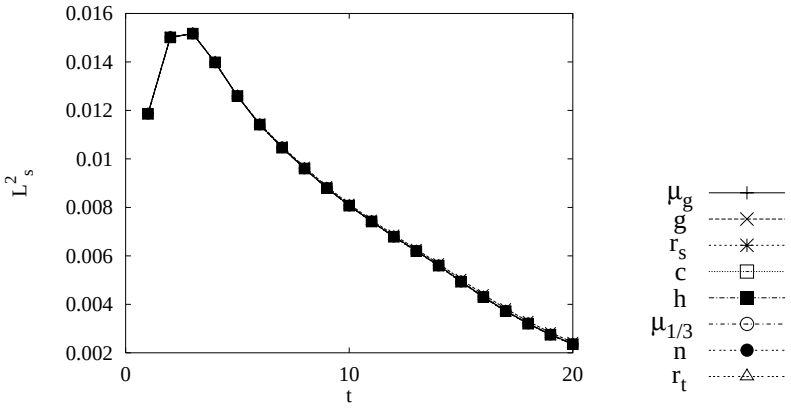


(a) Comparaison des techniques de calcul de k_{eq}

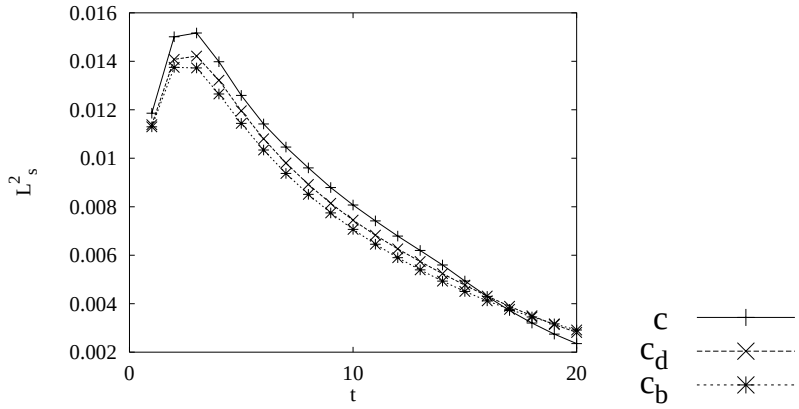


(b) Modifications des k_r

FIG. G.2 : *Milieu périodique : $L^2_{pn}(m,t)$ sur les pressions normées (p/p_{max})*

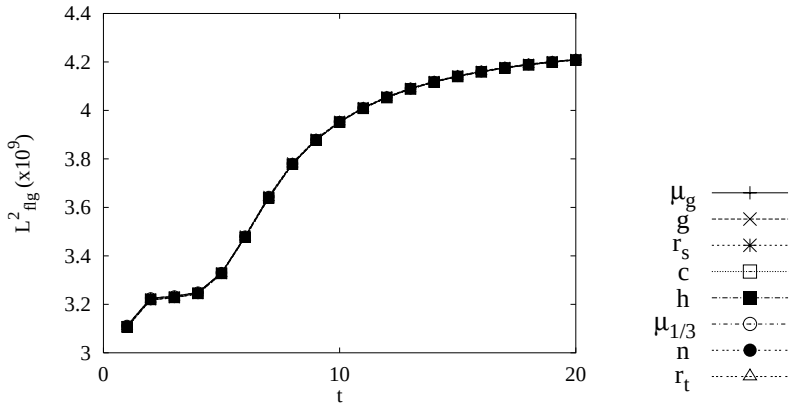


(a) Comparaison des techniques de calcul de k_{eq}

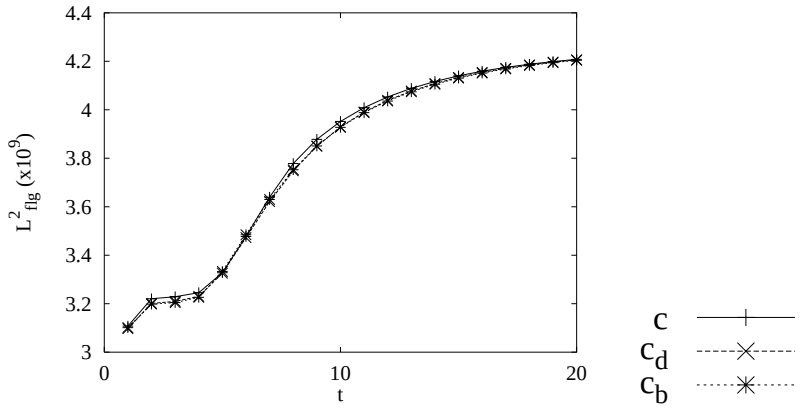


(b) Modifications des k_r

FIG. G.3 : *Milieu périodique : $L_s^2(m,t)$ sur les saturations*

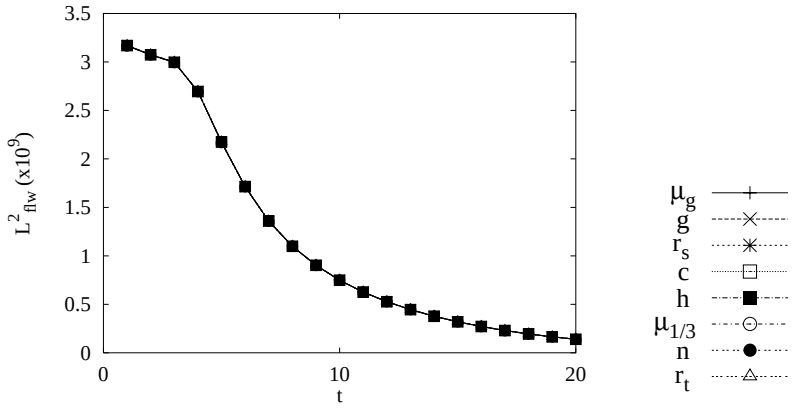


(a) Comparaison des techniques de calcul de k_{eq}

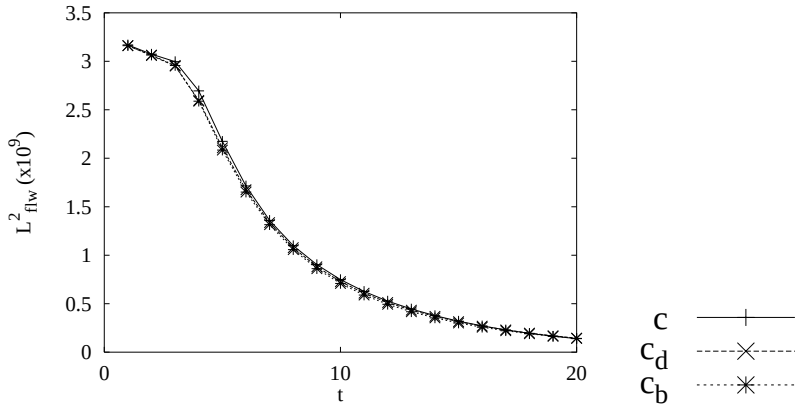


(b) Modifications des k_r

FIG. G.4 : *Milieu périodique : $L_v^2(m,t)$ sur les flux d'eau*

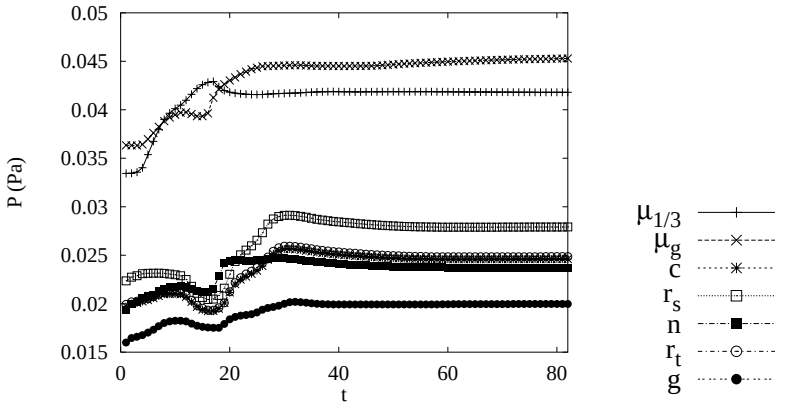


(a) Comparaison des techniques de calcul de k_{eq}

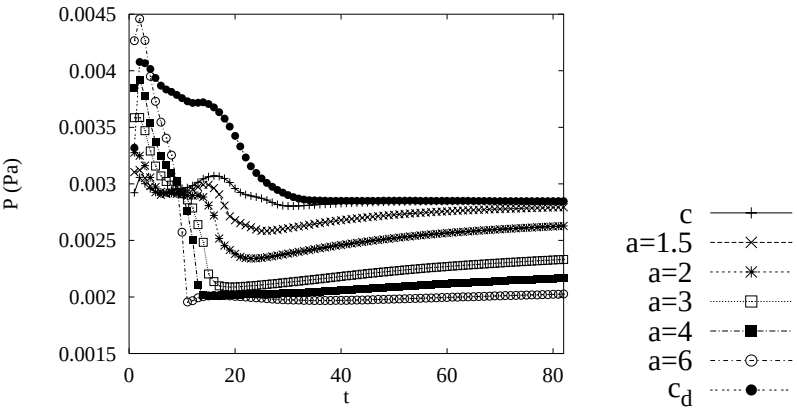


(b) Modifications des k_r

FIG. G.5 : *Milieu périodique : $L_v^2(m,t)$ sur les flux d'huile*

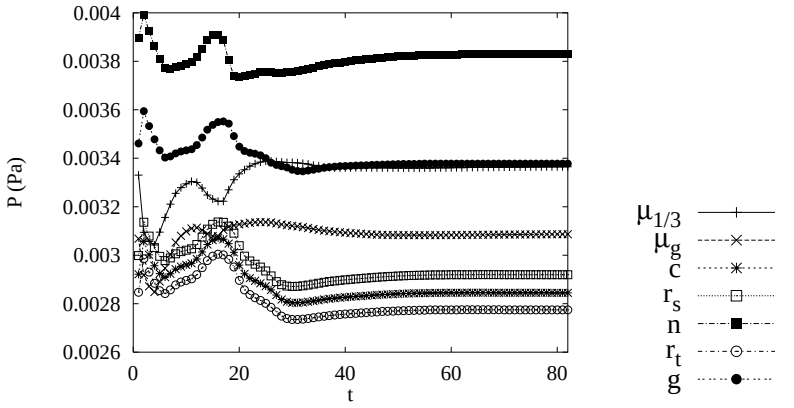


(a) Comparaison des techniques de calcul de k_{eq}

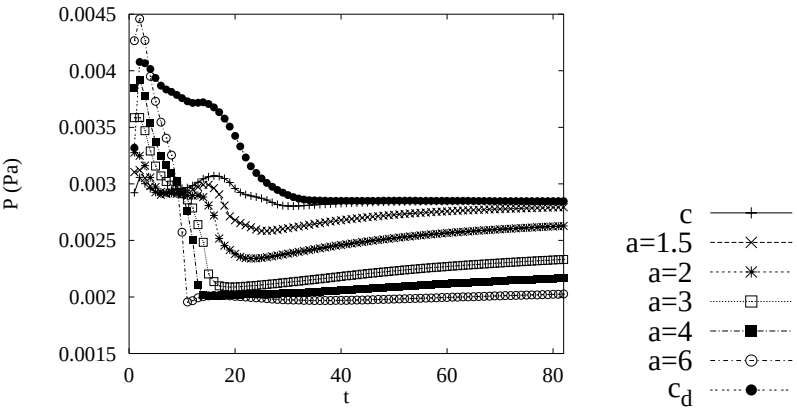


(b) Modifications des k_r

FIG. G.6 : *Milieu binaire : $L_p^2(m,t)$ sur les pressions non normées*

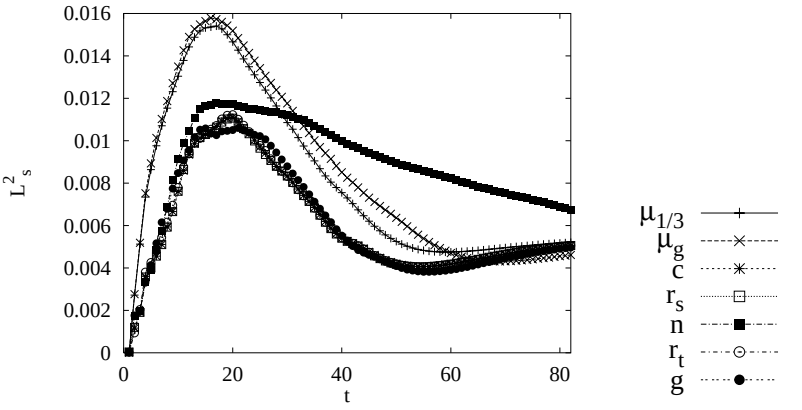


(a) Comparaison des techniques de calcul de k_{eq}

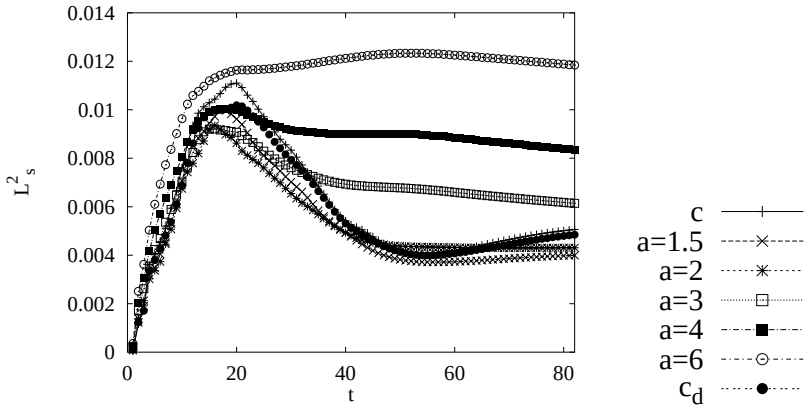


(b) Modifications des k_r

FIG. G.7 : *Milieu binaire : $L^2_{pn}(m,t)$ sur les pression normées (p/p_{max})*

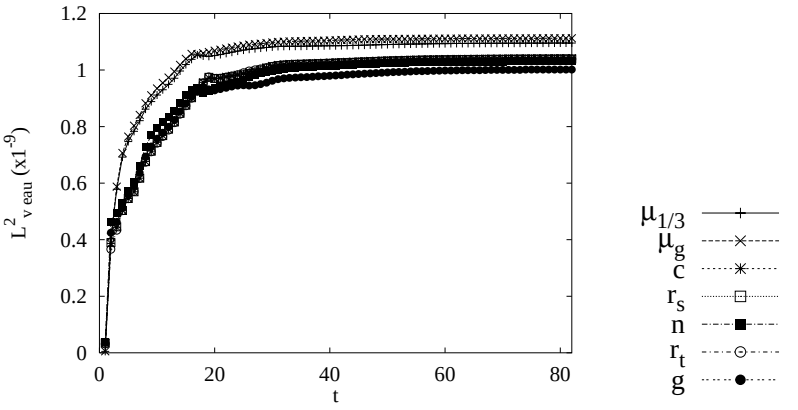


(a) Comparaison des techniques de calcul de k_{eq}

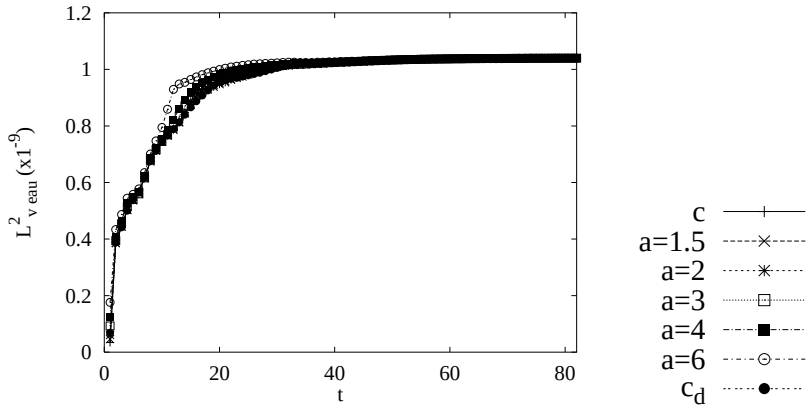


(b) Modifications des k_r

FIG. G.8 : *Milieu binaire : $L_s^2(m,t)$ sur les saturations*

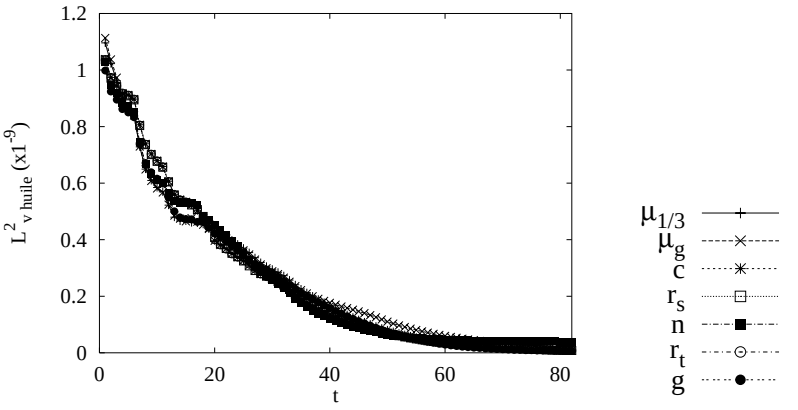


(a) Comparaison des techniques de calcul de k_{eq}

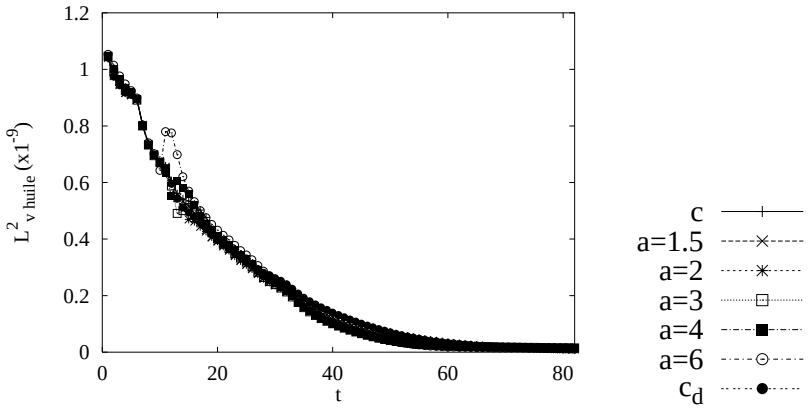


(b) Modifications des k_r

FIG. G.9 : *Milieu binaire : $L_v^2(m,t)$ sur les flux d'eau*



(a) Comparaison des techniques de calcul de k_{eq}



(b) Modifications des k_r

FIG. G.10 : *Milieu binaire : $L_v^2(m,t)$ sur les flux d'huile*

Références

Ababou, R. (1995). Random porous media flow on large 3-D grids : numerics, performance and application to homogenization. In M. F. Wheeler (Ed.), *IMA Volumes in Mathematics and its Applications "Environmental studies : mathematical, computational and statistical analysis"*, Springer-Verlag New York Publishers, pp. 1–25.

Ababou, R., A. Millard, E. Treille, M. Durin, and F. Plas (1994). Continuum modeling of coupled thermo-hydro-mechanical processes in fractured rock. In A. Peters et al. (Eds.), *Computational Methods in water resources X - Volume 1*, pp. 651–658. Kluwer Academic Publishers.

Ababou, R. and E. F. Wood (1990). Comment on "Effective groundwater model parameter values : influence of spatial variability of hydraulic conductivities, leakance and recharge" by J. J. Gómez-Hernández and S. M. Gorelick. *Water Resources Research 26*, 1843–1846.

Abbaszadeh, M. (1995, February). Advances in reservoir heterogeneity upscaling technology. In *Reservoir characterization : Integration of geology, geophysics and reservoir engineering. The third JNOC-TRC international symposium, Chiba, Japan.* Japan National Oil Corporation.

Abramovich, B. and P. Indelman (1995). Effective permeability of log-normal isotropic random media. *J. Phys. A : Math. gen. 28*, 693–700.

Ahmadi, A. and M. Quintard (1996). Large-scale properties for two-phase flow in random porous media. *Journal of Hydrology 183*, 69–99.

Amaziane, B. (1993). Global behavior of compressible three-phase flow in heterogeneous porous media. *Trans. Porous Media 10*, 43–56.

Amaziane, B., A. Bourgeat, and J. Koebbe (1991). Numerical simulation and homogenization of two-phase flow in heterogeneous porous media. *Trans. Porous Media 6*, 519–547.

Anderson, M. P. (1995). Characterization of geological heterogeneity. In *Second George Kovac's Colloquium*, Paris. UNESCO.

Anguy, Y., D. Bernard, and R. Ehrlich (1995). The local change of scale method for modelling flow in natural porous media. (1) : Numerical tools. *Advances in Water Resources 17*, 337–351.

Auerbach, S. and H. Schaben (1990). Computer-aided design of geologic surfaces and bodies. *Journal of Mathematical Geology 22*(8), 957–987.

Auriault, J. L. (1991). Heterogeneous medium. Is an equivalent macroscopic description possible ? *Int. J. Engng. Sci. 29*(7), 785–795.

Bachu, S. and D. Cuthiell (1990, May). Effects of core-scale heterogeneity on steady state and transient fluid flow in porous media : Numerical analysis. *Water Resources Research 26*(5), 863–874.

Badea, A. and A. Bourgeat (1995). Numerical simulations by homogenization of two-phase flow through randomly heterogeneous porous media. In *Modelling and Computation in Environmental Sciences, first GAMM seminar, Stuttgart.*

Bamberger, A. (1977). Approximation des coefficients d'opérateurs elliptiques, stable pour la g-convergence. Technical report, École Polytechnique.

Baveye, P. and G. Sposito (1984). The operational significance of the continuum hypothesis in the theory of water movement through soils and aquifers. *Water Resources Research 20*(5), 521–530.

Bear, J. (1972). *Dynamics of Fluids in Porous Media.* New-York : Elsevier.

Beckie, R., A. A. Aldama, and E. F. Wood (1994). The universal structure of the groundwater flow equations. *Water Resources Research 30*(5), 1407–1419.

Begg, S. H., R. R. Carter, and P. Dranfield (1989). Assigning effective values to simulation gridblock parameters for heterogeneous reservoirs. *SPE Reservoir Engineering 4*, 455–463.

Begg, S. H. and P. R. King (1985). Modelling the effects of shales on reservoir performance : Calculation of effective vertical permeability. *SPE 13529.*

Bensoussan, A., J. L. Lions, and G. Papanicolaou (1978). *Asymptotic analysis for periodic structures*. Amsterdam : North-Holland.

Berkowitz, B. and I. Balberg (1993). Percolation theory and its application to groundwater hydrology. *Water Resources Research 29*(4), 775–794.

Bierkens, M. F. P. and H. J. T. Weerts (1994). Block hydraulic conductivity of cross-bedded fluvial sediments. *Water Resources Research 30*(10), 2665–2678.

Billaux, D. (1990, Février). *Hydrogéologie des milieux fracturés. Géométrie, connectivité, et comportement hydraulique*. Ph. D. thesis, École Nationale Supérieure des Mines de Paris.

Bøe, Ø. (1994). Analysis of an upscaling method based on conservation of dissipation. *Trans. Porous Media 17*, 77–86.

Bour, O. (1996). *Transferts de fluides dans les milieux fracturés : Effets d'échelle*. Ph. D. thesis, Université de Rennes 1.

Bourgeat, A. (1984). *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Chapter 10 : Homogenized behaviour of two-phase flows in naturally fractured reservoirs with uniform fractures distribution, pp. 205–216. Elsevier Science Publishers B. V.

Bourgeat, A. (1996). *Homogenization and porous media, Interdisciplinary Applied Mathematics Serie*, Chapter 5 : Two-Phase flow. Springer, New York. À paraître.

Bourgeat, A., S. M. Kozlov, and A. Mikelić (1995). Effective equations of two-phase flow in random media. *Calc. Var. 3*, 385–406.

Bourgeat, A., M. Quintard, and S. Whitaker (1988). Eléments de comparaison entre la méthode d'homogénéisation et la méthode de prise de moyenne avec fermeture. *C.R. Acad. Sci. Paris 306*(série II), 463–466.

Brenner, H. (1980). A general theory of Taylor dispersion phenomen. *Physico Chemical Hydrodynamics 1*, 91–123.

Brenner, H. (1982). A general theory of Taylor dispersion phenomen, II, An extension. *Physico Chemical Hydrodynamics 3*(2), 139–157.

Cardwell, W. T. and R. L. Parsons (1945). Average permeabilities of heterogeneous oil sands. *Trans. Amer. Inst. Min. Met. Pet. Eng. 160*, 34–42.

Cushman, J. H. (1984). On unifying the concepts of scale, instrumentation, and stochastics in the development of multiphase transport theory. *Water Resources Research 20*(11), 1668–1676.

Cushman, J. H. (1990). *Dynamics of fluids in hierarchical porous media*, Chapter 1 - An introduction to hierarchical porous media, pp. 1–6. Academic Press.

Dagan, G. (1979). Models of groundwater flow in statistically homogeneous porous formations. *Water Resources Research 15*(1), 47–63.

Dagan, G. (1986, August). Statistical theory of groundwater flow and transport : pore to laboratory, laboratory to formation, and formation to regional scale. *Water Resources Research 22*(9), 120S–134S.

Dagan, G. (1989). *Flow and Transport in Porous Formations*. New-York : Springer-Verlag.

Dagan, G. (1993). High-order correction of effective permeability of heterogeneous isotropic formations of lognormal conductivity distribution. *Trans. Porous Media 12*, 279–290.

Dale, M., S. Ekrann, J. Mykkeltveit, and G. Virnovsky (1994, June). Effective relative permeabilities and capillary pressure for 1d heterogeneous media. See Thomassen (1994).

Darcy, H. (1856). *Les fontaines publiques de la ville de Dijon*. Paris : Victor Dalmont.

de Gennes, P. G. (1976). La percolation : un concept unificateur. *La recherche 7*, 919.

De Wit, A. (1995). Correlation structure dependence of the effective permeability of heterogeneous porous media. *Phys. Fluids 7*(11), 2553–2562.

Decencière-Ferrandière, E. (1995). Echantillonage morphologique et réduction d'images. Master's thesis, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, Centre de Morphologie Mathématique.

Delhomme, J. P. (1979, April). Spatial variability and uncertainty in groundwater flow parameters. *Water Resources Research 15*(2), 281–290.

Desbarats, A. J. (1987, February). Numerical estimation of effective permeability in sand-shale formations. *Water Resources Research 23*(2), 273–286.

Desbarats, A. J. (1992). Spatial averaging of hydraulic conductivity in three-dimensional heterogeneous porous media. *Mathematical Geology 24*(3), 249–267.

Deutsch, C. V. (1989). Calculating effective absolute permeability in sandstone/shale sequences. *SPE Form. Eval. 4*(3), 343–348.

Dhatt, G. and G. Touzot (1984). *Une présentation de la méthode des éléments finis (deuxième édition)*. Maloine S.A. Editeur.

Dullien, F. A. L. (1992). *Porous media, fluid transport and pore structure, second edition*. Academic Press.

Dupuit, J. (1863). *Etude théoriques et pratiques sur le mouvement des eaux dans les canaux découverts et à travers les terrains perméables*. Paris : Dunot.

Duquerroix, J.-P. L., P. Lemouzy, B. Nœtinger, and R. Kruel-Romeu (1993). Influence of the permeability anisotropy ratio on large-scale properties of heterogeneous reservoirs. *68th Annual Tech. Conf. and Exhb. of the SPE, Houston. SPE 26648*, 29–40.

Durlofsky, L. J. (1991). Numerical calculation of equivalent grid block permeability tensors for heterogeneous porous media. *Water Resources Research 27*(5), 699–708.

Durlofsky, L. J. (1992). Representation of grid block permeability in coarse scale models of randomly heterogeneous porous media. *Water Resources Research 28*(7), 1791–1800.

Durlofsky, L. J. (1994). Accuracy of mixed and control volume finite element approximations to Darcy velocity and related quantities. *Water Resources Research 30*(4), 965–973.

Durlofsky, L. J., R. C. Jones, and W. J. Milliken (1994, June). A new method for the scale up of displacement processes in heterogeneous reservoirs. See Thomassen (1994).

Dykaar, B. B. and P. K. Kitanidis (1992a). Determination of the effective hydraulic conductivity for heterogeneous porous media using a numerical spectral approach. 1 : Method. *Water Resources Research 28*(4), 1155–1166.

Dykaar, B. B. and P. K. Kitanidis (1992b). Determination of the effective hydraulic conductivity for heterogeneous porous media using a numerical spectral approach. 2 : Results. *Water Resources Research 28*(4), 1167–1178.

Ene, H. I. and D. Poliševski (1987). *Thermal flow in porous media*. Dordrecht : D. Rediel Publishing Company.

Espedal, M. S. and O. Sævareid (1994, June). Upscaling of permeability based on wavelet representation. See Thomassen (1994).

Fayers, F. J. and T. A. Hewett (1992). A review of current trends in petroleum reservoir description and assessment of the impacts on oil recovery. *Advances in Water Resources 15*, 341–365.

Fenton, G. A. and D. V. Griffiths (1993). Statistics of block conductivity through a simple bounded stochastic medium. *Water Resources Research 29*(6), 1825–1830.

Ferrandon, J. (1948). Les lois de l'écoulement de filtration. *Génie Civil 125*, 24–28.

François, O. (1993). *Simulation d'écoulement de gaz en milieu aquifère. Développement d'une méthode d'éléments finis mixtes en pression et discontinus en saturation*. Ph. D. thesis, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris.

Freeze, R. A. (1975). A stochastic-conceptual analysis of one dimensional groundwater flow in non uniform homogemeous media. *Water Resources Research 11*(5), 725–741.

Freeze, R. A. (1994). Henry Darcy and the fountains of Dijon. *Ground Water 32*(1), 23–30.

Freeze, R. A. and J. A. Cherry (1979). *Groundwater*. Englewood Cliffs : Prentice-Hall, Inc.

Galli, A., H. Beucher, G. Le Loc'h, B. Doligez, and Heresim Group (1994). The pros and cons of the truncated Gaussian method. In M. Armstrong and P. Dowd (Eds.), *Geostatistical simulation, Proceedings of the geostatistical simulations workshop, Fontainebleau, France, 27-28 May 1993*, pp. 217–233. Kluwer Academic Publishers.

Gallouët, T. and D. Guérillot (1994, June). Averaged heterogeneous porous media by minimisation of the error on the flow rate. See Thomassen (1994).

Garcia, M. (1991). *Génération automatique de maillage appliquée aux domaines complexes du sous-sol*. Ph. D. thesis, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris.

Garcia, M. H., A. G. Journel, and K. Aziz (1990). An automatic grid generation and adjustment method for modeling reservoir heterogeneities. Technical report, Stanford Center for Reservoir Forecasting Report 3.

Gautier, Y. and B. Nœtinger (1994, June). Preferential flow-paths detection for heterogeneous reservoirs using a new renormalization technique. See Thomassen (1994).

Gautier, Y. and B. Nœtinger (1997). Preferential flow-paths detection for heterogeneous reservoirs using a new renormalization technique. *Trans. Porous Media 26*(1), 1–23.

Gelhar, L. W. (1993). *Stochastic Subsurface Hydrology*. Engelwood Cliffs : Prentice-Hall.

Gelhar, L. W. and C. L. Axness (1983). Three-dimensional stochastic analysis of macrodispersion in aquifers. *Water Resources Research 19*(1), 161–180.

Genty, A. (1996). *Validation expérimentale d'un modèle numérique de déplacement diphasique en milieu poreux*. Ph. D. thesis, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris.

Goblet, P. (1990). Programme metis 6, Rapport d'avancement au 31.07.1990. Technical Report LHM/RD/90/55, École des Mines de Paris - Centre d'Informatique Géologique, Fontainebleau.

Goblet, P. (1992). Programme metis 7, Application d'une technique d'éléments finis multigrille à la modélisation d'un milieu fortement hétérogène. Technical Report LHM/RD/92/2, École des Mines de Paris - Centre d'Informatique Géologique, Fontainebleau.

Gómez-Hernández, J. J. (1991, March). *A stochastic approach to the simulation of block conductivity fields conditioned upon data measured at a smaller scale*. Ph. D. thesis, Stanford University.

Gómez-Hernández, J. J. and A. G. Journel (1990). Stochastic characterization of grid-block permeabilities : from point values to block tensors. See Guérillot and Guillon (1990), pp. 83–90.

Gray, W. G. (1980). Response to the comments of T. N. Narasimhan. *Advances in Water Resources*.

Greenkorn, R. A. and D. P. Kessler (1969). Dispersion in heterogeneous nonuniform aquifer. *Industrial and Engineering Chemistry 61*, 14–32.

Guérillot, D. and O. Guillon (Eds.) (1990). *2nd European Conference on the Mathematics of Oil Recovery, Arles, France*, Paris. Édition Technip.

Guérillot, D., J. L. Rudkiewicz, C. Ravenne, G. Renard, and A. Galli (1990). An integrated model for computer aided reservoir description : from outcrop study to fluid flow simulations. *Revue de l'IFP 45*(1), 71–77.

Guyon, E., J.-P. Hulin, and R. Lenormand (1984). Application de la percolation à la physique des milieux poreux. *Annales des Mines vol. 5-6*, 17–40.

Haldorsen, H. H. and E. Damsleth (1990, April). Stochastic modeling. *Journal of Petroleum Technology 42*, 404–412.

Haldorsen, H. H. and L. W. Lake (1982). A new approach to shale management in field scale simulation models. *SPE 10976*.

Hashin (1983). Analysis of composite materials. *Journal of Applied Mechanics 50*, 481–505.

Hashin, Z. and S. Shtrikman (1963). Conductivity of polycristals. *Phys. Rev. 120*, 129.

Hassanizadeh, M. and W. G. Gray (1979). General conservation equations for multiphase systems. 1 : Averaging procedure. *Advances in Water Resources 2*(3), 131–144.

Henriette, A., C. G. Jacquin, and P. M. Adler (1989). The effective permeability of heterogeneous porous media. *Physico Chemical Hydrodynamics 11*(1), 63–80.

Hinrichsen, E. L., A. Aharony, J. Feder, A. Hansen, T. Jøssang, and H. H. Hardy (1993). A fast algorithm for estimating large-scale permeabilities of correlated anisotropic media. *Trans. Porous Media 12*, 55–72.

Holden, L. and O. Lia (1992, May). A tensor estimator for the homogenization of absolute permeability. *Trans. Porous Media 8*(1), 37–46.

Howes, F. A. and S. Whitaker (1985). The spatial averaging theorem revisited. *Chemical Engineering Science 40*, 1387–1392.

Hubbert, M. K. (1940). The theory of groundwater motion. *Journal of Geology 48*(8), 785–944.

Huyakorn, P. S. and G. F. Pinder (1983). *Computational methods in subsurface flow*. Academic Press.

Indelman, P. and B. Abramovich (1994). A higher-order approximation to effective conductivity in media of anisotropic random structure. *Water Resources Research 30*(6), 1857–1864.

Indelman, P. and G. Dagan (1993). Upscaling of permeability of anisotropic heterogeneous formations, 1, the general framework. *Water Resources Research 29*(4), 917–923.

Jacob, C. E. and S. W. Lohman (1952, Août). Non steady flow to a well of constant drawdown in an extensive aquifer. *Trans. Amer. Geophys. Union 33*(4), 559–569.

Jones, S. C. and W. O. Roszelle (1978, May). Graphical techniques for determining relative permeability from displacement experiments. *Journal of Petroleum Technology*, 807–817.

Journel, A. G., C. V. Deutsch, and A. J. Desbarats (1986). Power averaging for block effective permeability. In *SPE 15128*. Society of Petroleum Engineers.

Kadanoff, L. (1966). Scaling laws for Ising models near T_c. *Physics 2*, 263–272.

Kalaydjian, F. (1987). A macroscopic description of multiphase flow in porous media involving spacetime evolution of fluid/fluid interface. *Trans. Porous Media 2*, 537–552.

Kasap, E. and L. W. Lake (1989, Feb). An analytical method to calculate the effective permeability tensor of a grid block and its application in an outcrop study. *SPE Symp. on Reservoir Simulation, Houston. SPE 18434*.

Kasap, E. and L. W. Lake (1990, June). Calculating the effective permeability tensor of a grid-block. *SPE Form. Eval. SPE 18434*, 192–200.

King, M. J. (1993). Application and analysis of tensor permeability to crossbedded reservoirs. *SPE 26118*.

King, P., A. Muggeridge, and W. Price (1993). Renormalization calculations of immiscible flow. *Trans. Porous Media 12*(3), 237–260.

King, P. R. (1987). The use of field theoretic methods for the study of flow in heterogeneous porous medium. *J. Phys. A : Math. gen. 20*, 3935–3947.

King, P. R. (1989). The use of renormalization for calculating effective permeability. *Trans. Porous Media 4*, 37–58.

Kitanidis, P. K. (1990, June). Effective hydraulic conductivity for gradually varying flow. *Water Resources Research 26*(1), 1197–1208.

Kitanidis, P. K. (1995). Groundwater flow in heterogeneous formations. In *Second George Kovac's Colloquium*, Paris. UNESCO.

Koltermann, C. E. and S. M. Gorelick (1992). Paleoclimatic signature in terrestrial flood deposits. *Science 256*, 1775–1782.

Koltermann, C. E. and S. M. Gorelick (1996). Heterogeneity in sedimentary deposits : A review of structure-imitating, process-imitating, and descriptive approaches. *Water Resources Research 32*(9), 2617–2658.

Kossack, C. A., J. O. Aasen, and S. T. Opdal (1989). Scaling-up laboratory relative permeabilities and rock heterogeneities with pseudo functions for field simulations. *SPE Symp. on Reservoir Simulation, Houston. SPE 18436*, 367–390.

Kozlov, S. M. (1993). Central limit theorem for multiscaled permeability. In *Proceedings of Oberwolfach Porous Media Meeting*. Birkhauser.

Kruel-Romeu, R. (1994, Juin). *Écoulement en milieu hétérogène : prise de moyenne de perméabilité en régimes permanent et transitoire*. Ph. D. thesis, Université Paris VI.

Kruel-Romeu, R. and B. Nœtinger (1995). Calculation of inter-nodal transmissibilities in finite-differences models of flow in heterogeneous media. *Water Resources Research 31*(4), 943–959.

Kruseman, G. P. and N. A. de Ridder (1992). *Analysis and evaluation of pumping test data*, Volume 47. ILRI publication.

Kyte, J. R. and D. W. Berry (1975, August). New pseudo functions to control numerical dispersion. *SPE Journal*, 269–276.

Lachassagne, P. (1989, Novembre). *Estimation des perméabilités moyennes dans les milieux poreux fortement non-uniformes étudiés sous l'angle stochastique - Application aux essais de débit en aquifère captif*. Ph. D. thesis, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris.

Lachassagne, P., E. Ledoux, and G. d. Marsily (1990). Two dimensional stochastic modeling of flow in non-uniform confined aquifers. Correction of the systematic bias introduced by numerical models when they are used stochastically. See Guérillot and Guillon (1990), pp. 283–286.

Lake, L. W., H. B. Carroll, and T. C. Wesson (Eds.) (1991). *Reservoir characterization II*, Orlando. Academic Press.

Landau, L. D. and E. M. Lifshitz (1960). *Electrodynamics of continuous media*. Oxford : Pergamon.

Lantuéjoul, C. (1992). Substitution random function. In A. Soares (Ed.), *Geostatistics Tróia '92*, pp. 37–48. Kluwer Academic Publisher.

Lasseter, T. J., J. R. Wagoner, and L. W. Lake (1986). Reservoir heterogeneities and their influence on ultimate recovery. In L. W. Lake and H. B. Carroll (Eds.), *Reservoir characterization*, Orlando. Academic Press.

Le Loc'h, G. (1987, Novembre). *Étude de la composition des perméabilités par des méthodes variationnelles*. Ph. D. thesis, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris.

Le Loc'h, G., H. Beucher, A. Gali, B. Doligez, and H. Group (1994, June). Improvement in the truncated gaussian method : Combining several gaussian functions. See Thomassen (1994).

Ledoux, E. (1975). Programme newsam principe et notice d emploi. Technical Report LHM/R75/11, École des Mines de Paris - Centre d'Informatique Géologique, Fontainebleau.

Lemouzy, P. (1991). Calcul de la perméabilité absolue effective. Technical Report RF40 no 2685, Institut Français du Pétrole, Paris.

Levassor, A. and E. Ledoux (1994). Newsam, Uun programme général de simulation des écoulements et des transports de matière dans les systèmes aquifères complexes. Notice d'utilisation. Technical Report LHM/RD/94/53, École des Mines de Paris - Centre d'Informatique Géologique, Fontainebleau.

Long, J. C., J. S. Remer, C. R. Wilson, and P. A. Witherspoon (1982). Porous media equivalents for networks of discontinuous fractures. *Water Resources Research 18*(3), 645–658.

Madsen, R. A. (1994, June). Change of scale for the full permeability tensor on a thetraedron grid. See Thomassen (1994).

Malick, K. M. and T. A. Hewett (1995). Boundary effects in the successive upscaling of absolute permeability. Technical report, Stanford Center for Reservoir Forecasting.

Mallet, J. L., P. Jacquemin, and N. Cheimanoff (1989). Gocad project : geometric modeling of complex geological surfaces. In *59th annual International SEG meeting*, Dallas, Texas, USA, pp. Vol. a, p. 126–128.

Mansoori, J. (1994). *Stochastic modeling and geostatistics - Principle, methods and case studies*, Chapter 7 - A review of basic upscaling procedures : advantages and disadvantages, pp. 65–74. The American Association of Petroleum Geologists.

Marle, C. (1967, Octobre). Écoulement monophasique en milieux poreux. *Revue de l'IFP 22*(10), 1471–1509.

Marle, C. (1972). *Les écoulements polyphasiques en milieu poreux. Cours de production de l'ENSPM, Tome IV*. Technip.

Marsily, G. d. (1981). *Hydrogéologie quantitative*. Paris : Masson.

Marsily, G. d. (1986). *Quantitative Hydrogeology*. Academic Press.

Marsily, G. d. (1989). Soil and rock flow properties, stochastic description. In *Encyclopedia of physical science and technology*. Academic Press.

Marsily, G. d. (1993). Quelques méthodes d'approche de la variabilité spatiale des reservoirs souterrains. *Hydrogéologie 4*, 259–268.

Marsily, G. d. (1994). Quelques réflexions sur l'utilisation des modèles en hydrologie. *Revue des Sciences de l'Eau 7*, 219–234.

Martin, J. H. and J. A. Cooper (1984, September). An integrated approach to the modeling of permeability barrier distribution in a sedimentologically complex reservoir. In *59th Annual Technical Conference*, Houston, Texas. Soc. of Pet. Eng.

Matheron, G. (1962). *Traité de géostatistique appliquée*. Technip.

Matheron, G. (1965). *Les variables régionalisées et leur estimation : une application de la théorie des fonctions aléatoires aux sciences de la nature*. Paris : Masson.

Matheron, G. (1967). *Eléments pour une théorie des milieux poreux*. Paris : Masson.

Matheron, G. (1968, Février). Composition des perméabilités en milieu poreux hétérogène : Critique de la règle de pondération géométrique. *Revue de l'IFP 23*, 201–218.

Matheron, G. (1993, 25-26 Mai). Quelques inégalités pour la perméabilité effective d'un milieu poreux hétérogène. In *Cahiers de Géostatistique, Fascicule 3*. Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris.

Matheron, G., H. Beucher, C. de Fouquet, A. Galli, D. Guérillot, and C. Ravenne (1987, September). Conditional simulation of the geometry of fluvio-deltaic reservoirs. *62nd Annual Tech. Conf. and Exhb. of the SPE. SPE 16753*, 591–599.

McCarthy, J. F. (1990). Effective permeability of sandstone-shale reservoirs by a random walk method. *J. Phys. A : Math. gen. 23*, L445–L451.

McCarthy, J. F. (1995). Comparison of fast algorithms for estimating large-scale permeabilities of heterogeneous media. *Trans. Porous Media 19*, 123–137.

Mei, C. C. and J.-L. Auriault (1989). Mechanics of heterogeneous porous media with several spatial scales. *Proc. R. Soc. Lond. A 426*, 391–423.

Mosé, R., P. Siegel, P. Ackerer, and G. Chavent (1994). Application of the mixed hibrid finite element approximation in a groundwater flow model : Luxury or necessity ? *Water Resources Research 30*(11), 3001–3012.

Muggeridge, A. H. (1991). Generation of effective relative permeabilities from detailed simulation of flow in heterogeneous porous media. See Lake, Carroll, and Wesson (1991), pp. 197–225.

Muskat, M., R. D. Wyckoff, H. G. Botset, and M. W. Meres (1937). Flow of gas-liquid mixture through trough sands. *Trans. Amer. Inst. Min. Met. Pet. Eng. 123*, 69–96.

Narasimhan, T. N. (1980). Comments on "General conservation equations for multi-phase systems : 1. Averaging procedure" by M. Hassanizadeh and W. G. Gray. *Advances in Water Resources*.

Narasimhan, T. N. (1983). A note on volume-averaging. In G. F. Pinder (Ed.), *Flow through porous media*. C.M.L. Publication.

Neuman, S. P. (1994, March). Generalized scaling of permeabilities : validation and effect of support scale. *Geophysical Research Letters 21*(5), 349–352.

Neuman, S. P. and S. Orr (1993). Prediction of steady state flow in nonuniform geologic media by conditional moments : exact nonlocal formalism, effective conductivities and weak approximation. *Water Resources Research 29*(2), 341–364.

Njifenjou, A. (1993, Mars). *Eléments finis mixtes hybrides duaux et homogénéisation des paramètres pétrophysiques - Application à l'étude numérique d'écoulement en milieu poreux*. Ph. D. thesis, Université Paris VI.

Njifenjou, A. (1994). Expression en termes d'énergie pour la perméabilité absolue effective. *Revue de l'IFP 49*(4), 345–358.

Nœtinger, B. (1994). The effective permeability of a heterogeneous porous medium. *Trans. Porous Media 15*, 99–127.

Nœtinger, B. and C. Jacquin (1991). Experimental tests of a simple permeability composition formula. *SPE 22841*, 253–260.

Otero, C. J., A. E. Sáez, and I. Rusinek (1990). Effective permeabilities for model heterogeneous porous media. *In Situ 14*(3), 229–244.

Pickup, G., P. S. Ringrose, J. L. Jensen, and K. S. Sorbie (1994). Permeability tensors for sedimentary structures. *Mathematical Geology 26*(2), 227–250.

Pickup, G. E. and K. S. Sorbie (1994, June). The scaleup of two-phase flow using permeability tensors. See Thomassen (1994).

Poley, A. D. (1988, November). Effective permeability and dispersion in locally heterogeneous aquifers. *Water Resources Research 24*(11), 1921–1926.

Press, W. H., W. T. Vetterling, S. A. Teukolsky, and B. P. Flannery (1992). *Numerical Recipes in C - The art of scientific computing - Second edition*. Cambridge University Press.

Quintard, M. and S. Whitaker (1987). Ecoulement monophasique en milieu poreux : effets des hétérogénéités locales. *Journal de Mécanique Théorique et Appliquée 6*(5), 691–726.

Quintard, M. and S. Whitaker (1988). Two-phase flow in heterogeneous porous media : the method of large-scale averaging. *Trans. Porous Media 3*(4), 357–413.

Quintard, M. and S. Whitaker (1990a). Two-phase flow in heterogeneous porous media I : the influence of large spatial and temporal gradients. *Trans. Porous Media 5*, 341–379.

Quintard, M. and S. Whitaker (1990b). Two-phase flow in heterogeneous porous media II : numerical experiments for flow perpendicular to a stratified system. *Trans. Porous Media 5*, 429–472.

Quintard, M. and S. Whitaker (1994a). Convection, dispersion, and interfacial transport of contaminants : Homogeneous porous media. *Advances in Water Resources 17*, 221–239.

Quintard, M. and S. Whitaker (1994b). Transport in ordered and disordered porous media - 1 : The cellular average an the use of weighting functions. *Trans. Porous Media 14*, 163–177.

Ravenne, C., A. Galli, H. Beucher, R. Eschard, D. Guérillot, and Heresim Group (1990). Outcrop studies and geostatistical modeling of a Midle Jurasic Brent analogue. In *"The European Oil and Gas Conference" 9-12 October 1990*, Alltavilla Milicia (Palermo, Sicily, Italy).

Renard, P. and G. Courrioux (1994). Three dimensional geometric modeling of a faulted domain : the Soultz horst example. *Computer & Geosciences 20*(9), 1379–1390.

Renard, P. and G. Le Loc'h (1996). Une nouvelle technique de calcul de la perméabilité équivalente des milieux poreux : la renormalisation simplifiée. *C.R. Acad. Sci. Paris 323*, 859–864.

Renard, P. and G. d. Marsily (1997). Calculating equivalent permeability : A review. *Advances in Water Resources 20*(5-6), 253–278.

Roth, C. (1995). *Contribution de la géostatistique à la résolution du problème inverse en hydrogéologie*. Ph. D. thesis, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris.

Roth, C., J.-P. Chilès, and C. de Fouquet (1997). Adapting geostatistical transmissivity simulations to a finite difference flow simulators. *Water Resources Research 32*(10), 3237–3242.

Rovey, C. W. and D. S. Cherkauer (1995). Scale dependency of hydraulic conductivity measurements. *Ground Water 33*(5), 769–780.

Rubin, Y. and J. Gómez-Hernández (1990, April). A stochastic approach to the problem of upscaling of conductivity in disordered media : Theory and unconditional numerical simulations. *Water Resources Research 22*(4), 691–701.

Rubin, Y., J. J. Gómez-Hernández, and A. Journel (1991). Analysis of upscaling and effective properties in disordered media. See Lake, Carroll, and Wesson (1991), pp. 251–276.

Ruch, M. (1992, Décembre). *Transfert d'un polluant non réactif en milieu poreux saturé : étude sur modèles physiques tridimensionnels et simulations*. Ph. D. thesis, Université Louis Pasteur - Institut de Mécanique des Fluides, Strasbourg.

Sáez, A. E., C. J. Otero, and I. Rusinek (1989, June). The effective homogeneous behaviour of heterogeneous porous media. *Trans. Porous Media 4*(3), p. 213–238.

Sahimi, M. (1994). *Applications of percolation theory*. Taylor and Francis.

Sanchez-Hubert, J. and E. Sanchez-Palencia (1992). *Introduction aux méthodes asymptotiques et à l'homogénéisation*. Collection mathématiques appliquées pour la maitrise. Paris : Masson.

Sánchez-Vila, X., J. Carrera, and J. P. Girardi (1996). Scale effects in transmissivity. *Journal of Hydrology 183*(1-2), 1–22.

Sànchez-Vila, X., J. P. Girardi, and J. Carrera (1995). A synthesis of approaches to upscaling of hydraulic conductivities. *Water Resources Research 31*(4), 867–882.

Schäfer, W. and W. K. H. Kinzelbach (1996). Transport of reactive species in heterogeneous porous media. *Journal of Hydrology 183*(1-2), 151–168.

Scheibe, T. D. and D. L. Freyberg (1995). Use of sedimentological information for geometric simulation of natural porous media structure. *Water Resources Research 31*(12), 3259–3270.

Semra, K. (1994, Juin). *Modélisation tri-dimensionnelle du transport d'un traceur en milieu poreux saturé hétérogène. Evaluation des théories stochastiques*. Ph. D. thesis, Université Louis Pasteur - Institut de Mécanique des Fluides, Strasbourg.

Stone, H. (1991). Rigorous black oil pseudo functions. *11th SPE Symp. on Reservoir Simulation, Anaheim. SPE 21207*, 57–68.

Sykes, M. F. and J. W. Essam (1964). Exact critical percolation probabilities for site and bond problems in two dimensions. *J. Math. Phys. 5*, 1117–1127.

Theis, C. V. (1935). The relation between the lowering of the piezometric surface and the rate and duration of discharge of a well using groundwater storage. *Trans. Amer. Geophys. Union 2*, 519–524.

Theis, C. V. (1967). Aquifers and models. In M. A. Marino (Ed.), *Proceedings of the symposium on ground-water hydrology*, pp. 138. Amer. Water Resources Association.

Thomassen, P. R. (Ed.) (1994, June). *4th European Conference on the Mathematics of Oil Recovery*, Røros, Norway.

Tjølsen, C. B., Ø. Bøe, and E. Damsleth (1992, February 5-6). Homogenization of absolute permeability - does it affect the final results ? In *Lerkendal Petroleum Engineering Workshop*, Trondheim.

Tran, T. (1995, May). Addressing the missing scale : Direct simulation of effective modeling cell permeability. Technical Report 8th annual meeting, Stanford Center for Reservoir Forecasting.

Tran, T. and A. Journel (1995, May). Automatic generation of corner-point-geometry flow simulation grids from detailed geostatistical descriptions. Technical Report 8th annual meeting, Stanford Center for Reservoir Forecasting.

Tran, T. T. (1996). The missing scale and direct simulation of block effective properties. *Journal of Hydrology 183*(1-2), 37–56.

Wang, H. F. and M. P. Anderson (1982). *Introduction to groundwater modeling - Finite difference and finite element methods*. New York : W. H. Freeman and Company.

Warren, J. and H. Price (1961). Flow in heterogeneous porous media. *SPE Journal 1*, 153–169.

Wen, X.-H. and J. J. Gómez-Hernández (1993). Upscaling of hydraulic conductivity in heterogeneous media - A litterature review. Technical report, Departamento de Ingeniería Hidráulic y Medio Ambient, Universidad Politécnica de Valencia, Spain.

Wen, X.-H. and J. J. Gómez-Hernández (1996). Upscaling hydraulic conductivities in heterogeneous media : An overview. *Journal of Hydrology 183*(1-2), ix–xxxii.

Whitaker, S. (1986a). Flow in porous media : 1. A theoretical derivation of Darcy's law. *Trans. Porous Media 1*(1), 3–25.

Whitaker, S. (1986b). Flow in porous media, 2, the governing equations for immiscible, two-phase flow. *Trans. Porous Media 1*(2), 105–125.

White, C. D. and R. N. Horne (1987). Computing absolute transmissibility in the presence of fine-scale heterogeneity. *SPE 16011*, 209–220.

Wiener, O. (1912). *Abhandlungen der Mathematisch Physischen Klasse der Königlichen Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften 32*, 509.

Wietzerbin, L. J. and J. L. Mallet (1993). Parametrization of complex 3D heterogeneities : A new CAD approach. *68th Annual Tech. Conf. and Exhb. of the SPE, Houston. SPE 26423*, 77–88.

Wilson, K. G. (1975). The renormalization group : Critcal phenomena and the Kondo problem. *Reviews of Modern Physics 47*(4), 773–840.

Wyckoff, R. D. and H. G. Botset (1936). The flow of gas-liquid mixture through unconsolidated sands. *Physics 7*, 325–345.

Yamada, T. (1995). A dissipation based coarse grid system and its application to the scale-up of two-phase problems. Technical Report 8th annual meeting, Stanford Center for Reservoir Forecasting.

Zapata, V. J. and L. W. Lake (1981). A theoretical analysis of viscous crossflow. *SPE 10111*.

Zijl, W. and J. M. T. Stam (1992). Modeling permeability in imperfectly layered media : 1. Derivation of block-scale permeability tensor for thin grid-block. *Mathematical Geology 24*(8), 865–883.

Table des matières

1 Introduction **1**

2 Énoncé du problème et définitions **5**

2.1 Notion d'échelle 6

2.2 Loi de Darcy et perméabilité 7

2.2.1 Loi de Darcy 7

2.2.2 Propriétés du tenseur de perméabilité 9

2.2.3 Formulations pratiques 9

Fluide incompressible 9

Hydrogéologie 10

Équation de la diffusivité 10

2.3 Hétérogénéité et Modèle Géologique . . . 10

2.3.1 De l'intérêt de décrire l'hétérogénéité 11

2.3.2 Comment définir l'hétérogénéité ? . . 12

2.3.3 Comment modéliser l'hétérogénéité ? 12

Modèles imitant les processus de formation 13

Modèles imitant la structure 14

Modèles géométriques 14

Modèles géostatistiques 14

Modèles hybrides 15

2.3.4 Le compromis à trouver 16

2.4 Variables d'état et loi de Darcy à l'échelle supérieure 16

2.5 Perméabilité équivalente 17

2.5.1 Critères d'équivalence 17

2.5.2 Perméabilité effective 17

2.5.3 Perméabilité de bloc 18

2.6 Énoncé du problème 18

3 Étude bibliographique **21**

3.1 Introduction 22

3.2 Inégalités pour la perméabilité équivalente 24

3.2.1 Bornes de Wiener 24

3.2.2 Bornes de Hashin et Shtrikman . . . 24

3.2.3 Bornes de Matheron 25

3.2.4 Bornes de Cardwell et Parsons . . . 26

3.3 Méthodes heuristiques 27

3.3.1 Échantillonnage 27

3.3.2 Moyenne de puissance 27

3.3.3 Composition de bornes théoriques . . 28

Bornes fondamentales 28

Bornes de Cardwell et Parsons 28

3.4 Méthodes déterministes 30

3.4.1 Solution analytique de l'équation de la diffusivité 30

3.4.2 Résolution numérique de l'équation de la diffusivité 31

Méthodes locales et conditions aux limites 31

Perméabilité directionnelle 31

Perméabilité tensorielle 32

Méthodes non-locales 33

General Tensor Scaling 33

Utilisation du voisinage 35

3.4.3 Équations homogènes 35

Théorie de l'homogénéisation 35

Prise de moyenne spatiale 38

Méthode des moments 40

3.4.4 Tube de courant 40

3.4.5 Renormalisation dans l'espace réel . 41

Renormalisation standard 42

Renormalisation tensorielle 43

3.5 Méthodes statistiques 44

3.5.1 Théorie des milieux effectifs 44

3.5.2 Théorie de la percolation 45

3.6 Méthodes géostatistiques 46

3.6.1 Règle de pondération géométrique . 46

3.6.2 Résultats analytiques approchés et conjectures 46

Conjecture de Matheron 46

Prise en compte de l'anisotropie . . . 47

Mise en garde 49

3.6.3 Perméabilité de bloc 49

3.7 Grille adaptative 52

3.8 Comparaison des techniques et discussion 53

3.8.1 Peut on appliquer la conjecture de Matheron ? 53

3.8.2 Perméabilité effective ou perméabilité de bloc ? 54

3.8.3 Méthode analytique ou numérique ? . 56
3.8.4 Au sujet de la renormalisation 56
3.8.5 Quel domaine d'application pour les méthodes d'approximation ? 57
3.8.6 Les méthodes heuristiques ont elles un intérêt ? 59
3.8.7 Quelle méthode numérique ? 60
3.9 Conclusion 68

4 Tenseur de perméabilité et critères d'équivalences 71
4.1 Théorie 72
4.1.1 Équations et conditions aux limites macroscopiques 72
4.1.2 Hypothèse 73
4.1.3 Conditions aux limites mégascopiques 73
4.1.4 Définition 73
4.1.5 Simplifications et conséquences pratiques 74
Gradient de charge moyen 74
Remarques 74
Vitesse moyenne 75
Remarques 75
Expression de la perméabilité équivalente 76
4.1.6 Minimisation par moindres carrés . . 76
4.1.7 Contrôle des autres critères 77
Égalité des flux 78
Conditions aux limites de type perméamètre 78
Conditions aux limites de type périodique 78
Conditions aux limites de type uniforme 79
Égalité des énergies dissipées 80
Conditions aux limites perméamètre 80
Conditions aux limites périodiques . 81
Conditions aux limites uniformes . . 81
4.1.8 En résumé 82
4.2 Exemples d'applications 83
4.2.1 Milieu 2D stratifié 83
4.2.2 Milieu stratifié oblique 84
4.2.3 Discussion 86
4.3 Conclusion 88

5 La renormalisation simplifiée 91
5.1 Les hypothèses 92
5.2 Procédure itérative 92
5.3 Prise en compte de l'anisotropie 94
5.3.1 Quantification de l'anisotropie 94
5.3.2 Rappels concernant la formule de Kruel-Romeu 95
En deux dimensions 96
En trois dimensions 96
5.3.3 La nouvelle formule 98
5.3.4 Discussion 99
5.3.5 Un premier test 99
5.4 Conclusion 101

6 Calcul de la perméabilité de référence 103
6.1 Technique de calcul de la perméabilité de référence 104
6.2 Logiciels utilisés 104
6.2.1 *HIGHDEN* 105
6.2.2 *NEWSAM* 105
6.2.3 *TRIMULEC* 105
6.3 Étude du biais pour un damier 2D 105
6.4 Expérience de Henriette et al. 106
6.5 Marceau 108
6.5.1 Le dispositif expérimental 108
6.5.2 Mesure de la perméabilité à grande échelle 108
Données 108
Incertitude sur U 110
Incertitude sur J 110
Calcul de la perméabilité 111
6.5.3 Bornes théoriques 111
6.5.4 Test "déterministe" des méthodes numériques 112
6.5.5 Test "stochastique" 112
6.6 Conclusion 115

7 Comparaison des méthodes rapides 117
7.1 Sélection des méthodes rapides 118
7.2 Champs de perméabilité synthétiques . . . 118
7.2.1 Choix de la discrétisation 119
7.2.2 Choix de la méthode de simulation . 119
7.2.3 Description des simulations par Gaussiennes Seuillées 120
Covariance 120
Proportion de faciès 120
Combinaison des proportions et des covariances 120
Les simulations de faciès 122
Champ de perméabilité 122
Les "commons" 122
7.2.4 Description des simulations par modèle Booléen 122
Paramètre des inclusions 125
Paramètre de densité 125
Combinaison des inclusions et des densités 125
Simulation de faciès 125
Contraste de perméabilité 125
7.2.5 Petits blocs 125
7.3 Perméabilité de référence 127
7.3.1 Tenseur 127
7.3.2 Surdiscrétisation 129
7.3.3 Décompte 129
7.4 Comparaison des temps calcul 129

7.5 Les critères de classement 132
7.5.1 Biais relatif 132
7.5.2 Coefficients de corrélation 132
7.5.3 Comparaison des nuages de points . 133
7.5.4 Conclusion 133
7.6 Résultats 133
7.6.1 Classement par biais relatif minimum 134
7.6.2 Classement par coefficients de corrélation maximum 135
7.6.3 Effet de la valeur de référence 137
7.6.4 Étude des nuages de points 137
7.6.5 Synthèse 142
Effet de la taille des blocs 143
Effet de l'anisotropie 143
7.7 Conclusion 145

8 Application aux écoulements diphasiques 147
8.1 Théorie 148
8.1.1 Équations phénoménologiques macroscopiques 148
8.1.2 Équations phénoménologiques mégascopiques 148
Équations homogènes 148
Pseudo-fonctions de perméabilité relative 149
Perméabilité relative équivalente 149
L'approche choisie 150
8.2 Outils et méthodes 150
8.2.1 Le modèle numérique *SUNIDJ* . . . 150
8.2.2 Le quart de five-spot 150
8.2.3 Calcul de la perméabilité relative équivalente 151
8.2.4 Les critères de comparaison 152
8.3 Premier cas test : le milieu périodique . . 154
8.3.1 Données 154
8.3.2 Paramètres équivalents 154
Perméabilités absolues 154
Perméabilité relatives 155
8.3.3 Comparaison des résultats aux puits 155
8.3.4 Comparaison des résultats dans le domaine 161
8.3.5 Discussion 163
8.4 Second cas test : le milieu binaire 164
8.4.1 Données 164
8.4.2 Paramètres équivalents 164
Perméabilités absolues 164
Perméabilité relatives 165
8.4.3 Comparaison des résultats aux puits 166
8.4.4 Comparaison des résultats dans le domaine 170
8.4.5 Discussion 175
8.5 Conclusion 176

9 Conclusion 179
9.1 Inventaire des techniques 180
9.2 Développements 180
9.3 Expériences numériques 181
9.4 Synthèse et perspective 181

A Histoire des fontaines publiques de Dijon 185

B Calcul du tenseur équivalent pour l'assemblage de deux blocs 193
B.1 choix des conditions limites 194
B.2 calcul de la perméabilité équivalente . . . 194
B.2.1 Calcul de V_x 194
B.2.2 Calcul de V_y et V_z 195
B.3 Conclusion 195

C Renormalisation 3D 197
C.1 Renormalisation standard 197
C.1.1 Système d'équations 197
Conditions limites 198
Flux nul 198
Potentiel imposé 198
Calcul des charges 198
Calcul de la perméabilité équivalente . 200
Égalité des débits 200
Égalité des énergies dissipées 200
C.2 Une première variation 202
C.2.1 Le schéma direct 202
C.2.2 Équations pour le calcul de K_{eq} . . . 202
C.3 Renormalisation tensorielle 204
C.3.1 Présentation du système d'approximation 204
C.3.2 Calcul des charges au nœuds 204
C.3.3 Calcul des macro-débits 206
C.3.4 Calcul de la perméabilité équivalente 207
C.3.5 En Résumé 207
C.3.6 Cas où les perméabilités locales sont isotropes 208

D Perméamètre tensoriel 211

E Présentation du logiciel TRIMULEC 213
E.1 L'approximation éléments finis 213
E.2 La technique multigrille 216

F Rapports caractérisant l'anisotropie 219

G Résultats du test numérique en diphasique 221

Références 233

Index

A

Anisotropie
- définition ... 8
- rapports d' ... 219

B

Biais numérique ... 62, 103
Biais relatif ... 132
Booléen (modèle) ... 122
Bornes
- de Cardwell et Parsons ... 26
- de Hashin et Shtrikman ... 24
- de Matheron ... 25
- de Wiener ... 24

C

Charge hydraulique ... 10
Coefficient de corrélation
- de rang ... 133
- linéaire ... 132

Composition
- de bornes théoriques ... 28, 59
- de tenseurs de perméabilité ... 31, 193

Conditions aux limites ... 89
- effet des ... 62
- five-spot ... 151
- immersion ... 35, 73
- perméamètre ... 32, 72
- périodique ... 32, 36, 72
- uniforme ... 33, 72

Conductivité hydraulique ... 10
Conjecture de Matheron ... 46, 53
Courbe de production ... 151
Critères d'équivalence ... 17
- égalité des flux ... 17, 78
- égalité des énergies ... 17, 80
- discussion ... 88
- nouveau ... 73

D

Darcy (loi de)
- rappel ... 7
- texte original ... 185

E

Echantillongage ... 54
Echantillonnage ... 27
Echelle ... 6
Eléments finis ... 213
Energies dissipées ... 17
Equation de la diffusivité ... 10
- résolution numérique ... 31, 60, 213

F

Five-spot ... 151
Fonction de pondération ... 39
Formule de Kruel-Romeu ... 29, 60, 95

G

Gaussiennes seuillées ... 120
General Tensor Scaling ... 33, 65
gigascopique (échelle) ... 6
Grille adaptative ... 52
Géostatistique ... 14

H

HERESIM ... 119
HIGHDEN ... 105
Homogénéisation ... 35, 60
Homogène (définition) ... 12
Hétérogéne (définition) ... 12

L

Loi de Darcy ... 7
Loi de Darcy généralisée ... 148

M

macroscopique (échelle) ... 6
Marceau ... 108
microscopique (échelle) ... 6
Milieu périodique ... 36
Minimisation par moindres carrés ... 76
Modèle booléen ... 122
Modèles (de reservoir)
- génétiques ... 13
- géométriques ... 14
- géostatistiques ... 14

Moyenne
- arithmétique ... 30
- de puissance ... 27, 59
- de puissance 1/3 ... 47, 53
- géométrique ... 46
- harmonique ... 30

Multigrille ... 216
mégascopique (échelle) ... 6
Méthode
- des moments ... 40
- heuristique ... 59
- non-locale ... 23, 33
- rapide ... 118

Méthodes des moments ... 60

N

NEWSAM ... 105

P

Percolation ... 45
Perméamètre tensoriel ... 211
Perméabilité

équivalente 17
de bloc 18, 22, 49, 54
de référence 104, 127
effective 17, 22, 54
intrinsèque 8
relative 148
Petites perturbations 47, 57
Potentiel hydraulique 8
Pression motrice 9
Prise de moyenne avec fermeture 38, 60, 148
Pseudo-fonctions 149
Puissance consommée par les forces de viscosité . . 17

R

Rapports d'anisotropie 219
Renormalisation 41, 56
simplifiée 91
standard 42
standard en 3D 197
tensorielle 43
tensorielle 3D 204
Règle de pondération géométrique 46

T

Temps de percée 151
Tenseur de perméabilité 8–9, 32, 71
Théorie
de l'homogénéisation 35, 148
de la percolation 45, 57
des milieux effectifs 44, 57
Transmissivité 10
de passage 34
TRIMULEC 105, 213
Tube de courant 40, 57

U

Uniforme (milieu) 12

W

Water cut 151