

Un *joli* problème d'Erdős

Michel BENAÏM*

Soit $0 < a < 1$ et $Y^a = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \theta_k$ la série aléatoire obtenue en choisissant les $\theta_k \in \{-1, 1\}$ au hasard. L'étude de la fonction de répartition $F^a(t) = \mathcal{P}(Y^a \leq t)$ révèle quelques connexions étonnantes entre la théorie des chaînes de Markov, l'analyse harmonique, la théorie des nombres algébriques, et la théorie géométrique de la mesure.

Introduction

Si la définition d'un *problème de mathématiques* est relativement consensuelle, celle d'un *joli problème de mathématiques* est nécessairement beaucoup plus subjective. Pourtant je ne doute pas que les lecteurs de cet article s'accorderont avec moi à trouver que le problème que les éditeurs des images 2005 m'ont demandé de présenter ici possède tous les ingrédients d'un *joli* problème de mathématiques :

- (i) Il est très facile à décrire ;
- (ii) Il n'est toujours pas (complètement) résolu ;
- (iii) Son analyse fait appel à des outils empruntés à des domaines particulièrement variés des mathématiques.

Soit $\Omega = \{-1, 1\}^{\mathbb{N}}$ et $a \in]0, 1[$. Pour toute suite de signes $\theta \in \Omega$, nous notons

$$Y_n^a(\theta) = \sum_{k=0}^n a^k \theta_k \quad \text{et} \quad Y^a(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \theta_k.$$

L'objet qui va nous intéresser ici est la fonction, ou comme disent les probabilistes, *la variable aléatoire* $Y^a : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ lorsque les θ_n sont choisis au hasard en jouant à pile ou face. Plus précisément, munissons Ω de la probabilité \mathcal{P} du jeu de pile ou face :

$$\forall \omega \in \Omega, \forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathcal{P}(\{\theta \in \Omega : \theta_0 = \omega_0, \dots, \theta_{n-1} = \omega_{n-1}\}) = \frac{1}{2^n}.$$

La loi de Y^a est la probabilité ν^a , image de \mathcal{P} par Y^a :

$$\nu^a(B) = \mathcal{P}(\{\theta \in \Omega : Y^a(\theta) \in B\}),$$

et sa *fonction de répartition* est l'application $F^a : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ définie par

$$F^a(t) = \nu^a(]-\infty, t]) = \mathcal{P}(Y^a \leq t).$$

* Institut de Mathématiques, Rue E-Argand 11, CH-2007 Neuchâtel Suisse.

L'étude de la fonction F^a (ou de la mesure ν^a) a été initiée dans les années 30 par Wintner et ses collaborateurs et révèle des connexions remarquables entre l'analyse harmonique, la théorie des nombres algébriques, les systèmes dynamiques ou encore la théorie géométrique de la mesure.

Auto-similarité

Soit (X_n) la suite récurrente aléatoire définie par

$$X_{n+1} = aX_n + \theta_{n+1}, n \geq -1, \tag{1}$$

où les θ_n sont tirés à pile ou face et X_{-1} est une condition initiale arbitraire indépendante des θ_n . Pour tout $n \geq 0$,

$$X_n(\theta) = a^{n+1}X_{-1} + \sum_{k=0}^n a^k \theta_{n-k},$$

de sorte que les variables X_n et $a^{n+1}X_{-1} + Y_n^a$ ont la même loi car les vecteurs $(\theta_0, \dots, \theta_n)$ et $(\theta_n, \dots, \theta_0)$ ont la même loi. Ainsi, si ν_n désigne la loi de X_n et Φ une fonction « test » continue bornée,

$$\int_{\mathbb{R}} \Phi d\nu_n = \int_{\Omega} \Phi \circ X_n d\mathcal{P} = \int_{\Omega} \Phi \circ (Y_n^a + a^{n+1}X_{-1}) d\mathcal{P} \rightarrow \int_{\Omega} \Phi \circ Y^a d\mathcal{P} = \int_{\mathbb{R}} \Phi d\nu^a \tag{2}$$

quand $n \rightarrow \infty$. Par ailleurs, d'après (1), la suite (ν_n) vérifie la relation de récurrence

$$\nu_{n+1} = T^a(\nu_n) \tag{3}$$

où T^a est l'opérateur qui transforme une mesure ν de fonction de répartition F (i.e $F(t) = \nu([-\infty, t])$) en une mesure $T^a(\nu)$ de fonction de répartition

$$T_a(F)(t) = \frac{1}{2} \left[F\left(\frac{t-1}{a}\right) + F\left(\frac{t+1}{a}\right) \right]. \tag{4}$$

De (2) et (3) on déduit la propriété d'auto-similarité suivante.

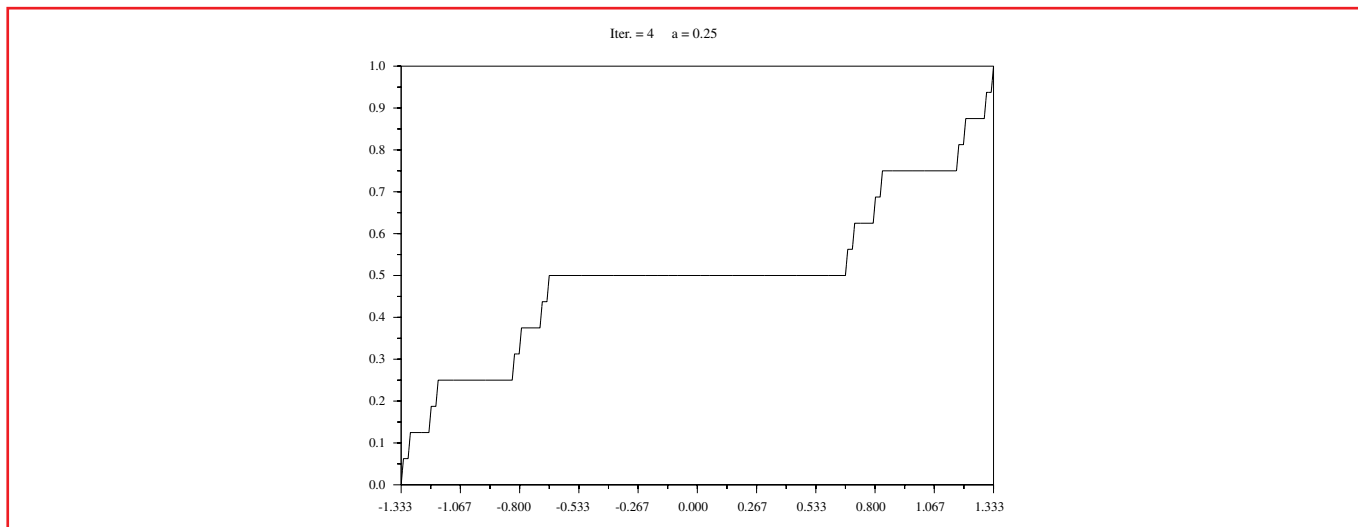


Figure 1 - Graphe de F_4 pour $a = 0,25$.

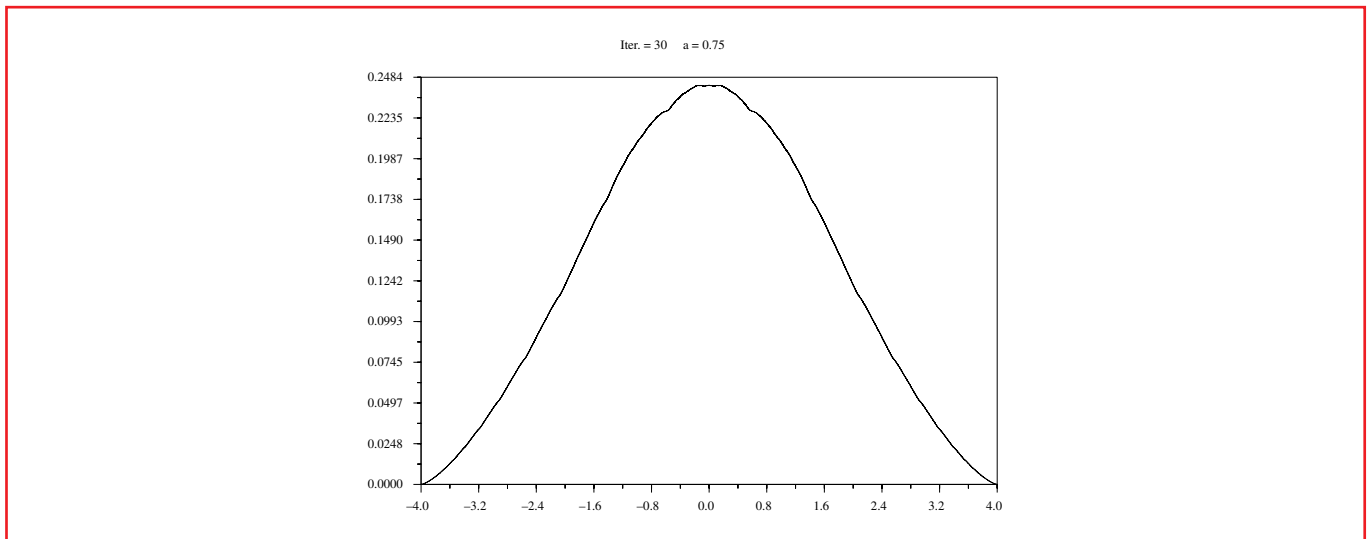


Figure 2 - Graphe de F_{30} pour $a = 0,75$.

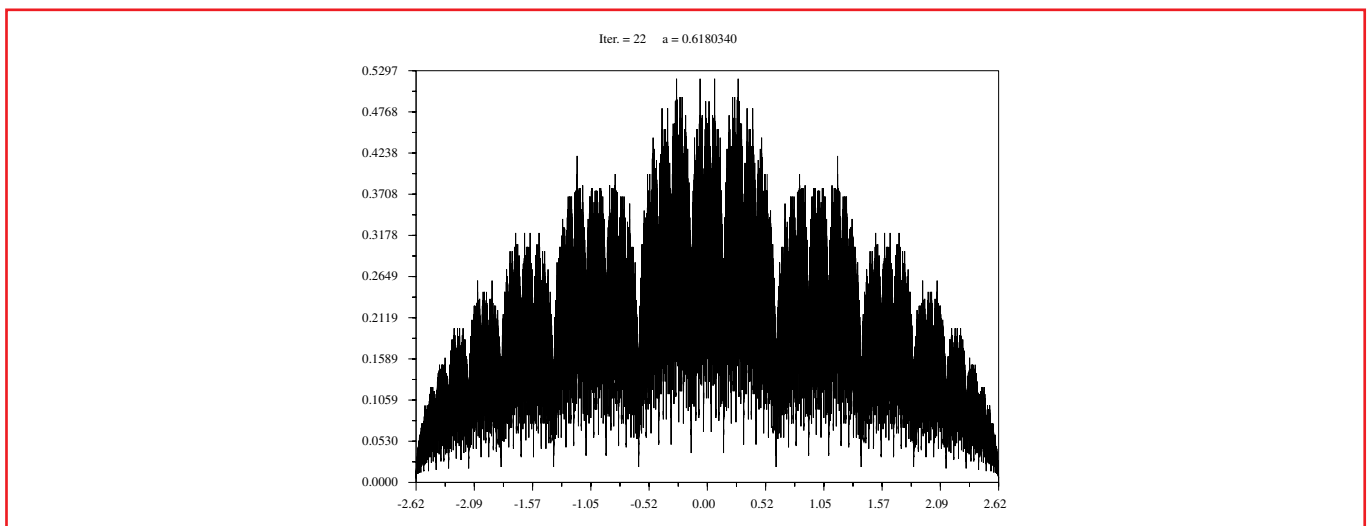


Figure 3 - Graphe de f_{22} pour $a = 0,6180340$.

Proposition 1. ν^a est l'unique probabilité solution de $\nu = T^a(\nu)$. C'est la probabilité invariante de (1).

Simulations

La fonction de répartition F_n de ν_n vérifie $F_n = T_a(F_{n-1})$. Si, par ailleurs, ν_{-1} admet une densité, alors ν_n admet une densité f_n et $f_n = \frac{1}{a}T_a(f_{n-1})$. L'itération de ces formules est à la base des programmes informatiques réalisés par Michel Delasnerie pour représenter le graphe des fonctions F_n et f_n . Les figures données ici sont obtenues pour différentes valeurs de a et différentes valeurs de n lorsque X_{-1} suit une loi uniforme sur $[0, 1]$. Pour en comprendre la diversité il faut lire les sections suivantes.

Loi des types purs

Rappelons qu'une mesure ν sur \mathbb{R} de fonction de répartition $F(t) = \nu(-\infty, t]$ est dite *absolument continue*, si $F(t) = \int_{-\infty}^t f(u)du$ où f est une fonction positive intégrable (appelée densité) ; et *singulière* si il existe un ensemble $N \subset \mathbb{R}$ de mesure de Lebesgue nulle et tel que $\nu(\mathbb{R} \setminus N) = 0$. En général, une mesure ν sur \mathbb{R} peut toujours s'écrire de manière unique sous la forme $\nu = \nu_{ac} + \nu_s$ où ν_{ac} est absolument continue et ν_s est singulière (éventuellement nulle).

Dans les années 30, le mathématicien Wintner et ses collaborateurs ont cherché à décrire le type de ν^a . Jessen et Wintner démontrent en 1935 le résultat suivant.

Proposition 2 [Jessen et Wintner, 1935]. *La fonction F_a est continue. De plus, la mesure ν^a est absolument continue ou bien continue singulière.*

La seconde partie de cette proposition est une conséquence directe de la proposition 1. En effet, l'opérateur T^a laissant invariant les mesures absolument continues et les mesures singulières, les parties ν_{ac}^a et ν_s^a sont des points fixes de T^a , et par unicité, une de ces parties doit être nulle.

Les escaliers du diable : $a < \frac{1}{2}$

Pour $a < \frac{1}{2}$, $Y_n(\theta)$ prend au plus 2^{n+1} valeurs distinctes et le reste $r_n = Y^a(\theta) - Y_n^a(\theta)$ a un module $\leq \frac{a^{n+1}}{a-1}$.

La mesure ν^a est donc concentrée sur une réunion d'intervalles dont la longueur totale $l_n = 2^{n+1}a^{n+1}/(1-a)$ tend vers zéro quand $n \rightarrow \infty$. Ainsi,

Proposition 3 [Kershner et Wintner, 1935]. *Pour $a < \frac{1}{2}$, ν^a est continue singulière. Plus précisément, le support de ν^a est un Cantor de mesure de Lebesgue nulle.*

La fonction F^a est donc un *escalier du diable* (voir l'encadré 1 et la figure 1).

Encadré 1

Escalier du diable

Un escalier du diable est une fonction continue croissante mais presque partout constante. Ce type de fonction a été découvert en 1885 par Ludwig Scheefer élève de Georg Cantor.

Les théorèmes d'Erdős et Solomyak : $a \geq \frac{1}{2}$

Pour $a = \frac{1}{2}$, il est facile de vérifier (en utilisant par exemple la proposition 1) que $\nu_{1/2}$ est la loi uniforme sur $I_{1/2}$. Pour $a \geq \frac{1}{2}$ le support de ν^a coïncide avec l'intervalle $I_a = \left[-\frac{1}{1-a}, \frac{1}{1-a}\right]$ et F^a est donc une fonction continue strictement croissante sur I^a . Par ailleurs, Wintner en 1935 prouve que F^a est dérivable de classe C^{k-1} pour $a = 2^{-1/k}$ et $k \geq 2$. Ces résultats pourraient laisser supposer que F^a est absolument continue pour $a \geq \frac{1}{2}$, mais Erdős en 1939 prouve le surprenant résultat suivant.

Théorème 1 [Erdős, 1939]. Soit $1 < g < 2$ un nombre de Pisot (voir encadré 2) et $a = 1/g$. Alors ν^a est singulière.

La figure 3 « illustre » ce théorème lorsque a est l'inverse du nombre d'or.

Encadré 2

Nombre de Pisot

Un nombre de Pisot g est un entier algébrique, c'est-à-dire la racine d'un polynôme unitaire à coefficients dans \mathbb{Z} , dont les conjugués (i.e les autres racines) g_2, \dots, g_m sont de module < 1 . Par exemple, le nombre d'or $g = (\sqrt{5} + 1)/2$ est un nombre de Pisot car c'est la racine du polynôme $X^2 - X - 1$ dont le conjugué $(1 - \sqrt{5})/2$ a un module < 1 .

De même les racines positives $\theta_1 \sim 1.32471$ de $X^3 - X - 1$ et $\theta_2 \sim 1.3802777$ de $X^4 - X^3 - 1$ sont des nombres de Pisot (ce sont d'ailleurs les seuls nombres de Pisot contenus dans $]1, \sqrt{2}[$).

Une propriété remarquable des nombres de Pisot est que leurs puissances s'approchent exponentiellement vite des entiers. En effet, l'expression $g^n + g_2^n + \dots + g_m^n$ est un polynôme symétrique des racines et peut donc s'écrire comme un polynôme à coefficients dans \mathbb{Z} , des fonctions symétriques élémentaires. Ainsi $g^n + g_2^n + \dots + g_m^n \in \mathbb{Z}$ et

$$\text{dist}(g^n, \mathbb{Z}) \leq \rho^n \tag{5}$$

pour un certain $0 < \rho < 1$.

Encadré 3

La preuve du théorème d'Erdős

Soit

$$\Phi_t(Y^a) = \mathcal{E}(e^{itY^a}) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \nu^a(dx) = \prod_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2} (e^{ita^k} + e^{-ita^k}) = \prod_{k=0}^{\infty} \cos(ta^k)$$

la fonction caractéristique de Y^a (i.e la transformée de Fourier de ν^a). La preuve du théorème d'Erdős consiste à montrer que $\Phi_t(Y^a)$ ne converge pas vers 0 quand $t \rightarrow \infty$, car d'après le lemme de Riemann-Lebesgue, la transformée de Fourier d'une mesure absolument continue tend vers zéro en l'infini. Pour $a = 1/g$ et $t(n) = \pi g^n$,

$$\Phi_{t(n)}(Y^a) = \prod_{k=0}^{\infty} \cos(g^{n-k}\pi) = \prod_{k=0}^n \cos(g^k\pi) C, \quad \text{où } C = \prod_{k=1}^{\infty} \cos(a^k\pi).$$

D'après (5) $|\cos(g^k\pi) - 1| \leq \pi \rho^k$. D'où

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\Phi_{t(n)}(Y^a)| = |C| \prod_{k=0}^{\infty} |\cos(g^k\pi)| > 0.$$

Le problème d'Erdős et le théorème de Solomyak

Soit $S \subset]\frac{1}{2}, 1[$ l'ensemble des valeurs de a pour lesquelles ν^a est singulière. Le théorème d'Erdős pose le problème de la description de S . En 1940 Erdős prouve que $a \notin S$ pour presque tout $a \in]a^*, 1[$ pour un certain a^* proche de 1. Kahane et Salem en 1958 obtiennent un critère assurant que ν^a possède une densité L^2 . En 1962

Garsia prouve que $a \notin S$ si a est l'inverse d'un entier algébrique (voir encadré 2) dont les conjugués ont un module > 1 et tel que le terme constant du polynôme unitaire soit 2 ou -2 . Un tel polynôme étant par exemple $x^{n+p} - x^n - 2$ avec $p, n \geq 1$ et $\max p, n \geq 2$. Dans le même travail, Garsia conjecture que S est de mesure nulle, mais il faudra attendre 1995 pour que cette conjecture soit prouvée par Solomyak.

Théorème 2 [Solomyak, 1995]. S est de mesure de Lebesgue nulle.

A ce jour, on ne sait toujours pas si S contient des points qui ne sont pas des inverses de nombres de Pisot.

Encadré 4

La preuve du théorème de Solomyak

En 1996, Y. Peres et B. Solomyak ont proposé une preuve remarquablement courte du théorème de Solomyak dont voici l'idée générale. Soit

$$D^a(x) = \liminf_{r \rightarrow 0} \frac{1}{2r} \nu^a]x - r, x + r[.$$

Une application du théorème de recouvrement de Vitali montre que $a \notin S$ si et seulement si $D^a(x) < \infty$ pour ν^a presque tout x . Il suffit donc de prouver que $s = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{\mathbb{R}} D^a(x) \nu^a(dx) da < \infty$ pour en déduire que $\lambda(S \cap]\alpha, \beta[) = 0$ où λ désigne la mesure de Lebesgue. Par le lemme de Fatou, le théorème de la mesure image et le théorème de Fubini,

$$\begin{aligned} s &\leq \liminf_{r \rightarrow 0} \frac{1}{2r} \int_{\alpha}^{\beta} \int_{\mathbb{R}} \nu^a]x - r, x + r[\nu^a(dx) da = \liminf_{r \rightarrow 0} \frac{1}{2r} \int_{\alpha}^{\beta} \mathcal{P} \otimes \mathcal{P}(\{(\theta, \tilde{\theta}) \in \Omega^2 : |Y^a(\theta) - Y^a(\tilde{\theta})| < r\}) da \\ &= \liminf_{r \rightarrow 0} \frac{1}{2r} \int_{\Omega^2} \lambda(a \in]\alpha, \beta[: |Y^a(\theta) - Y^a(\tilde{\theta})| < r) d\mathcal{P}(\theta) d\mathcal{P}(\tilde{\theta}). \end{aligned}$$

Le terme $|Y^a(\theta) - Y^a(\tilde{\theta})|$ peut s'écrire sous la forme $2a^k |g(a)|$ où $k = |\theta \wedge \tilde{\theta}| = \min\{n : \theta_n \neq \tilde{\theta}_n\}$ et g est de la forme

$$g(a) = 1 + \sum_{n \geq 1} b_n a^n \tag{6}$$

avec $b_n \in \{-1, 0, 1\}$.

Supposons que pour un certain $\delta > 0$, toute fonction de la forme (6) vérifie la propriété, dite de δ -transversalité, suivante : $\forall a \in]\alpha, \beta[|g(a)| \leq \delta \Rightarrow g'(a) \leq -\delta$. Alors $\lambda(a \in]\alpha, \beta[: |g(a)| \leq r) \leq 2\delta^{-1}r$. Cette inégalité est tautologie pour $2r \geq \delta$ et une conséquence de la δ -transversalité pour $2r < \delta$. Ainsi, $\lambda(a \in]\alpha, \beta[: |Y^a(\theta) - Y^a(\tilde{\theta})| < r) \leq r(\delta \alpha^{\theta \wedge \tilde{\theta}})^{-1}$. D'où

$$s \leq (2\delta)^{-1} \int_{\Omega^2} (\alpha^{\theta \wedge \tilde{\theta}})^{-1} d\mathcal{P}(\theta) d\mathcal{P}(\tilde{\theta}) = (2\delta)^{-1} \sum_k \alpha^{-k} \mathcal{P} \otimes \mathcal{P}(\theta \wedge \tilde{\theta} = k) = (2\delta)^{-1} \sum_k (2\alpha)^{-k} < \infty$$

car $2\alpha < 1$ et, donc $\lambda(S \cap]\alpha, \beta[) = 0$.

L'étape suivante de la preuve de Peres et Solomyak consiste à prouver la propriété de δ -transversalité sur l'intervalle $[2^{-1}, 2^{-2/3}]$, puis, par un argument similaire, à couvrir l'intervalle $[2^{-2/3}, 2^{-1/2}]$. Pour conclure, il suffit de remarquer que, ν_a étant la convolution de ν_{a^2} avec une autre mesure, l'absolue continuité de ν_{a^2} entraîne celle de ν_a . Ce qui permet de couvrir tout l'intervalle $[2^{-1}, 1[$ à partir de $[2^{-1}, 2^{-1/2}]$.

Pour en savoir plus

Ce texte est inspiré du chapitre 1 du livre de

BENAÏM (M.), EL KAROUI (N.), *Promenade Aléatoire*, éditions de l'école polytechnique, ISBN 2-7302-1168-3 (2004).

Pour plus de détails, de nombreux développements et d'autres références le lecteur intéressé pourra consulter l'article de revue de

PERES (Y.), SCHLAG (W.), SOLOMYAK (B.), « Sixty years of Bernoulli convolutions, » in *fractal geometry and stochastic II*, **46**, 39-65, Prog. Prob. Birkhauser, Basel, (2000).

Remerciements

Je remercie Michel Delasnerie qui a réalisé les programmes à l'origine des figures ainsi que Francois Ledrappier et Christophe Leuridan pour d'utiles commentaires.