MORPHISME DE BAUM-CONNES TORDU PAR UNE REPRÉSENTATION NON UNITAIRE

MARIA PAULA GOMEZ-APARICIO

Résumé. Soit G un groupe localement compact et ρ une représentation de dimension finie de G non unitaire. On définit des algèbres de Banach analogues aux C^*-algèbres de groupe, $C^*(G)$ et $C^*_r(G)$, en considérant l'ensemble des représentations de la forme $\rho\otimes\pi$, où π parcourt un ensemble de représentations unitaires de G. On calcule la K-théorie de ces algèbres pour une large classe de groupes vérifiant la conjecture de Baum-Connes.

Abstract. Let G be a locally compact group and ρ a non-unitary finite dimensional representation of G. We consider tensor products of ρ by some unitary representations of G in order to define two Banach algebras analogous to the group C^*-algebras, $C^*(G)$ and $C^*_r(G)$. We calculate the K-theory of such algebras for a large class of groups satisfying the Baum-Connes conjecture.

Table des matières

2000 *Mathematics Subject Classification.* 22D12, 22D15, 46L80, 19K35.
Key words and phrases. Non-unitary representations, Banach algebras, Baum-Connes conjecture.

Introduction

Soit G un groupe localement compact et ρ une représentation de dimension finie de G. Dans [GA07b], nous avons défini un analogue tordu par ρ de la C^*-algèbre maximale de G, que l'on note $\mathcal{A}^\rho(G)$, en considérant la complétion de l'espace des fonctions continues à support compact sur G, que l'on note $C_c(G)$, pour la norme

$$\|f\| = \sup_{(\pi,H)} \|(\pi \otimes \rho)(f)\|_{\mathcal{L}(H\otimes V)},$$

pour $f \in C_c(G)$ et où le supremum est pris parmi les représentations unitaires de G. Ces algèbres de groupe *tordues* sont des algèbres de Banach ; ce sont des C^*-algèbres si et seulement si ρ est unitaire. Elles apparaissaient alors de façon très naturelle dans l'étude du comportement de ρ dans l'ensemble des représentations de G de la forme $\rho \otimes \pi$, avec π unitaire. En effet, nous avons alors défini un renforcement de la propriété (T) de Kazhdan [Kaz67] en termes d'idempotents dans $\mathcal{A}^\rho(G)$ qui nous a permis de montrer que, pour la plupart des groupes de Lie semi-simples réels ayant la propriété (T), toute représentation irréductible de dimension finie ρ est isolée dans l'ensemble des représentations de la forme $\rho \otimes \pi$, où π parcourt l'ensemble des représentations unitaires et irréductibles de G.

D'autre part, dans le même article, nous avons aussi défini un analogue tordu de la C^*-algèbre réduite de G, noté $\mathcal{A}^\rho_r(G)$, en considérant la norme sur $C_c(G)$ donnée par la formule

$$\|f\| = \|(\lambda_G \otimes \rho)(f)\|_{\mathcal{L}(L^2(G)\otimes V)},$$

où λ_G est la représentation régulière gauche de G. Nous avons alors montré que si le groupe G est non-compact et a la propriété (T) tordue définie dans [GA07b], ces deux algèbres tordues n'ont pas la même K-théorie. Lorsque ρ est unitaire, ceci est un résultat classique : dans ce cas les algèbres tordues coïncident avec les C^*-algèbres de groupe $C^*(G)$ et $C^*_r(G)$, respectivement, et la propriété (T) tordue coïncide avec la propriété (T) de Kazhdan. C'est un résultat connu qui dit que si un groupe non-compact G a la propriété (T), alors $C^*(G)$ et $C^*_r(G)$ n'ont pas la même K-théorie, ce qui a d'ailleurs constitué pendant longtemps une barrière pour la vérification de la conjecture de Baum-Connes pour des groupes infinis discrets ayant la propriété (T) (cf. [Jul97]).

Le but de cet article est de calculer la K-théorie des algèbres tordues pour une large classe de groupes vérifiant la conjecture de Baum-Connes. Pour ceci, nous allons construire deux morphismes *tordus*, μ_ρ et $\mu_{\rho,r}$, qui vont du membre de gauche du morphisme de Baum-Connes dans la K-théorie des algèbres tordues et qui coïncident avec les morphismes de Baum-Connes classiques, μ et μ_r, si ρ est unitaire. Les algèbres tordues étant des algèbres de Banach, notre outil principal sera la KK-théorie banachique de Lafforgue (cf. [Laf02b]). Nous allons alors montrer que les algèbres tordues se comportent de la même façon que $C^*(G)$ et $C^*_r(G)$ au niveau de la K-théorie.

On rappelle que la conjecture de Baum-Connes propose une façon de calculer la K-théorie de $C^*(G)$ pour tout groupe localement compact G (cf. [BCH94]). Plus précisément, Baum, Connes et Higson ont défini un morphisme d'assemblage

$$\mu_r : K^{\mathrm{top}}(G) \to K(C^*_r(G)),$$

où $K^{\mathrm{top}}(G)$ est la K-homologie G-équivariante à support compact du classifiant universel pour les actions propres de G, noté $\underline{E}G$. Ce morphisme, appelé désormais *morphisme de Baum-Connes*, peut être défini à l'aide de la KK-théorie équivariante de Kasparov (cf. [Kas88]). La conjecture de Baum-Connes affirme que μ_r est un isomorphisme pour tout groupe localement compact G.

La méthode la plus puissante pour montrer la conjecture de Baum-Connes, appelée de façon générale méthode du "dual Dirac-Dirac" a été introduite par Kasparov dans son preprint de 1981 (publié après dans [Kas88]) pour démontrer la conjecture de Novikov dans le cas des variétés dont le groupe fondamental est un sous-groupe discret d'un groupe de Lie connexe. Elle a été ensuite énoncée dans une forme très générale par Tu (cf. [Tu99]) qui consiste à construire un élément de "Dirac" d dans $KK_G(A,\mathbb{C})$ et un élément "dual-Dirac" η dans $KK_G(\mathbb{C},A)$, pour A une G-C^*-algèbre propre, tels que, si on considère l'élément de $KK_G(\mathbb{C},\mathbb{C})$ défini par la formule $\gamma := \eta \otimes_A d$, où $\otimes_A$ denote le produit de Kasparov au-dessus de A, alors γ doit agir par l'identité sur $K^{\mathrm{top}}(G)$; plus précisément, on demande que $p^*(\gamma) = 1$ dans $KK_{G\ltimes \underline{E}G}(C_0(\underline{E}G), C_0(\underline{E}G))$, où $p : \underline{E}G \to \{pt\}$ est la projection de $\underline{E}G$ sur le point. Un élément γ avec ces propriétés est appelé "élément γ de Kasparov". Tu a montré que si un élément γ de Kasparov existe, alors le morphisme de Baum-Connes μ_r est injectif. Si de plus $\gamma = 1$ dans $KK_G(\mathbb{C},\mathbb{C})$, alors μ_r est un isomorphisme.

Par ailleurs, on peut aussi construire un morphisme

$$\mu : K^{\mathrm{top}}(G) \to K(C^*(G)),$$

(cf. [BCH94]). Les résultats de Tu impliquent que s'il existe un élément $\gamma = 1$ dans $KK_G(\mathbb{C},\mathbb{C})$ comme ci-dessus, alors μ est aussi un isomorphisme (cf. [Tu99]).

Dans [Kas88], Kasparov a utilisé la méthode originale pour montrer l'injectivité de μ_r (et donc la conjecture de Novikov) pour tout groupe de Lie semi-simple et pour tout sous-groupe fermé d'un groupe de Lie semi-simple. Depuis, un élément γ de Kasparov a été construit, par exemple, par Kasparov et Skandalis et puis par Higson et Kasparov, pour une classe très vaste de groupes, notée $\mathcal{C}$ dans [Laf02b]. Nous rappelons ici, par souci de commodité pour le lecteur, que cette classe est constituée par les groupes suivants :

– les groupes localement compacts agissant de façon continue, propre et isométrique sur une variété riemannienne complète simplement connexe à courbure sectionnelle négative ou nulle (cf. [Kas88]), ou sur un immeuble de Bruhat-Tits affine (cf. [KS91]),
– les groupes discrets agissant proprement et par isométries sur un espace métrique faiblement géodésique, faiblement bolique et de géométrie co-uniforme bornée (cf. [KS03] et [Tza00] pour la terminologie co-uniforme),
– les groupes localement compacts a-T-menables, c'est-à-dire qui agissent de façon affine, isométrique et propre sur un espace de Hilbert (cf. [HK01]).

La classe $\mathcal{C}$ contient, en particulier, tous les groupes moyennables, tous les groupes hyperboliques au sens de Gromov et tous les groupes p-adiques.
Dans [JK95], Julg et Kasparov ont aussi prouvé l'égalité $\gamma = 1$ dans $KK_G(\mathbb{C}, \mathbb{C})$, et donc la bijectivité du morphisme de Baum-Connes, pour $SU(n, 1)$. Higson et Kasparov ont ensuite généralisé leur résultat pour tous les groupes a-T-menables (cf. [HK01]).

Revenons maintenant aux algèbres de groupe tordues. Pour tout groupe localement compact (et dénombrable à l'infini) et pour toute représentation ρ de dimension finie, nous allons construire deux morphismes

$$\mu_\rho : K^{\mathrm{top}}(G) \to K(\mathcal{A}^\rho(G)) \quad \text{et} \quad \mu_{\rho,r} : K^{\mathrm{top}}(G) \to K(\mathcal{A}^\rho_r(G)).$$

Nous allons ensuite montrer que μ_ρ et $\mu_{\rho,r}$ sont des isomorphismes pour tout groupe localement compact pour lequel il existe un élément γ de Kasparov qui est égal à 1 dans $KK_G(\mathbb{C}, \mathbb{C})$. Plus précisément, nous allons montrer les deux théorèmes suivants. On rappelle que

$$K^{\mathrm{top}}(G) = \varinjlim KK_G(C_0(Y), \mathbb{C}),$$

où la limite inductive est prise parmi les parties Y G-compactes de $\underline{E}G$.

Théorème 0.1. *Supposons que pour toute partie G-compacte Y de $\underline{E}G$, il existe une G-C^*-algèbre propre B et $\eta \in KK_G(\mathbb{C}, B)$ et $d \in KK_G(B, \mathbb{C})$ tels que $\gamma = \eta \otimes_B d \in KK_G(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ vérifie $p^*(\gamma) = 1$ dans $KK_{G \ltimes Y}(C_0(Y), C_0(Y))$, où p est la projection de Y vers le point, si bien que γ agisse par l'identité sur $K^{\mathrm{top}}(G)$. Alors, pour toute représentation ρ de dimension finie, les morphismes μ_ρ et $\mu_{\rho,r}$ sont injectifs.*

Théorème 0.2. *Soit G un groupe localement compact tel qu'il existe une G-C^*-algèbre propre B, et des éléments $\eta \in KK_G(\mathbb{C}, B)$ et $d \in KK_G(B, \mathbb{C})$ tels que si on pose $\gamma = \eta \otimes_B d \in KK_G(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ on a $\gamma = 1$. Alors, pour toute représentation ρ de dimension finie de G, μ_ρ et $\mu_{\rho,r}$ sont des isomorphismes.*

Ceci implique en particulier que μ_ρ et $\mu_{\rho,r}$ sont injectifs pour tout groupe appartenant à la classe $\mathcal{C}$ et ce sont des isomorphismes pour tout groupe a-T-menable. Dans ce cas, les algèbres $\mathcal{A}^\rho(G)$, $\mathcal{A}^\rho_r(G)$, $C^*(G)$ et $C^*_r(G)$ ont donc toutes la même K-théorie.

Dans un autre article (cf. [GA08]), qui fait partie de [GA07a], nous montrerons que $\mu_{\rho,r}$ est un isomorphisme pour tout groupe ayant la propriété (RD) et appartenant à une sous-classe de $\mathcal{C}$, notée $\mathcal{C}'$ par Lafforgue (cf. [Laf02b, Introduction]). En particulier, on obtiendra la bijectivité du morphisme $\mu_{\rho,r}$ pour tout groupe de Lie réductif réel, pour tout groupe hyperbolique et pour tous les sous-groupes discrets et cocompacts de $SL_3(F)$, où F est un corps local, de $SL_3(\mathbb{H})$ et de $E_{6(-26)}$ (cf. [Laf00], [Cha03]). Le morphisme de Baum-Connes tordu $\mu_{\rho,r}$ est alors un isomorphisme pour la plupart des groupes pour lesquels on sait montrer que le morphisme de Baum-Connes classique l'est. De plus, la bijectivité du morphisme tordu ne semble pas être plus facile à démontrer que la conjecture de Baum-Connes elle-même, l'algèbre tordue $\mathcal{A}^\rho_r(G)$, à différence des complétions inconditionnelles introduites par Lafforgue, n'étant pas plus stable que $C^*_r(G)$ par le produit de Schur ([Laf02a]). Cependant, on va montrer (cf. propostion 1.5) que les algèbres tordues peuvent être très "petites", c'est-à-dire contenues dans des algèbres L^1 qui sont des complétions inconditionnelles (cf. [Laf02b]). Ceci nous fait croire que la conjecture de Baum-Connes est fortement liée à la bijectivité du morphisme tordu et on peut espérer que les deux soient vérifiées toujours au même temps. On rappelle que Higson, Lafforgue et Skandalis dans [HLS02] ont donné un contre-exemple à la généralisation de la conjecture de Baum-Connes aux actions de groupe (connue comme la conjecture de Baum-Connes à coefficients), ce qui nous laisse penser que le morphisme tordu ne doit pas être un isomorphisme pour tous les groupes localement compacts ; mais on peut espèrer que ça soit le cas pour tous les groupes de la classe $\mathcal{C}$.
Dans le cas des groupes abéliens, les algèbres tordues avaient déjà étés considérées par Bost dans le cadre du principe d'Oka (cf. [Bos90]).

Remerciements. Ce travail fait partie des travaux présentés pour l'obtention de mon Doctorat réalisé sous la direction de Vincent Lafforgue. Je tiens à le remercier pour sa grande disponibilité et ses suggestions. Je remercie aussi Georges Skandalis pour ses éclaircissements et ses conseils et Hervé Oyono-Oyono pour ses commentaires.

1. Algèbres de groupe tordues

1.1. **Définitions et propriétés principales.** Soit G un groupe localement compact et soit dg une mesure de Haar à gauche sur G. On note Δ la fonction modulaire de G (c'est-à-dire que $dg^{-1} = \Delta(g)^{-1}dg$ pour tout $g \in G$).
Soit A une G-C^*-algèbre. Pour tout $g \in G$ et pour tout $a \in A$, on note $g.a$, ou $g(a)$, l'action de g sur a. On considère alors l'espace vectoriel des fonctions continues à support compact sur G et à valeurs dans A, que l'on note $C_c(G, A)$, muni de la structure d'algèbre involutive dont la multiplication est donnée par

$$(f_1 * f_2)(g) = \int_G f_1(g_1)g_1(f_2(g_1^{-1}g))dg_1,$$

pour $f_1, f_2 \in C_c(G, A)$ et l'involution par

$$f^*(g) = g(f(g^{-1}))^*\Delta(g^{-1}),$$

pour $f \in C_c(G, A)$ et $g \in G$. De façon générale, on représente tout élément f de $C_c(G, A)$ par l'intégrale formelle $\int_G f(g)e_g dg$, où e_g est une lettre formelle satisfaisant le conditions suivantes

$$e_g e_{g'} = e_{gg'}, \quad e_g^* = (e_g)^{-1} = e_{g^{-1}} \quad \text{et} \quad e_g a e_g^* = g.a,$$

pour tous $g, g' \in G$ et pour tout $a \in A$.

On note $C^*(G, A)$ et $C_r^*(G, A)$ les produits croisés, maximal et réduit respectivement, de G et A. De plus, on note

$$L^2(G, A) = \{f \in C_c(G, A) | \int_G f(g)^* f(g)dg \text{ converge dans } A\},$$

et $\lambda_{G,A}$ la représentation régulière gauche de $C_c(G, A)$ dans $L^2(G, A)$ donnée par la formule

$$\lambda_{G,A}(f)(h)(t) = \int_G t^{-1}(f(s))h(s^{-1}t)ds,$$

pour $f \in C_c(G, A)$, $h \in L^2(G, A)$ et $t \in G$. On rappelle que $\lambda_{G,A}$ induit un unique morphisme de C^*-algèbres de $C^*(G, A)$ dans $C_r^*(G, A)$ que l'on note encore $\lambda_{G,A}$ par abus de notation.

Tout le long de l'article, une représentation ρ de dimension finie de G sera une représentation de G sur un espace vectoriel complexe de dimension finie, muni d'une structure hermitienne. On note (ρ, V) toute représentation de G sur un espace V pour simplifier les notations et quand on veut préciser l'espace sur lequel G agit. Le produit tensoriel de C^*-algèbres sera toujours le produit tensoriel minimal.

Soit (ρ, V) une représentation de dimension finie de G. On considère alors l'application

$$C_c(G,A) \to C_c(G,A) \otimes \mathrm{End}(V)$$
$$\int_G f(g)e_g dg \mapsto \int_G f(g)e_g \otimes \rho(g)dg.$$

Elle nous permet de donner la définition de *produits croisés tordus* suivante. Soit $C^*(G,A) \otimes \mathrm{End}(V)$ (resp.$C^*_r(G,A) \otimes \mathrm{End}(V)$) le produit tensoriel minimal de C^*-algèbres.

Définition 1.1. Le *produit croisé tordu par* ρ (resp. *produit croisé tordu réduit*), noté $A \rtimes^\rho G$ (resp. $A \rtimes^\rho_r G$), est le complété-séparé de $C_c(G,A)$ pour la norme

$$\| \int_G f(g)e_g dg\|_{A\rtimes^\rho G} = \| \int_G f(g)e_g \otimes \rho(g)dg\|_{C^*(G,A)\otimes\mathrm{End}(V)},$$

(resp. $\|.\|_{C^*_r(G,A)\otimes\mathrm{End}(V)}$).
Si $A = \mathbb{C}$, alors on note

$$\mathcal{A}^\rho(G) := \mathbb{C} \rtimes^\rho G \quad \text{et} \quad \mathcal{A}^\rho_r(G) := \mathbb{C} \rtimes^\rho_r G.$$

On a alors la proposition suivante

Proposition 1.2. *Les produits croisés tordus $A \rtimes^\rho G$ et $A \rtimes^\rho_r G$ sont des algèbres de Banach. Ce sont des C^*-algèbres si et seulement si ρ est une représentation unitaire. Dans ce cas, $A \rtimes^\rho G = C^*(G,A)$ et $A \rtimes^\rho_r G = C^*_r(G,A)$, à équivalence de norme près.*

Démonstration. Il est clair que ce sont des algèbres de Banach. On va montrer qu'elles coïncident avec les produits croisés C^*-algébriques si et seulement si ρ est unitaire dans le cas où $A = \mathbb{C}$, le cas général étant analogue. Supposons que ρ soit une représentation unitaire de G. Par définition, si $f \in C_c(G)$ alors

$$\|f\|_{\mathcal{A}^\rho(G)} = \sup_{(\pi,H)} \|(\pi \otimes \rho)(f)\|_{\mathcal{L}(H\otimes V)},$$

où le supremum est pris parmi les représentations unitaires de G.
Alors on a trivialement l'inégalité de normes $\|.\|_{\mathcal{A}^\rho(G)} \leq \|.\|_{C^*(G)}$ de sorte que $\mathcal{A}^\rho(G)$ est un quotient de $C^*(G)$. Soit (ρ^*, V^*) la représentation contragrédiente de G sur l'espace dual V^* de V. Donc, comme $(V^* \otimes V)^G = \mathrm{Hom}_G(V,V)$, la représentation triviale 1_G de G est fortement contenue dans $\rho^* \otimes \rho$. Ceci implique que toute représentation unitaire π est fortement contenue dans $\pi \otimes \rho^* \otimes \rho$, et donc que toute représentation unitaire π est fortement contenue dans l'ensemble $\{\sigma \otimes \rho |\ \sigma \text{ une représentation unitaire}\}$. D'où $\|.\|_{C^*(G)} \leq \|.\|_{\mathcal{A}^\rho(G)}$ et $C^*(G) = \mathcal{A}^\rho(G)$, à équivalence de norme près.
D'autre part, pour $f \in C_c(G)$,

$$\|f\|_{\mathcal{A}^\rho_r(G)} = \|(\lambda_G \otimes \rho)(f)\|_{\mathcal{L}(L^2(G)\otimes V)},$$

où $\lambda_G : G \to \mathcal{L}(L^2(G))$ est la représentation régulière gauche de G. Dans ce cas, le résultat vient du fait que la représentation régulière de G est “absorbante” : la représentation $\lambda_G \otimes \rho$ est unitairement équivalente à $\lambda_G \otimes \mathrm{Id}_G$, où on note Id_G la représentation triviale G sur V ; l'opérateur d'entrelacement entre ces deux représentations est donné par l'application

$$\begin{aligned} L^2(G,V) &\to L^2(G,V) \\ f &\mapsto \big(g \mapsto f(g)\rho(g^{-1})\big), \end{aligned}$$

(en identifiant $L^2(G) \otimes V$ avec $L^2(G,V)$). Il est facile de vérifier que, $T(\lambda_G \otimes \rho)(g) = (\mathrm{Id}_G \otimes \lambda_G)(g)T$, pour tout $g \in G$.

□

Remarque 1.3. (1) Il est clair que $\lambda_{G,A}$ induit un unique morphisme d'algèbres de Banach

$$\lambda^\rho_{G,A} : A \rtimes^\rho G \to A \rtimes^\rho_r G.$$

(2) Si on choisit une autre norme sur V, comme deux normes sur V sont toujours équivalentes, on obtient alors une norme équivalente sur $A \rtimes^\rho G$. En particulier, si G est un groupe compact, comme toute représentation de G sur un espace de Hilbert est unitarisable, alors $A \rtimes^\rho G = C^*(G,A)$, à équivalence de norme près. De même dans le cas de $A \rtimes^\rho_r G$.

(3) Soit ρ^* la représentation contragrédiente de ρ sur l'espace dual V^* de V. Si ρ et ρ^* sont conjuguées par un opérateur unitaire de V dans V^*, alors $\mathcal{A}^\rho(G)$ et $\mathcal{A}^\rho_r(G)$ sont des algèbres involutives.

Exemple 1.4. Soit $G = \mathbb{Z}$ et soit $\rho : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ un caractère de $\mathbb{Z}$. Soit S^ρ le cercle dans $\mathbb{C}$ de rayon $|\rho(1)|$. Alors $\mathcal{A}^\rho_r(G)$ est l'algèbre des fonctions continues sur S^ρ.

La proposition suivante montre que les algèbres tordues peuvent être “petites”, c'est-à-dire contenues dans des algèbres L^1.

Proposition 1.5. *Soit Γ est un groupe discret et ρ une représentation de Γ sur un espace vectoriel de dimension finie V muni d'une norme hermitienne et telle que $\sum\limits_\gamma \frac{1}{\|\rho(\gamma)\|_{\mathrm{End}(V)}}$ converge. Alors, pour toute Γ-C^*-algèbre A,*

$$A \rtimes^\rho_r (\Gamma) \subset l^1(\Gamma, A) \subset C^*_r(\Gamma, A).$$

Démonstration. Soit A une Γ-C^*-algèbre. Supposons d'abord par simplicité que A est unifère et notons 1_A son unité. Soit $\lambda_{\Gamma,A}$ la représentation régulière gauche de $C^*_r(\Gamma, A)$ dans $l^2(\Gamma, A)$. On note δ l'élément de $l^2(\Gamma, A)$ qui envoie l'identité e de Γ vers 1_A et qui est nulle sur $\gamma \neq e$. Soit $f \in C_c(\Gamma, A)$ que l'on note sous la forme $\sum\limits_\gamma f(\gamma)e_\gamma$. On a alors que

$$\|\lambda_{\Gamma,A}(f)\delta\|_{l^2(\Gamma,A)} \leq \|\sum_\gamma f(\gamma)e_\gamma\|_{C^*_r(\Gamma,A)},$$

par défintion de $C_r^*(\Gamma, A)$. Or,

$$\begin{aligned}\|\sum_{\gamma} f(\gamma)e_\gamma\|_{l^2(\Gamma,A)} &= \|\sum_{\gamma} \gamma^{-1}\big(f(\gamma)^* f(\gamma)\big)\|_A^{\frac{1}{2}} \\ &= \|\lambda_{\Gamma,A}(f)\delta\|_{l^2(\Gamma,A)},\end{aligned}$$

donc, l'application

$$\begin{aligned}\phi : C_c(\Gamma, A) &\to C_c(\Gamma, A) \\ \sum_{\gamma} f(\gamma)e_\gamma &\mapsto \sum_{\gamma} e_\gamma \gamma^{-1}(f(\gamma)),\end{aligned}$$

se prolonge en une application continue injective de $C_r^*(\Gamma, A)$ dans $l^2(\Gamma, A)$ de norme inférieure ou égale à 1.
De plus,

$$\begin{aligned}\|\sum_{\gamma} \gamma^{-1}\big(f(\gamma)^* f(\gamma)\big)\|_A^{\frac{1}{2}} &\geq \sup_{\gamma\in\Gamma} \|\gamma^{-1}\big(f(\gamma)^* f(\gamma)\big)\|_A^{\frac{1}{2}} \\ &\geq \sup_{\gamma\in\Gamma} \|f(\gamma)^* f(\gamma)\|_A^{\frac{1}{2}} \\ &\geq \sup_{\gamma\in\Gamma} \|f(\gamma)\|_A,\end{aligned}$$

donc $\|f\|_{l^\infty(\Gamma,A)} \leq \|f\|_{l^2(\Gamma,A)}$, où $l^\infty(\Gamma, A)$ est le complété de $C_c(\Gamma, A)$ pour la norme

$$\|f\| = \sup_{\gamma\in\Gamma} \|f(\gamma)\|_A,$$

pour $f \in C_c(\Gamma, A)$. Donc, ϕ se prolonge en une application injective de $C_r^*(\Gamma, A)$ dans $l^\infty(\Gamma, A)$ qui est de norme inférieure ou égale à 1.
Soit $l^{\infty,\rho}(\Gamma, A)$ le complété de $C_c(\Gamma, A)$ pour la norme

$$\|f\| = \sup_{\gamma\in\Gamma} \|f(\gamma)\|_A \|\rho(\gamma)\|_{\mathrm{End}(V)}.$$

Comme $A \rtimes_r^\rho \Gamma$ et $l^{\infty,\rho}(\Gamma, A)$ s'envoient de façon isométrique dans $C_r^*(\Gamma, A) \otimes \mathrm{End}(V)$ et dans $l^\infty(\Gamma, A) \otimes \mathrm{End}(V)$ respectivement, on a que pour toute $f \in C_c(\Gamma, A)$

$$\|f\|_{l^{\infty,\rho}(\Gamma,A)} \leq \|f\|_{A\rtimes_r^\rho\Gamma}.$$

Soit C une constante positive telle que $\sum_{\gamma} \frac{1}{\|\rho(\gamma)\|} < C$. On a alors, pour tout $f \in C_c(\Gamma, A)$,

$$\begin{aligned}\|f\|_{l^1(\Gamma,A)} &= \sum_{\gamma} \|f(\gamma)\|_A \|\rho(\gamma)\| \frac{1}{\|\rho(\gamma)\|} \\ &\leq \big(\sup_{\gamma\in\Gamma} \|f(\gamma)\|_A \|\rho(\gamma)\|\big) \sum_{\gamma} \frac{1}{\|\rho(\gamma)\|} \\ &\leq C\|f\|_{l^{\infty,\rho}(\Gamma,A)} \\ &\leq C\|f\|_{A\rtimes_r^\rho\Gamma},\end{aligned}$$

donc, il existe une application continue de norme inférieure ou égale à 1 de $A \rtimes_r^\rho \Gamma$ dans $l^1(\Gamma, A)$ qui prolonge l'indentité sur $C_c(\Gamma, A)$.

Supposons maintenant que A n'est pas unifère. Soit $(u_i)_{i\in I}$ une unité approchée de A. Pour tout $i \in I$, soit δ_i la fonction sur Γ qui envoie l'identité de Γ sur u_i et telle que, pour tout élément γ de Γ différent de l'identité, $\delta_i(\gamma)$ est nul. Dans ce cas, pour tout $f \in C_c(\Gamma, A)$,

$$\lim_i \|\lambda_{\Gamma,A}(f)\delta_i\|_A = \|f\|_{l^2(\Gamma,A)},$$

et comme $\|\delta_i\|_{l^2(\Gamma,A)} \leq 1$, car $\|u_i\|_A \leq 1$,

$$\|f\|_{l^2(\Gamma,A)} \leq \|f\|_{C_r^*(\Gamma,A)},$$

ce qui implique que $C_r^*(\Gamma, A) \subset l^2(\Gamma, A)$. On alors que $C_r^*(\Gamma, A) \subset l^\infty(\Gamma, A)$ et la même démonstration que dans le cas unifère montre que s'il existe une constante $C > 0$ telle que $\sum\limits_\gamma \frac{1}{\|\rho(\gamma)\|} < C$, alors

$$A \rtimes_r^\rho \Gamma \subset l^1(\Gamma, A).$$

□

1.2. **Fonctorialité.** Le lemme suivant dit que la construction des produits croisés tordus est fonctorielle. Nous donnons d'abord la définition suivante

Définition 1.6. Soient B et C deux G-C^*-algèbres ρ une représentation de dimension finie de G et $\theta : B \to C$ un morphisme G-équivariant de C^*-algèbres. On note $\tilde{\theta}$ l'application linéaire continue de $C_c(G, B)$ dans $C_c(G, C)$ telle que pour tout $f \in C_c(G, B)$,

$$\tilde{\theta}(f)(g) = \theta(f(g)).$$

Lemme 1.7. *L'application $\tilde{\theta}$ se prolonge en un morphisme d'algèbres de Banach $\theta \rtimes^\rho G : B \rtimes^\rho G \to C \rtimes^\rho G$ (resp. $\theta \rtimes_r^\rho G : B \rtimes_r^\rho G \to C \rtimes_r^\rho G$).*

Démonstration. En effet,

$$\begin{aligned}
\|(\theta \rtimes^\rho G)(f)\|_{C\rtimes^\rho G} &= \| \int_G \theta(f(g))e_g \otimes \rho(g)dg\|_{C^*(G,C)\otimes \mathrm{End}(V)} \\
&\leq \|(C^*(G,\theta) \otimes \mathrm{Id}_V) \int_G f(g)e_g \otimes \rho(g)dg\|_{C^*(G,C)\otimes \mathrm{End}(V)} \\
&\leq \|C^*(G,\theta) \otimes \mathrm{Id}_V\|_{\mathrm{Hom}(C^*(G,B)\otimes \mathrm{End}(V), C^*(G,C)\otimes \mathrm{End}(V))} \|f\|_{B\rtimes^\rho G},
\end{aligned}$$

où $C^*(G, \theta) : C^*(G, B) \to C^*(G, C)$ est le morphisme induit par θ. Autrement dit, on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
C_c(G,B) \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{\theta}"] & B \rtimes^\rho G \arrow[r] & C^*(G,B) \otimes \mathrm{End}(V) \arrow[d, "C^*(G,\theta)\otimes \mathrm{Id}_V"] \\
C_c(G,C) \arrow[r] & C \rtimes^\rho G \arrow[r] & C^*(G,C) \otimes \mathrm{End}(V).
\end{tikzcd}$$

Il en est de même dans le cas du produit croisé tordu réduit. □

2. Morphisme de Baum-Connes tordu

Notre but est de calculer la K-théorie des produits croisés tordus. Soit $\underline{E}G$ l'espace classifiant pour les actions propres de G. Pour toute G-C^*-algèbre A, on note $K^{\mathrm{top}}(G,A)$ la K-homologie G-équivariante de $\underline{E}G$ à valeurs dans A introduite dans [BCH94]. Dans cette section, pour toute représentation ρ de dimension finie de G, nous allons construire deux morphismes de groupes :

$$\mu_\rho^A : K^{\mathrm{top}}(G,A) \to K(A \rtimes^\rho G) \quad \text{et} \quad \mu_{\rho,r}^A : K^{\mathrm{top}}(G,A) \to K(A \rtimes_r^\rho G).$$

2.1. **Flèche de descente tordue.** Soient G un groupe localement compact et (ρ, V) une représentation de dimension finie de G. Soient A et B deux G-C^*-algèbres. Dans [Kas88, Theorem 3.11], Kasparov a défini deux morphismes de descente, j^G et j_r^G, qui vont de $KK_G(A,B)$ dans $KK(C^*(G,A), C^*(G,B))$ et dans $KK(C_r^*(G,A), C_r^*(G,B))$, respectivement, et qui permettent de définir le morphisme de Baum-Connes en utilisant la KK-théorie de Kasparov. Nous allons ici définir deux morphismes de descente *tordus*

$$j_\rho : KK_G(A,B) \to KK^{\mathrm{ban}}(A \rtimes^\rho G, B \rtimes^\rho G),$$
$$j_{\rho,r} : KK_G(A,B) \to KK^{\mathrm{ban}}(A \rtimes_r^\rho G, B \rtimes_r^\rho G),$$

analogues à j^G et j_r^G. On remarque cependant que, comme $A \rtimes^\rho G$ et $B \rtimes^\rho G$ sont des algèbres de Banach, ces morphismes ont nécessairement une image dans la KK-théorie banachique de Lafforgue, notée KK^{ban}, et non pas dans la KK-théorie de Kasparov. La construction des morphismes tordus est analogue à la construction de la descente banachique dans le cas des complétions inconditionnelles [Laf02b, Section 1.5].

Notations. Introduisons d'abord quelques notations. Si A est une C^*-algèbre, on note $\tilde{A}$ son algèbre unitarisée.

On appelle longueur sur G toute fonction $\ell : G \to [0,+\infty[$ continue et telle que $\ell(g_1g_2) \leq \ell(g_1) + \ell(g_2)$, pour tout $g_1, g_2 \in G$.

Soient A et B deux G-C^* algèbres et soit E un G-(A,B)-bimodule de Kasparov (c'est-à-dire que E est un G-B-module hilbertien et A agit sur E par un morphisme G-équivariant de A dans $\mathcal{L}(E)$ cf. [Kas88]). On note $< .,. >: E \times E \to B$ la forme sesquilinéaire qui fait de E un B-module hilbertien. La norme sur E définie par

$$\|x\|_E = \|\langle x, x\rangle\|_B^{\frac{1}{2}},$$

fait de E un espace de Banach sur lequel G agit de façon continue. De plus, on a que $\|xb\|_E \leq \|x\|_E\|b\|_B$ et $\|gx\|_E \leq \|x\|_E$ pour tout $g \in G$, $b \in B$ et $x \in E$, donc E est un G-B-module de Banach à droite (cf.

[Laf02b, Section 1.1]).

On considère le G-B-module de Banach à gauche non-dégénéré déterminé par E, que l'on note $\overline{E}$, tel qu'il existe une isométrie $\mathbb{C}$-antilinéaire $* : E \to \overline{E}$ vérifiant $b^* x^* = (xb)^*$ pour $x \in E$ et $b \in B$. On définit alors un crochet $\langle .,. \rangle : \overline{E} \times E \to B$, que l'on note $\langle .,. \rangle$ par abus de notation, par la formule $\langle x^*, y \rangle = \langle x, y \rangle$ pour $x, y \in E$.

D'après [Laf02b, propostion 1.14], $(\overline{E}, E)$ est alors une G-B-paire et l'action G-équivariante de A sur E fait de $(\overline{E}, E)$ un G-(A,B)-bimodule de Banach. Si $T \in \mathcal{L}_B(E)$ l'application $\overline{T}^* = (*)T^*(*)^{-1}$ définit un élément de $\mathcal{L}_B(\overline{E})$.

Pour toute longueur ℓ sur le groupe G, on note ι l'application :

$$\iota : KK_G(A,B) \to KK^{\mathrm{ban}}_{G,\ell}(A,B),$$

définie dans [Laf02b, Section 1.6] et déterminée par l'application :

$$\begin{aligned} E_G(A,B) &\to E^{\mathrm{ban}}_{G,\ell}(A,B) \\ (E,T) &\mapsto \big((\overline{E}, E), (\overline{T}^*, T)\big), \end{aligned}$$

où on note $E_G(A,B)$ l'ensemble des cycles G-équivariants sur le couple (A,B) (cf. [Kas88], voir aussi [Ska91, Defintion 9.4]) et $E^{\mathrm{ban}}_{G,\ell}(A,B)$ est l'ensemble des classes d'isomorphisme de cycles banachiques (G,ℓ)-équivariants sur (A,B) (cf. [Laf02b, Définition 1.2.2]).

Si B est une algèbre de Banach, E est un B-module de Banach à droite et F est un B-module de Banach à gauche, on note $E \otimes^{\pi}_B F$ le produit tensoriel projectif de E et F au-dessus de B, c'est-à-dire le complété-séparé du produit tensoriel algébrique $E \otimes^{alg}_{\mathbb{C}} F$ pour la plus grande semi-norme $\|.\|$ telle que $\|x \otimes by - xb \otimes y\| = 0$ et $\|x \otimes y\| \leq \|x\| \, \|y\|$ pour $x \in E$, $y \in F$ et $b \in B$.

Si E et F sont deux B-paires, on note $\mathcal{L}_B(E,F)$ l'espace des morphismes de B-paires. Pour $\xi \in E^<$ et $y \in F^>$, on rappelle que l'on note $|y\rangle\langle\xi| \in \mathcal{L}_B(E,F)$ le morphisme de B-paires défini par

$$\begin{aligned} |y\rangle\langle\xi|^> : E^> &\to F^> \\ x &\mapsto y\langle\xi, x\rangle, \end{aligned} \quad \text{et} \quad \begin{aligned} |y\rangle\langle\xi|^< : F^< &\to E^< \\ \eta &\mapsto \langle\eta, y\rangle\xi. \end{aligned}$$

Un morphisme de B-paires de E dans F est compact s'il est limite dans $\mathcal{L}_B(E,F)$ de combinaisons linéaires de morphismes de la forme $|y\rangle\langle x|$ (cf. [Laf02b, Définition 1.1.3]). On note $\mathcal{K}_B(E,F)$ l'espace des morphismes compacts de E dans F.

On considère l'espace vectoriel $C_c(G,E)$ (resp. $C_c(G,\overline{E})$) des fonctions continues à support compact sur G à valeurs dans E (resp. à valeurs dans $\overline{E}$) et on note $x \in C_c(G,E)$ sous la forme $x = \int_G x(g) e_g dg$

(resp. $\xi \in C_c(G, \overline{E})$ sous la forme $\xi = \int_G e_g \xi(g) dg$).

Soient $C^*(G, E)$ et $C_r^*(G, E)$ les complétés de $C_c(G, E)$ définis comme dans [Kas88, Definition 3.8]. On considère alors le module hilbertien $C^*(G, E) \otimes \mathrm{End}(V)$ défini sur le produit tensoriel de C^*-algèbres $C^*(G, B) \otimes \mathrm{End}(V)$ et construit par produit tensoriel externe. De même, soit $C_r^*(G, E) \otimes \mathrm{End}(V)$ le $\big(C_r^*(G, B) \otimes \mathrm{End}(V)\big)$-module hilbertien.

Définition 2.1. On note $E \rtimes^\rho G$ (resp. $E \rtimes_r^\rho G$) l'adhérence de l'image de $C_c(G, E)$ dans $C^*(G, E) \otimes \mathrm{End}(V)$ (resp. $C_r^*(G, E) \otimes \mathrm{End}(V)$) par l'application

$$\begin{aligned} C_c(G, E) &\to C_c(G, E) \otimes \mathrm{End}(V) \\ \int_G x(g) e_g dg &\mapsto \int_G x(g) e_g \otimes \rho(g) dg. \end{aligned}$$

De même, on note $\overline{E} \rtimes^\rho G$ (resp. $\overline{E} \rtimes_r^\rho G$) l'adhérence de l'image de $C_c(G, \overline{E})$ dans $\overline{C^*(G, E)} \otimes \mathrm{End}(V)$ (resp. $\overline{C_r^*(G, E)} \otimes \mathrm{End}(V)$) par l'application

$$\begin{aligned} C_c(G, \overline{E}) &\to C_c(G, \overline{E}) \otimes \mathrm{End}(V) \\ \int_G e_g \xi(g) dg &\mapsto \int_G e_g \xi(g) \otimes \rho(g) dg. \end{aligned}$$

Nous allons maintenant définir une structure de $B \rtimes^\rho G$-paire (resp. $B \rtimes_r^\rho G$-paire) sur le couple $(\overline{E} \rtimes^\rho G, E \rtimes^\rho G)$ (resp. $(\overline{E} \rtimes_r^\rho G, E \rtimes_r^\rho G)$) que l'on note $E \rtimes^\rho G$ (resp. $E \rtimes_r^\rho G$) par abus de notation. On donne alors la définition suivante, qui est complètement analogue à la définition [Laf02b, Définition 1.5.3]

Définition 2.2. Soient $x = \int_G x(g) e_g dg$ dans $C_c(G, E)$, $\xi = \int_G e_g \xi(g) dg$ dans $C_c(G, \overline{E})$ et $b = \int_G b(g) e_g dg$ dans $C_c(G, B)$.
On pose

$$\begin{aligned} x.b &= \int_G \int_G x(t) t(b(t^{-1}g)) dt e_g dg, \\ b.\xi &= \int_G e_g \int_G g^{-1}(b(t)) \xi(t^{-1}g) dt dg, \\ \langle \xi, x \rangle &= \int_G \int_G t(\langle \xi(t), x(t^{-1}g) \rangle) dt e_g dg. \end{aligned}$$

Ceci définit une structure de $B \rtimes^\rho G$-paire (resp. $B \rtimes_r^\rho G$-paire) sur $(\overline{E} \rtimes^\rho G, E \rtimes^\rho G)$ (resp. $(\overline{E} \rtimes_r^\rho G, E \rtimes_r^\rho G)$).

Maintenant, comme on a supposé de plus que E est muni d'une structure de A-B-bimodule hilbertien, pour A une G-C^*-algèbre, on va montrer la proposition suivante

Proposition 2.3. *La paire $E \rtimes^\rho G$ (resp. $E \rtimes_r^\rho G$) est un $(A \rtimes^\rho G, B \rtimes^\rho G)$-bimodule (resp. $(A \rtimes_r^\rho G, B \rtimes_r^\rho G)$-bimodule) de Banach.*

Démonstration. Soit $a = \int_G a(g)e_g dg \in C_c(G, A)$. L'algèbre $C_c(G, A)$ agit sur $C_c(G, E)$ de la façon suivante

$$a.x = \int_G \int_G a(t)t(x(t^{-1}g))dte_g dg,$$
$$\xi.a = \int_G e_g \int_G (t^{-1}g)^{-1}(\xi(t)a(t^{-1}g))dtdg.$$

On doit montrer que, avec ces formules, $E \rtimes^\rho G$ est un $A \rtimes^\rho G$-module de Banach à gauche, $\overline{E} \rtimes^\rho G$ un $A \rtimes^\rho G$-module de Banach à droite, que ces structures commutent avec les structures de $B \rtimes^\rho G$-modules qui découlent de la définition précédente et que, pour tout élément a de $A \rtimes^\rho G$,

$$\langle \xi a, x\rangle = \langle \xi, ax\rangle,$$

pour tout $\xi \in \overline{E} \rtimes^\rho G$ et pour tout $x \in E \rtimes^\rho G$. Mais ceci découle immédiatement du fait que $\begin{pmatrix} A \rtimes^\rho G & E \rtimes^\rho G \\ \overline{E} \rtimes^\rho G & B \rtimes^\rho G \end{pmatrix}$ est un sous-espace de

$$\begin{pmatrix} C^*(G, A) & C^*(G, E) \\ \overline{C^*(G, E)} & C^*(G, B) \end{pmatrix} \otimes \ \mathrm{End}(V)$$

et que l'inclusion est une isométrie.
Le même raisonnement montre l'énoncé pour les produits croisés réduits.

□

Considérons maintenant un élément de $E_G(A, B)$ que l'on note (E, T). Soit

$$T \rtimes^\rho G : E \rtimes^\rho G \to E \rtimes^\rho G,$$

(resp. $T \rtimes^\rho_r G : E \rtimes^\rho_r G \to E \rtimes^\rho_r G$) le morphisme de $B \rtimes^\rho G$-paires (resp. $B \rtimes^\rho_r G$-paires) défini sur $x \in C_c(G, E)$ et sur $\xi \in C_c(G, \overline{E})$ de la façon suivante

$$(T \rtimes^\rho G)^> x(g) = T^>(x(g)),$$
$$(T \rtimes^\rho G)^< \xi(g) = T^<(\xi(g)),$$

(resp. $T \rtimes^\rho_r G$). Alors,

$$\|T \rtimes^\rho G\|_{\mathcal{L}(E \rtimes^\rho G)} \leq \|T\|_{\mathcal{L}(E)},$$

(de même pour le produit croisé réduit). Ces opérateurs sont analogues aux opérateurs $\mathcal{A}(G, T)$ et $\tilde{T}$ définis dans [Laf02b, Définition 1.5.3] et [Kas88, Theorem 3.11] respectivement.

Lemme 2.4. *L'élément* $(E \rtimes^\rho G, T \rtimes^\rho G)$ *(resp.* $(E \rtimes^\rho_r G, T \rtimes^\rho_r G)$*) ainsi défini appartient à* $E^{\mathrm{ban}}(A \rtimes^\rho G, B \rtimes^\rho G)$ *(resp.* $E^{\mathrm{ban}}(A \rtimes^\rho_r G, B \rtimes^\rho_r G)$*).*

Démonstration. On va montrer le lemme dans le cas du produit croisé maximal, le cas réduit étant complètement analogue.

On doit montrer que, pour tout élément $a \in C_c(G,A)$ et pour tout $g \in G$, les opérateurs

$$[a, T \rtimes^\rho G], \quad a(1-(T \rtimes^\rho G)^2) \quad \text{et} \quad a(g(T \rtimes^\rho G) - T \rtimes^\rho G),$$

sont des opérateurs compacts de $E \rtimes^\rho G$.
On remarque d'abord que l'opérateur $|y\rangle\langle\eta| \in \mathcal{K}_{B\rtimes^\rho G}(E \rtimes^\rho G)$, pour $\eta \in C_c(G,\overline{E})$ et $y \in C_c(G,E)$, agit sur $x \in C_c(G,E)$ et $\xi \in C_c(G,\overline{E})$ par les formules

$$\begin{aligned}|y\rangle\langle\eta|^>(x)(g) &= \int_G K_s^>(s(x(s^{-1}g)))ds,\\ |y\rangle\langle\eta|^<(\xi)(g) &= \int_G (s^{-1}g)^{-1}(K_{s^{-1}g}^<(\xi(s)))ds,\end{aligned}$$

où $K_g = \int_G |y(s)\rangle\langle g(\eta(s^{-1}g))|ds$, pour tout $g \in G$, appartient à $\mathcal{K}_B(E)$.

Définition 2.5. On note E la B-paire $(\overline{E}, E)$ par abus de notation. Étant donné un élément $S = (S_g)_{g\in G}$ appartenant à $C_c(G, \mathcal{K}_B(E))$, on définit un opérateur $\widehat{S}$ dans $\mathcal{L}_{B\rtimes^\rho G}(E \rtimes^\rho G)$ de la manière suivante

$$\widehat{S}^>(x)(g) = \int_G S_s^>(s(x(s^{-1}g)))ds,$$

$$\widehat{S}^<(\xi)(g) = \int_G (s^{-1}g)^{-1}(S_{s^{-1}g}^<(\xi(s)))ds,$$

pour $x \in C_c(G,E)$ et $\xi \in C_c(G,\overline{E})$.

Proposition 2.6. *L'application*

$$\begin{aligned}\psi : C_c(G, \mathcal{K}_B(E)) &\to \mathcal{L}_{B\rtimes^\rho G}(E \rtimes^\rho G)\\ S &\mapsto \widehat{S},\end{aligned}$$

induit un morphisme d'algèbres de Banach de $\mathcal{K}(E) \rtimes^\rho G$ dans $\mathcal{L}_{B\rtimes^\rho G}(E \rtimes^\rho G)$, que l'on note ψ par abus de notation et dont l'image est contenue dans $\mathcal{K}(E \rtimes^\rho G)$.

Avant de démontrer cette proposition, démontrons d'abord le lemme suivant

Lemme 2.7. *Pour tout $a \in C_c(G,A)$ et pour tout $g \in G$, les opérateurs $[a, T \rtimes^\rho G]$, $a(1-(T \rtimes^\rho G)^2)$ et $a(g(T \rtimes^\rho G) - T \rtimes^\rho G)$ appartiennent à l'image de ψ. Plus précisément, pour $a \in C_c(G,A)$ et $g \in G$, posons*

$$\begin{aligned}S_1 &:= \big(t \mapsto a(t)(t(T) - T) + [a(t), T]\big),\\ S_2 &:= \big(t \mapsto a(t)t(1-T^2)\big),\\ \textit{et} \quad S_3 &:= \big(t \mapsto a(t)t((gT) - T)\big),\end{aligned}$$

de sorte que $S_i \in C_c(G, \mathcal{K}(E))$ *pour* $i = 1, .., 3$. *Alors,*

$$\begin{aligned}
&[a, T \rtimes^\rho G] = \widehat{S_1},\\
&a(1 - (T \rtimes^\rho G)^2) = \widehat{S_2},\\
&a(g(T \rtimes^\rho G) - T \rtimes^\rho G) = \widehat{S_3},
\end{aligned}$$

où, pour $i = 1, .., 3$, $\widehat{S_i}$ *est l'élément de* $\mathcal{L}_{B\rtimes^\rho G}(E \rtimes^\rho G)$ *donné à partir de* S_i *par la définition 2.5.*

Démonstration. Soit $a \in C_c(G, A)$. Pour $x = \int_G x(g)e_g dg \in C_c(G, E)$,

$$\begin{aligned}
[a, T \rtimes^\rho G]^>(x) = \int_G \big(\int_G a(t)t(T^>(x(t^{-1}g)))dt\big)e_g dg\\
- (T \rtimes^\rho G)^>\big(g \mapsto \int_G a(t)t(x(t^{-1}g))dt\big),
\end{aligned}$$

donc, pour tout $g \in G$,

$$\begin{aligned}
[a, T \rtimes^\rho G]^>(x)(g) &= \int_G a(t)t(T^>(x(t^{-1}g))) - T^>(a(t)t(x(t^{-1}g)))dt,\\
&= \int_G \big(a(t)(t(T) - T)^> + [a(t), T]^>\big)(t(x(t^{-1}g)))dt.
\end{aligned}$$

De même, pour $\xi = \int_G e_g\xi(g)dg \in C_c(G, \overline{E})$, on a :

$$\begin{aligned}
[a, T \rtimes^\rho G]^<(\xi) &= ((T \rtimes^\rho G)^<(\xi))a - ((T \rtimes^\rho G)^<(\xi a)),\\
&= \int_G e_g \int_G (t^{-1}g)^{-1}(T^<(\xi(t))a(t^{-1}g))dtdg\\
&\quad -(T \rtimes^\rho G)^<(\int_G e_g \int_G (t^{-1}g)^{-1}(\xi(t)a(t^{-1}g))dtdg),
\end{aligned}$$

donc, pour tout $g \in G$,

$$\begin{aligned}
[a, T \rtimes^\rho G]^<(\xi)(g) &= \int_G (t^{-1}g)^{-1}\big(T^<(\xi(t))a(t^{-1}g)\big)dt\\
&\quad - \int_G T^<\big((t^{-1}g)^{-1}(\xi(t)a(t^{-1}g))\big)dt\\
&= \int_G (t^{-1}g)^{-1}\Big(T^<(\xi(t))a(t^{-1}g) - T^<(\xi(t)a(t^{-1}g)),\\
&\quad -(t^{-1}g)T^<(\xi(t)a(t^{-1}g)) + T^<(\xi(t)a(t^{-1}g))\Big)dt\\
&= \int_G (t^{-1}g)^{-1}\Big([a(t^{-1}g), T]^<\xi(t),\\
&\quad + \big(a(t^{-1}g)((t^{-1}g)T - T)\big)^<\xi(t)\Big)dt.
\end{aligned}$$

Donc, si pour tout $t \in G$ on pose

$$S_1(t) := a(t)(t(T) - T) + [a(t), T],$$

de sorte que S_1 définisse un élément de $C_c(G,\mathcal{K}(E))$, alors $[a, T \rtimes^\rho G] = \widehat{S}_1$.

Calculons maintenant $a(1 - T \rtimes^\rho G^2)^>$. Soit $x \in C_c(G,E)$, on a :

$$\big(a(1 - T \rtimes^\rho G^2)\big)^>(x) = ax - a(T \rtimes^\rho G^{2,>})x,$$

donc, pour tout $g \in G$,

$$\begin{aligned}
&\big(a(1 - T \rtimes^\rho G^2)\big)^>(x)(g),\\
&\qquad = \int_G a(t)t(x(t^{-1}g))dt - \int_G a(t)t\big(T^{2,>}x(t^{-1}g)\big)dt,\\
&\qquad = \int_G a(t)t\big((1-T^{2,>})x(t^{-1}g)\big)dt,\\
&\qquad = \int_G a(t)t(1-T^{2,>})tx(t^{-1}g)dt.
\end{aligned}$$

De même, pour $\xi \in C_c(G,\overline{E})$,

$$(a(1 - T \rtimes^\rho G^2))^<(\xi) = \xi a - (T \rtimes^\rho G^{2,<})(\xi a),$$

d'où, pour tout $g \in G$, on a :

$$\begin{aligned}
(a(1 - T \rtimes^\rho G^2))^<(\xi)(g) &= \xi a(g) - T^{2,<}(\xi a(g)),\\
&= \int_G (t^{-1}g)^{-1}(\xi(t)a(t^{-1}g)) - T^{2,<}((t^{-1}g)^{-1}\xi(t)a(t^{-1}g))dt,\\
&= \int_G (t^{-1}g)^{-1}\Big(\xi(t)a(t^{-1}g) - (t^{-1}g)T^{2,<}(\xi(t)a(t^{-1}g))\Big)dt,\\
&= \int_G (t^{-1}g)^{-1}\Big((t^{-1}g)(1-T^{2,<})(\xi(t)a(t^{-1}g))\Big)dt,\\
&= \int_G (t^{-1}g)^{-1}\Big(a(t^{-1}g)(t^{-1}g)(1-T^2)^<(\xi(t))\Big)dt.
\end{aligned}$$

Si, pour tout $t \in G$, on pose

$$S_2(t) := a(t)t(1-T^2),$$

alors $S_2 \in C_c(G,\mathcal{K}(E))$ et $a(1 - T \rtimes^\rho G^2) = \widehat{S}_2$.

Prenons maintenant $g \in G$. De la même façon, on peut calculer $a(g(T \rtimes^\rho G) - T \rtimes^\rho G)$. Par exemple, pour $x \in C_c(G,E)$,

$$\begin{aligned}
&a(g(T \rtimes^\rho G) - T \rtimes^\rho G)^> x(s),\\
&\qquad = \int_G a(t)t(g(T^>)(x(t^{-1}s))) - a(t)tT^>(t(x(t^{-1}s)))dt,\\
&\qquad = \int_G a(t)t((gT^>) - T^>)(t(x(t^{-1}s)))dt,
\end{aligned}$$

et si on pose

$$S_3(t) := a(t)t((gT) - T),$$

alors $S_3 \in C_c(G, \mathcal{K}(E))$ et $a(g(T \rtimes^\rho G) - T \rtimes^\rho G) = \widehat{S}_3$. $\square$

Nous allons maintenant montrer la proposition 2.6 qui, grâce au lemme 2.7, implique le lemme 2.4. La démonstration repose sur le lemme suivant analogue au lemme 1.5.6 de [Laf02b]

Lemme 2.8. *Soit $S = (S_g)_{g \in G} \in C_c(G, \mathcal{K}(E))$, où E est vu comme B-paire. Soit $\widehat{S} \in \mathcal{L}_{B \rtimes^\rho G}(E \rtimes^\rho G)$ l'opérateur défini comme dans la définition 2.5. Alors,*

$$\|\widehat{S}\|_{\mathcal{L}_{B \rtimes^\rho G}(E \rtimes^\rho G)} \leq \int_G \|S_g\|_{\mathcal{K}(E)} \|\rho(g)\|_{\mathrm{End}(V)} dg, \tag{2.1}$$

et $\widehat{S}$ est un opérateur compact. Plus précisément, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un $n \in \mathbb{N}$, et pour $i = 1, ..., n$ il existe des éléments $y_i \in C_c(G, E)$, $\xi_i \in C_c(G, \overline{E})$ tels que, si on pose pour tout $g \in G$,

$$K_g = \int_G \sum_{i=1}^n |y_i(t)\rangle\langle g(\xi_i(t^{-1}g))| dt,$$

alors :
- *$K = (K_g)_{g \in G} \in C_c(G, \mathcal{K}(E))$,*
- *si on considère y_i et ξ_i comme des éléments de $E \rtimes^\rho G$ et $\overline{E} \rtimes^\rho G$ respectivement, on a $\widehat{K} = \sum\limits_{i=1}^n |y_i\rangle\langle \xi_i|$,*
- *et*

$$\int_G \|S_g - K_g\|_{\mathcal{K}(E)} \|\rho(g)\|_{\mathrm{End}(V)} dg \leq \epsilon. \tag{2.2}$$

Démonstration. Montrons d'abord que l'inégalité (2.1) est vraie. Pour ceci, on considère l'algèbre $\begin{pmatrix} \mathcal{K}(E) & E \\ \overline{E} & B \end{pmatrix}$. Le produit croisé tordu par ρ de G avec cette algèbre vérifie l'égalité

$$\begin{pmatrix} \mathcal{K}(E) & E \\ \overline{E} & B \end{pmatrix} \rtimes^\rho G = \begin{pmatrix} \mathcal{K}(E) \rtimes^\rho G & E \rtimes^\rho G \\ \overline{E} \rtimes^\rho G & B \rtimes^\rho G \end{pmatrix}.$$

Ceci implique que $\mathcal{K}(E) \rtimes^\rho G$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E \rtimes^\rho G)$. Plus précisément, d'après [Kas88, Theorem 3.7] on a que le produit tensoriel de C^*-algèbres $C^*(G, \mathcal{K}(E)) \otimes \mathrm{End}(V)$ est une sous-algèbre du produit tensoriel $\mathcal{K}(C^*(G, E)) \otimes \mathrm{End}(V)$, et donc elle agit sur le module hilbertien $C^*(G, E) \otimes \mathrm{End}(V)$. D'autre part, par définition $\mathcal{K}(E) \rtimes^\rho G$ est une sous-algèbre fermée de $C^*(G, \mathcal{K}(E)) \otimes \mathrm{End}(V)$ (pour la norme de produit tensoriel de C^*-algèbres $\|.\|_{C^*(G, \mathcal{K}(E)) \otimes \mathrm{End}(V)}$) et $E \rtimes^\rho G$ est un sous-module fermé de $C^*(G, E) \otimes \mathrm{End}(V)$ par construction. Ceci implique que $\mathcal{K}(E) \rtimes^\rho G$ agit aussi sur $E \rtimes^\rho G$ et c'est donc une sous-algèbre fermée de $\mathcal{L}(E \rtimes^\rho G)$, d'où l'égalité

$$\|\widehat{S}\|_{\mathcal{L}(E \rtimes^\rho G)} = \|S\|_{\mathcal{K}(E) \rtimes^\rho G}.$$

De plus,

$$\begin{aligned}\|S\|_{\mathcal{K}(E)\rtimes^\rho G} &= \|\int_G S_g e_g \otimes \rho(g) dg\|_{C^*(G,\mathcal{K}(E))\otimes \mathrm{End}(V)},\\ &\leq \|\int_G S_g e_g \otimes \rho(g) dg\|_{L^1(G,\mathcal{K}(E)\otimes \mathrm{End}(V))},\\ &\leq \int_G \|S_g \otimes \rho(g)\|_{\mathcal{K}(E)\otimes \mathrm{End}(V)} dg.\end{aligned}$$

Donc,

$$\|S\|_{\mathcal{K}(E)\rtimes^\rho G} \leq \int_G \|S_g\|_{\mathcal{K}(E)} \|\rho(g)\|_{\mathrm{End}(V)} dg,$$

d'où l'inégalité (2.1).

Montrons maintenant que $\widehat{S}$ est compact. En utilisant des partitions de l'unité, on voit facilement qu'il suffit de montrer le résultat pour les éléments S dans $C_c(G,\mathcal{K}(E))$ de la forme $S_g = f(g)|y\rangle\langle\xi|$, pour $g\in G$, avec $f\in C_c(G)$, $y\in E$ et $\xi\in\overline{E}$.
Soit f une fonction à support compact sur G. Soit $\epsilon>0$. Il existe une fonction positive $\chi\in C_c(G)$ à support compact contenu dans un voisinage de l'identité 1 de G, telle que $\int_G \chi = 1$, et telle que les conditions suivantes soient vérifiées [1]

$$\int_G |f(g)-\chi * f(g)|\, \|\rho(g)\|_{\mathrm{End}(V)} dg \|y\|_E \|\xi\|_{\overline{E}} < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{et}$$
$$\int_G \big(\int_G |\chi(t) f(t^{-1}g)|\, \|\xi - t\xi\|_E dt\big)\, \|\rho(g)\|_{\mathrm{End}(V)} dg \|y\|_E < \frac{\epsilon}{2}.$$

Prenons $n=1$ et pour tout $g\in G$, posons

$$y_1(g) = \chi(g) y \quad \text{et} \quad \xi_1(g) = f(g) g^{-1}(\xi),$$

de sorte que $K_g = \int_G |\chi(t)y\rangle\langle f(t^{-1}g)t(\xi)| dt$ définisse un opérateur $\widehat{K}$ de $\mathcal{K}(E\rtimes^\rho G)$. On a alors,

$$\begin{aligned}\|S_g - K_g\|_{\mathcal{K}(E)} &= \Big\| f(g)\big|y\big\rangle\big\langle\xi\big| - \int_G \chi(t) f(t^{-1}g)\big|y\big\rangle\big\langle t\xi\big| dt\Big\|_{\mathcal{K}(E)},\\ &\leq \Big\| f(g)\big|y\big\rangle\big\langle\xi\big| - \int_G \chi(t) f(t^{-1}g)\big|y\big\rangle\big\langle\xi\big| dt\Big\|_{\mathcal{K}(E)}\\ &\quad + \Big\|\int_G \chi(t) f(t^{-1}g)\big|y\big\rangle\big\langle\xi\big| dt - \int_G \chi(t) f(t^{-1}g)\big|y\big\rangle\big\langle t\xi\big| dt\Big\|_{\mathcal{K}(E)},\\ &\leq \Big\|\big(f(g)-\chi * f(g)\big)\big|y\big\rangle\big\langle\xi\big|\Big\|_{\mathcal{K}(E)} + \int_G \Big\|\, \big|\chi(t) f(t^{-1}g) y\big\rangle\big\langle \xi - t\xi\big|\Big\|_{\mathcal{K}(E)} dt,\\ &\leq \big|f(g)-\chi * f(g)\big|\, \big\|y\big\|_E\, \big\|\xi\big\|_{\overline{E}} + \int_G \Big|\chi(t) f(t^{-1}g)\Big|\, \big\|y\big\|_E\, \big\|\xi - t\xi\big\|_{\overline{E}} dt.\end{aligned}$$

[1] Pour que ces conditions soient vérifiées il suffit que le support de χ soit assez proche de 1.

On a alors les inégalités suivantes

$$\begin{aligned}\|\widehat{S}-\widehat{K}\|_{\mathcal{L}(E\rtimes^\rho G)} &\leq \int_G \|S_g - K_g\|_{\mathcal{K}(E)}\|\rho(g)\|_{\mathrm{End}(V)}dg,\\ &\leq \int_G \Big(\big|f(g)-\chi * f(g)\big|\,\big\|y\big\|_E\,\big\|\xi\big\|_{\overline{E}} \\ &\qquad + \int_G \big|\chi(t)f(t^{-1}g)\big|\,\|y\|_E\,\big\|\xi - t\xi\big\|_{\overline{E}}dt\Big)\|\rho(g)\|_{\mathrm{End}(V)}dg \\ &< \epsilon.\end{aligned}$$

D'où l'inégalité 2.2.

□

En appliquant le lemme 2.8 à S_1, S_2 et S_3 on termine la démonstration du fait que $(E\rtimes^\rho G, T\rtimes^\rho G)$ appartient à $E^{\mathrm{ban}}(A\rtimes^\rho G, B\rtimes^\rho G)$. □

Définition 2.9. Pour toutes G-C^*-algèbres A et B et pour toute représentation de dimension finie ρ de G, on définit un morphisme de groupes de $KK_G(A,B)$ dans $KK^{\mathrm{ban}}(A\rtimes^\rho G, B\rtimes^\rho G)$ (resp. dans $KK^{\mathrm{ban}}(A\rtimes^\rho_r G, B\rtimes^\rho_r G))$ que l'on note j_ρ (resp. $j_{\rho,r}$) par la formule suivante : pour $[E,T]\in KK_G(A,B)$, on pose

$$j_\rho([E,T]) := [E\rtimes^\rho G, T\rtimes^\rho G] \quad \text{et} \quad j_{\rho,r}([E,T]) := [E\rtimes^\rho_r G, T\rtimes^\rho_r G].$$

On appelle ces morphismes *morphisme de descente tordu* et *morphisme de descente tordu réduit*, respectivement.

2.2. **Fonctorialité.** La proposition suivante dit que les morphismes de descente tordus sont fonctoriels.

Proposition 2.10. *Les applications*

$$j_\rho : KK_G(A,B)\to KK^{\mathrm{ban}}(A\rtimes^\rho G, B\rtimes^\rho G),$$
$$j_{\rho,r} : KK_G(A,B)\to KK^{\mathrm{ban}}(A\rtimes^\rho_r G, B\rtimes^\rho_r G),$$

définies dans la définition 2.9 sont des morphismes fonctoriels en A et en B. De plus, ils sont tels que si $A=B$ alors $j_\rho(1_A)=1_{A\rtimes^\rho G}$ et $j_{\rho,r}(1_A)=1_{A\rtimes^\rho_r G}$.

Démonstration. On voit facilement que $j_\rho(1_A)=1_{A\rtimes^\rho G}$. Montrons maintenant que j_ρ est fonctoriel. La démonstration pour $j_{r,\rho}$ est complètement analogue.
Soit θ_1 un morphisme de G-C^*-algèbres de A_1 dans A. Notons $\theta_1\rtimes^\rho G$ le morphisme d'algèbres de Banach de $A_1\rtimes^\rho G$ dans $A\rtimes^\rho G$ qu'il définit. Il est facile de voir que pour tout $\alpha\in KK_G(A,B)$ on a

$$j_\rho(\theta_1^*(\alpha)) = (\theta_1\rtimes^\rho G)^*(j_\rho(\alpha)),$$

ce qui donne la fonctorialité en A.
Soit maintenant $\theta : B\to C$ un morphisme de G-C^*-algèbres. On va montrer que pour tout $\alpha\in KK_G(A,B)$,

$$j_\rho(\theta_*(\alpha)) = (\theta\rtimes^\rho G)_*(j_\rho(\alpha)),$$

dans $KK^{\mathrm{ban}}(A \rtimes^\rho G, C \rtimes^\rho G)$.
Soit (E,T) un représentant de α dans $E_G(A,B)$. Par définition (cf. [Laf02b, Section 1.1]),

$$(\theta \rtimes^\rho G)_*(j_\rho(E))^> = E \rtimes^\rho G \otimes^\pi_{\widetilde{B\rtimes^\rho G}} \widetilde{C \rtimes^\rho G},$$
$$(\theta \rtimes^\rho G)_*(j_\rho(E))^< = \widetilde{C \rtimes^\rho G} \otimes^\pi_{\widetilde{B\rtimes^\rho G}} \overline{E} \rtimes^\rho G,$$

où $\otimes^\pi$ est le produit tensoriel projectif, et,

$$j_\rho(\theta_*(E))^> = (E \otimes_B C) \rtimes^\rho G,$$
$$j_\rho(\theta_*(E))^< = (\overline{E \otimes_B C}) \rtimes^\rho G,$$

où $\otimes$ est le produit tensoriel interne de modules hilbertiens.
On note

$$(\theta \rtimes^\rho G)_*(j_\rho(E)) := (\theta \rtimes^\rho G)_*(j_\rho(E))^> \quad \text{et} \quad j_\rho(\theta_*(E)) := j_\rho(\theta_*(E))^>,$$
$$(\theta \rtimes^\rho G)_*(j_\rho(\overline{E})) := (\theta \rtimes^\rho G)_*(j_\rho(E))^< \quad \text{et} \quad j_\rho(\theta_*(\overline{E})) := j_\rho(\theta_*(E))^<,$$

pour simplifier les notations.
D'après [Kas88, Lemma 3.10], l'application

$$\tau : C_c(G,E) \otimes C_c(G,C) \to C_c(G, E \otimes C)$$
$$x \otimes c \mapsto \Big(g \mapsto \int_G x(s) \otimes sc(s^{-1}g)ds\Big),$$

définit un isomorphisme de $C^*(C,G)$-modules hilbertiens

$$C^*(G,E) \otimes_{C^*(G,B)} C^*(G,C) \to C^*(G, E \otimes_B C).$$

On a alors,

$$\begin{aligned}\|\tau(x \otimes c)\|_{(E\otimes_B C)\rtimes^\rho G} &= \|\tau(x \otimes c)\|_{C^*(G,E\otimes_B C)\otimes \mathrm{End}(V)}\\ &\leq \|x\|_{C^*(G,E)\otimes\mathrm{End}(V)} \|c\|_{C^*(G,C)\otimes \mathrm{End}(V)}\end{aligned}$$

ce qui implique que $\|\tau(x \otimes c)\|_{(E\otimes_B C)\rtimes^\rho G} \leq \|x \otimes c\|_{(E\rtimes^\rho G \otimes^\pi_{\widetilde{B\rtimes^\rho G}} \widetilde{C\rtimes^\rho G})}$.
L'application τ définit alors un morphisme de $C \rtimes^\rho G$-modules de Banach à droite de norme inférieure ou égale à 1 :

$$\tau : (E \rtimes^\rho G) \otimes^\pi_{\widetilde{B\rtimes^\rho G}} (\widetilde{C \rtimes^\rho G}) \to (E \otimes_B C) \rtimes^\rho G,$$

que l'on note encore τ par abus de notation. On note $\overline{\tau}$ l'analogue de τ pour $\overline{E}$.
On va alors construire l'homotopie cherchée à l'aide de cônes de la manière suivante (cf. [Par06, Section 1.9]).
Soit

$$E \rtimes^\rho_\theta G = \{(h,x) \in j_\rho(\theta_*(E))[0,1] \times (\theta \rtimes^\rho G)_*(j_\rho(E)) | h(0) = \tau(x)\},$$

muni de la norme $\|(h,x)\| = \max\big(\sup_{t\in[0,1]} \|h(t)\|, \|x\|\big)$, le cône associé à τ.

De même, on définit

$$\overline{E} \rtimes_{\theta}^{\rho} G = \{(h,x) \in j_{\rho}(\theta_*(\overline{E}))[0,1] \times (\theta \rtimes^{\rho} G)_*(j_{\rho}(\overline{E})) | h(0) = \overline{\tau}(x)\},$$

qui est le cône associé à $\overline{\tau}$.
Alors le couple

$$(\overline{E} \rtimes_{\theta}^{\rho} G, E \rtimes_{\theta}^{\rho} G),$$

définit un $\big(A \rtimes^{\rho} G, (C \rtimes^{\rho} G)[0,1]\big)$-bimodule de Banach que l'on note $E \rtimes_{\theta}^{\rho} G$ par abus de notation.

D'autre part, on définit un opérateur $T \rtimes_{\theta}^{\rho} G \in \mathcal{L}(E \rtimes_{\theta}^{\rho} G)$ de la façon suivante

$$\begin{aligned}(T \rtimes_{\theta}^{\rho} G)^{>}(h, e\otimes c) &= \big(t \mapsto (\theta_*(T) \rtimes^{\rho} G)^{>} h(t), (\theta \rtimes^{\rho} G)_*(T \rtimes^{\rho} G)^{>}(x)\big)\\ &= \Big((g,t) \mapsto \theta_*(T)^{>}(h(t)(g)), (g \mapsto T^{>}(e(g))) \otimes c\Big),\end{aligned}$$

pour $(h, e\otimes c) \in E \rtimes_{\theta}^{\rho} G$, et on définit $(T \rtimes_{\theta}^{\rho} G)^{<}$ de façon analogue.

Remarque 2.11. L'opérateur $(T \rtimes_{\theta}^{\rho} G)$ ainsi défini est le "cône" du couple d'opérateurs $\big((\theta \rtimes^{\rho} G)_*(T \rtimes^{\rho} G), \theta_*(T) \rtimes^{\rho} G\big)$, noté

$$Z\Big((\theta \rtimes^{\rho} G)_*(T \rtimes^{\rho} G), \theta_*(T) \rtimes^{\rho} G\Big)$$

et défini dans [Par06, Definition 1.9.14].

Lemme 2.12. *L'élément $(E \rtimes_{\theta}^{\rho} G, T \rtimes_{\theta}^{\rho} G)$ appartient à $E^{\mathrm{ban}}(A \rtimes^{\rho} G, (C \rtimes^{\rho} G)[0,1])$. De plus, il réalise une homotopie entre $j_{\rho}(\theta_*(\alpha))$ et $(\theta \rtimes^{\rho} G)_*(j_{\rho}(\alpha))$.*

Démonstration. On doit montrer que pour tout $a \in A \rtimes^{\rho} G$ et pour tout $g \in G$, les opérateurs suivants

$$[a, (T \rtimes_{\theta}^{\rho} G)], \quad a(1 - (T \rtimes_{\theta}^{\rho} G)^2) \quad \text{et} \quad a(g(T \rtimes_{\theta}^{\rho} G) - T \rtimes_{\theta}^{\rho} G)$$

sont des opérateurs compacts de $E \rtimes_{\theta}^{\rho} G$.

Soient $a \in A \rtimes^{\rho} G$ et $g \in G$. Pour $S = (S_t)_{t\in G} \in C_c(G, \mathcal{K}(E))$, on note $\theta_*(S) := (\theta_*(S)_t)_{t\in G}$ l'élément de $C_c(G, \mathcal{K}(\theta_*(E))$ tel que $\theta_*(S)_t = \theta_*(S_t)$.
On rappelle que, étant donné $S = (S_t)_t \in C_c(G, \mathcal{K}(E))$, on note $\widehat{S}$ l'élément de $\mathcal{L}_{B\rtimes^{\rho} G}(E \rtimes^{\rho} G)$ associé à S et donné par la définition 2.5.

On considère l'application suivante

$$\begin{aligned}\psi : C_c(G, \mathcal{K}(E)) &\to \mathcal{L}(E \rtimes_{\theta}^{\rho} G)\\ S &\mapsto \Big((h,x) \mapsto \big(t \mapsto \widehat{\theta_*(S)}(h(t)), (\theta \rtimes^{\rho} G)_*(\widehat{S})x\big)\Big).\end{aligned}$$

Lemme 2.13. *L'application ψ induit un morphisme d'algèbre de Banach de $\mathcal{K}(E) \rtimes^\rho G$ dans $\mathcal{L}(E \rtimes^\rho_\theta G)$, que l'on note ψ par abus de notation et dont l'image est contenue dans $\mathcal{K}(E \rtimes^\rho_\theta G)$.*

Avant de démontrer le lemme , remarquons que le lemme suivant implique le lemme 2.12

Lemme 2.14. *Les opérateurs*

$$[a, (T \rtimes^\rho_\theta G)], \quad a(1 - (T \rtimes^\rho_\theta G)^2) \quad et \quad a(g(T \rtimes^\rho_\theta G) - T \rtimes^\rho_\theta G)$$

appartiennent à l'image de ψ.

Démonstration du lemme 2.14. Soient S_1, S_2 et S_3 les éléments de $C_c(G, \mathcal{K}(E))$ donnés par le lemme 2.7 tels que :

$\widehat{S_1} = [a, T \rtimes^\rho G]$, $\widehat{S_2} = a(1-(T \rtimes^\rho G)^2)$ et $\widehat{S_3} = a(g(T \rtimes^\rho G) - T \rtimes^\rho G)$.

Il est facile de vérifier les égalités suivantes

$$\begin{aligned} \psi(S_1) &= [a, (T \rtimes^\rho_\theta G)], \\ \psi(S_2) &= a(1 - (T \rtimes^\rho_\theta G)^2) \\ \text{et} \quad \psi(S_3) &= a(g(T \rtimes^\rho_\theta G) - T \rtimes^\rho_\theta G). \end{aligned}$$

En effet, on a par exemple, pour $x \in C_c(G, E)$ et $\xi \in C_c(G, \overline{E})$,

$$\begin{aligned} [a, \theta_*(T) \rtimes^\rho G]^> x(t) &= \int_G (\theta_*(S_{1,s})^>)(s(x(s^{-1})))ds, \\ [a, \theta_*(T) \rtimes^\rho G]^< \xi(t) &= \int_G (s^{-1}t)^{-1}(\theta_*(S_{1,s^{-1}t})^<)(\xi(s))ds, \end{aligned}$$

pour tout $t \in G$, donc,

$$[a, \theta_*(T) \rtimes^\rho G] = \widehat{\theta_*(S_1)}.$$

De même,

$$[a, (\theta \rtimes^\rho G)_*(T \rtimes^\rho G)] = (\theta \rtimes^\rho G)_*(\widehat{S_1}).$$

Et donc, $[a, (T \rtimes^\rho_\theta G)]$, $a(1 - (T \rtimes^\rho_\theta G)^2)$ et $a(g(T \rtimes^\rho_\theta G) - T \rtimes^\rho_\theta G)$ appartiennent à l'image de ψ. □

Le lemme 2.2 implique alors que les opérateurs

$$[a, (T \rtimes^\rho_\theta G)], \quad a(1 - (T \rtimes^\rho_\theta G)^2) \quad \text{et} \quad a(g(T \rtimes^\rho_\theta G) - T \rtimes^\rho_\theta G)$$

appartiennent à $\mathcal{K}(E \rtimes^\rho_\theta G)$. Ceci implique que $(E \rtimes^\rho_\theta G, T \rtimes^\rho_\theta G)$ appartient à $E^{\mathrm{ban}}(A \rtimes^\rho G, (C \rtimes^\rho G)[0,1])$. Il est clair qu'il réalise une homotopie entre $j_\rho(\theta_*(\alpha))$ et $(\theta \rtimes^\rho G)_*(j_\rho(\alpha))$ ce qui termine la démonstration du lemme 2.12.

□

Démonstration du lemme 2.2. Pour tout $S=(S_t)_t\in C_c(G,\mathcal{K}(E))$, on a

$$\|\psi(S)\|_{\mathcal{L}(E\rtimes^\rho_\theta G)}\leq \max\Big(\|\widehat{\theta_*(S)}\|_{\mathcal{L}(\theta_*(E)\rtimes^\rho G)},\|(\theta\rtimes^\rho G)_*(\widehat{S})\|_{\mathcal{L}((\theta\rtimes^\rho G)_*(E\rtimes^\rho G))}\Big).$$

De plus, on a les estimations suivantes

$$\begin{aligned}\|(\theta\rtimes^\rho G)_*(\widehat{S})\|_{\mathcal{L}((\theta\rtimes^\rho G)_*(E\rtimes^\rho G))}&=\|\widehat{S}\otimes 1\|_{\mathcal{L}(E\rtimes^\rho G\otimes^\pi_{\widetilde{B\rtimes^\rho G}}\widetilde{C\rtimes^\rho G})},\\ &\leq \|S\|_{\mathcal{K}(E)\rtimes^\rho G},\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\|\widehat{\theta_*(S)}\|_{\mathcal{L}(\theta_*(E)\rtimes^\rho G)}&=\|\theta_*(S)\|_{\mathcal{K}(\theta_*(E))\rtimes^\rho G},\\ &\leq \|S\|_{\mathcal{K}(E)\rtimes^\rho G}.\end{aligned}$$

Ceci implique que

$$\|\psi(S)\|_{\mathcal{L}(E\rtimes^\rho_\theta G)}\leq \|S\|_{\mathcal{K}(E)\rtimes^\rho G},$$

et donc que l'application ψ induit bien un morphisme d'algèbre de Banach de $\mathcal{K}(E)\rtimes^\rho G$ dans $\mathcal{L}(E\rtimes^\rho_\theta G)$, que l'on note encore ψ par abus de notation. Montrons maintenant que l'image de ψ est contenue dans $\mathcal{K}(E\rtimes^\rho_\theta G)$.
Soient $S\in C_c(G,\mathcal{K}(E))$ et $\epsilon>0$. D'après le lemme 2.8, il existe $n\in\mathbb{N}$ et pour $i=1,...,n$, il existe $y_i\in C_c(G,E)$, $\xi_i\in C_c(G,\overline{E})$ tels que l'élément $K=(K_g)_{g\in G}\in C_c(G,\mathcal{K}(E))$ défini par la formule

$$K_g=\int_G\sum_{i=1}^n|y_i(t)\rangle\langle g(\xi_i(t^{-1}g))|dt,$$

vérifie l'inégalité

$$\int_G\|S_g-K_g\|_{\mathcal{K}(E)}\|\rho(g)\|_{\mathrm{End}(V)}dg<\epsilon.$$

L'image par ψ de K est un opérateur compact de $E\rtimes^\rho_\theta G$. En effet, pour tout $s\in G$, $\theta_*(K_s)=\int_G\sum\limits_{i=1}^n|y_i(t)\otimes 1\rangle\langle s(1\otimes\xi_i(t^{-1}s)|dt$, et donc, pour tout $x\in C_c(G,\theta_*(E)^>)$,

$$\begin{aligned}\widehat{\theta_*(K)}^>(x)(g)&=\int_G\theta_*(K_s)^>s(x(s^{-1}g))ds,\\ &=\int_G\int_G\sum_{i=1}^n|y_i(t)\otimes 1\rangle\langle s(1\otimes\xi_i(t^{-1}s))|^>s(x(s^{-1}g))dtds,\\ &=\sum_{i=1}^n\big(|g\mapsto y_i(g)\otimes 1\rangle\langle g\mapsto 1\otimes\xi_i(g)|^>(x)\big)(g).\end{aligned}$$

De façon analogue, pour $\xi \in C_c(G, \theta_*(E)^<)$, on trouve

$$\begin{aligned}\widehat{\theta_*(K)}^<(\xi)(g) &= \int_G (s^{-1}g)^{-1}\theta_*(K_{s^{-1}g})^<(\xi(s))ds,\\ &= \sum_{i=1}^n \big(|g \mapsto y_i(g) \otimes 1\rangle\langle g \mapsto 1 \otimes \xi_i(g)|^<(\xi)\big)(g);\end{aligned}$$

d'où,

$$\widehat{\theta_*(K)} = \sum_{i=1}^n |g \mapsto y_i(g) \otimes 1\rangle\langle g \mapsto 1 \otimes \xi_i(g)|.$$

De plus,

$$\begin{aligned}(\theta \rtimes^\rho G)_*(\widehat{K}) &= (1 \otimes \widehat{K}^<, \widehat{K}^> \otimes 1),\\ &= \sum_{i=1}^n |y_i \otimes 1\rangle\langle 1 \otimes \xi_i|,\end{aligned}$$

et donc pour $(h, x) \in E \rtimes_\theta^\rho G$,

$$\psi(K)^>(h, x) =$$

$$\Big(t \mapsto \sum_{i=1}^n |g \mapsto y_i(g) \otimes 1\rangle\langle g \mapsto 1 \otimes \xi_i(g)|^>(h(t)), \sum_{i=1}^n |y_i \otimes 1\rangle\langle 1 \otimes \xi_i|^> x\Big),$$

$$= \sum_{i=1}^n \Big|\big(t \mapsto (g \mapsto y_i(g) \otimes 1), y_i \otimes 1\big)\Big\rangle\Big\langle\big(t \mapsto (g \mapsto 1 \otimes \xi_i(g)), 1 \otimes \xi_i\big)\Big|.$$

On en déduit que $\psi(K) \in \mathcal{K}(E \rtimes_\theta^\rho G)$.

Le fait que ψ soit un morphisme d'algèbres de Banach, implique alors que $\psi(S)$ est un opérateur compact de $E \rtimes_\theta^\rho G$. En effet, on a les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned}\|\psi(S) - \psi(K)\|_{\mathcal{L}(E \rtimes_\theta^\rho G)} &\leq \|S - K\|_{\mathcal{K}(E) \rtimes^\rho G},\\ &\leq \int_G \|S_g - K_g\|_{\mathcal{K}(E)} \|\rho(g)\|_{\mathrm{End}(V)} < \epsilon.\end{aligned}$$

$\square$

Ceci termine la démonstration de la proposition 2.10 et donc de la fonctorialité des morphismes de descente tordus. $\square$

2.3. **Descente et action de KK^{ban} sur la K-théorie.** Soient A et B deux algèbres de Banach. On rappelle que dans [Laf02b], Lafforgue à construit un morphisme de groupes

$$\Sigma : KK^{\mathrm{ban}}(A, B) \to \mathrm{Hom}(K(A), K(B)),$$

qui induit une action de la KK-théorie banachique sur la K-théorie. La proposition suivante montre que les morphismes de descente tordus sont compatibles avec Σ.

Proposition 2.15. *Soient G un groupe localement compact, A, B, C des G-C^*-algèbres, $\alpha \in KK_G(A,B)$, $\beta \in KK_G(B,C)$, et $\alpha \otimes_B \beta$ leur produit de Kasparov qui est un élément de $KK_G(A,B)$ (cf.* [Kas88]*). On a alors,*

$$\Sigma(j_\rho(\alpha \otimes_B \beta)) = \Sigma(j_\rho(\beta)) \circ \Sigma(j_\rho(\alpha))$$

dans $\mathrm{Hom}(K(A \rtimes^\rho G), K(B \rtimes^\rho G))$. *De même dans le cas du produit croisé réduit.*

Démonstration. La démonstration découle de la fonctorialité de j_ρ (resp. de $j_{\rho,r}$) et du lemme suivant démontré dans [Laf02b, Proposition 1.6.10] qui dit que tout élément de KK-théorie de Kasparov est le produit de Kasparov d'un élément qui provient d'un morphisme et d'un élément qui est l'inverse d'un morphisme.

Lemme 2.16. *Soient G un groupe localement compact, A et B deux G-C^*-algèbres et $\alpha \in KK_G(A,B)$. Il existe une G-C^*-algèbre A_1, des morphisme G-équivariants $\theta : A_1 \to A$, $\eta : A_1 \to B$, et un élément $\alpha_1 \in KK_G(A, A_1)$ tels que :*

1. $[\theta] \otimes_A \alpha_1 = \mathrm{Id}_{A_1}$ *et* $\alpha_1 \otimes_A [\theta] = \mathrm{Id}_A$, *où* $[\theta] \in KK_G(A_1, A)$ *est induit par le morphisme θ (c'est-à-dire que α_1 est l'inverse en KK-théorie G-équivariante d'un morphisme),* *et*
2. $\theta^*(\alpha) = [\eta]$, *où* $[\eta] \in KK_G(A_1, A)$ *est l'élément induit par le morphisme η.*

La fonctorialité du morphisme de descente j_ρ et de l'action de KK^{ban} sur la K-théorie donnée par Σ impliquent la proposition (2.15). La démonstration est la même que celle de [Laf02b, Proposition 1.6.9] : on applique le lemme (2.16) à G, A, B et α. Comme j_ρ et Σ sont fonctoriels on a

$$\begin{aligned}
\Sigma(j_\rho(\alpha_1)) \circ j_\rho(\theta)_* &= \Sigma(j_\rho(\theta)^*(j_\rho(\alpha_1))),\\
&= \Sigma(j_\rho(\theta^*(\alpha_1))),\\
&= \mathrm{Id}_{K(A_1 \rtimes^\rho G)}, \text{ car } \theta^*(\alpha_1) = \mathrm{Id}_{A_1}.
\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}
j_\rho(\theta)_* \circ \Sigma(j_\rho(\alpha_1)) &= \Sigma(j_\rho(\theta)_*(j_\rho(\alpha_1))),\\
&= \Sigma(j_\rho(\theta_*(\alpha_1))),\\
&= \mathrm{Id}_{K(A \rtimes^\rho G)} \text{ car } \theta_*(\alpha_1) = \mathrm{Id}_A.
\end{aligned}$$

Donc,

$$j_\rho(\theta)_* : K(A_1 \rtimes^\rho G) \to K(A \rtimes^\rho G)$$

est inversible. De plus, $\theta^*(\alpha \otimes_B \beta) = \eta^*(\beta)$ dans $KK_G(A_1, C)$ et donc,

$$\Sigma(j_\rho(\alpha \otimes \beta)) \circ j_\rho(\theta)_* = \Sigma(j_\rho(\beta)) \circ j_\rho(\eta)_*,$$

et ceci implique que

$$\Sigma(j_\rho(\alpha \otimes \beta)) = \Sigma(j_\rho(\beta)) \circ j_\rho(\eta)_* \circ j_\rho(\theta)_*^{-1}.$$

De la même façon, on montre, en prenant $C = B$ et $\beta = \mathrm{Id}$, que

$$\Sigma(j_\rho(\alpha)) = j_\rho(\eta)_* \circ j_\rho(\theta)_*^{-1}$$

Ceci implique la proposition.
La même démonstration vaut pour la descente dans le cas du produit croisé réduit.

□

2.4. **Construction du morphisme tordu.** Soit G un groupe localement compact et B une G-C^*-algèbre. On rappelle que l'on note $\underline{E}G$ le classifiant universel pour les actions propres de G et $K^{\mathrm{top}}(G,B)$ la K-homologie G-équivariante de $\underline{E}G$ à valeurs dans B. On rappelle que $K^{\mathrm{top}}(G,B)$ est donné par la formule suivante

$$K^{\mathrm{top}}(G,B) = \varinjlim KK_G(C_0(X), B),$$

où la limite inductive est prise parmi les parties fermées X de $\underline{E}G$ qui sont G-invariantes et G-compactes.

Définition 2.17. Soit X une partie fermée G-compacte de $\underline{E}G$. Soit c une fonction continue à support compact sur X et à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ telle que $\int_G c(g^{-1}x)dg = 1$, pour tout $x \in X$ (une fonction avec ces propriétés existe d'après [Tu99] et elle est appelée "fonction de cut-off" sur X). Soit p la fonction sur $G \times X$ définie par la formule

$$p(g,x) = \sqrt{c(x)c(g^{-1}x)},$$

pour $(g,x) \in G \times X$.
La fonction p définit alors un projecteur de $C_c(G, C_0(X))$, que l'on note p par abus de notation. L'élément de $K(C_0(X) \rtimes^\rho G)$ qu'il définit est appelé *élément de Mischenko tordu* associé à X. On le note Δ_ρ.
Soit

$$\Sigma : KK^{\mathrm{ban}}(C_0(X) \rtimes^\rho G, B \rtimes^\rho G) \to \mathrm{Hom}(K(C_0(X) \rtimes^\rho G), K(B \rtimes^\rho G))$$

le morphisme provenant de l'action de KK^{ban} sur la K-théorie défini dans [Laf02b]. On a alors une suite de morphismes

$$KK_G(C_0(X), B) \xrightarrow{j_\rho} KK^{\mathrm{ban}}(C_0(X) \rtimes^\rho G, B \rtimes^\rho G) \xrightarrow{\Sigma(.)(\Delta_\rho)} K(B \rtimes^\rho G).$$

De même que dans [Laf02b] section 1.7, en passant à la limite inductive on définit un morphisme

$$\mu_\rho^B : K^{\mathrm{top}}(G,B) \to K(B \rtimes^\rho G),$$

et on l'appelle *morphisme de Baum-Connes tordu par la représentation* ρ.

Remarque 2.18. La fonctorialité des morphismes Σ et j_ρ implique que le morphisme de Baum-Connes tordu par ρ est fonctoriel en B. En effet, soit $\theta : B \to C$ un morphisme de G-C^*-algèbres. Soit $\alpha \in KK_G(C_0(X), B)$. On a les égalités suivantes,

$$\begin{aligned}(\theta \rtimes^\rho G)_*(\mu_\rho^B(\alpha)) &= (\theta \rtimes^\rho G)_*(\Sigma(j_\rho(\alpha))(\Delta_\rho)),\\ &= \Sigma\big((\theta \rtimes^\rho G)_*(j_\rho(\alpha))\big)(\Delta_\rho),\\ &= \Sigma\big(j_\rho(\theta_*(\alpha))\big)(\Delta_\rho),\\ &= \mu_\rho^C(\theta_*(\alpha)).\end{aligned}$$

Définition 2.19. Pour toute G-C^*-algèbre B, soit $\lambda_{G,B}^\rho$ le morphisme d'algèbres de Banach de $B \rtimes^\rho G$ dans $B \rtimes_r^\rho G$ qui prolonge l'identité sur $C_c(G, B)$. Soit

$$(\lambda_{G,B}^\rho)_* : K(B \rtimes^\rho G) \to K(B \rtimes_r^\rho G)$$

le morphisme induit par $\lambda_{G,B}^\rho$ en K-théorie. On définit un *morphisme de Baum-Connes tordu réduit*,

$$\mu_{\rho,r}^B : K^{\mathrm{top}}(G, B) \to K(B \rtimes_r^\rho G),$$

en posant $\mu_{\rho,r}^B := (\lambda_{G,B}^\rho)_* \circ \mu_\rho^B$.

Remarque 2.20. Il est facile de voir que, si X est une partie G-compacte de $\underline{E}G$ et si on note $\Delta_{\rho,r}$ l'élément de $K(C_0(X) \rtimes_r^\rho G)$ défini par la fonction p, alors le morphisme de Baum-Connes tordu réduit vérifie l'égalité

$$\mu_{\rho,r}^B(x) = \Sigma\big(j_{\rho,r}(x)\big)(\Delta_{\rho,r}),$$

pour tout $x \in KK_G(C_0(X), B)$.

2.5. **Compatibilité avec la somme directe de représentations.** On va maintenant montrer que le morphisme de Baum-Connes tordu est compatible avec la somme directe de représentations. On utilisera ce résultat dans l'étude de la bijectivité.

Lemme 2.21. *Soient ρ et ρ' deux représentations de dimension finie de G et B une G-C^*-algèbre. Alors il existe des morphismes*

$$i_{\rho'} : B \rtimes^{\rho\oplus\rho'} G \to B \rtimes^{\rho'} G \quad \text{et} \quad i_\rho : B \rtimes^{\rho\oplus\rho'} G \to B \rtimes^\rho G,$$

qui prolongent l'identité sur $C_c(G, B)$ et tels que les diagrammes suivants,

$$\begin{tikzcd} K^{\mathrm{top}}(G,B) \arrow[r, "\mu^B_{\rho\oplus\rho'}"] \arrow[dr, "\mu^B_{\rho'}"'] & K(B \rtimes^{\rho\oplus\rho'} G) \arrow[d, "i_{\rho',*}"] \\ & K(B \rtimes^{\rho'} G), \end{tikzcd} \quad \text{et} \quad \begin{tikzcd} K^{\mathrm{top}}(G,B) \arrow[r, "\mu^B_{\rho\oplus\rho'}"] \arrow[dr, "\mu^B_{\rho}"'] & K(B \rtimes^{\rho\oplus\rho'} G) \arrow[d, "i_{\rho,*}"] \\ & K(B \rtimes^{\rho} G), \end{tikzcd}$$

soient commutatifs. On a le même résultat dans le cas des produits croisés tordus réduits.

Démonstration. Il est clair que pour toute G-C^*-algèbre A et pour toute fonction $f \in C_c(G,A)$,

$$\|f\|_{A\rtimes^\rho G} \leq \|f\|_{A\rtimes^{\rho\oplus\rho'}G},$$

donc $\mathrm{Id}_{C_c(G,A)}$ s'étend en un morphisme d'algèbres de Banach

$$i_\rho : A \rtimes^{\rho\oplus\rho'} G \to A \rtimes^\rho G.$$

En fait, on a que $A \rtimes^{\rho\oplus\rho'} G = A \rtimes^\rho G \cap A \rtimes^{\rho'} G$, à équivalence de norme près.
De même, si E est un A-module de Banach et $f \in C_c(G,E)$,

$$\|f\|_{E\rtimes^\rho G} \leq \|f\|_{E\rtimes^{\rho\oplus\rho'}G},$$

et $\mathrm{Id}_{C_c(G,E)}$ s'étend en un morphisme de A-modules de Banach, que l'on note aussi i_ρ, de $E \rtimes^{\rho\oplus\rho'} G$ dans $E \rtimes^\rho G$.
On doit montrer que

$$\mu_\rho^B = i_{\rho,*} \circ \mu_{\rho\oplus\rho'}^B.$$

Pour ceci, on va d'abord montrer que, pour tout $\alpha \in KK_G(A,B)$, les éléments $j_\rho(\alpha)$ et $j_{\rho\oplus\rho'}(\alpha)$ ont la même image dans le groupe $KK^{\mathrm{ban}}(A \rtimes^{\rho\oplus\rho'} G, B \rtimes^\rho G)$. C'est le lemme suivant

Lemme 2.22. *Pour tout $\alpha \in KK_G(A,B)$, on a l'égalité,*

$$i_\rho^*(j_\rho(\alpha)) = i_{\rho,*}(j_{\rho\oplus\rho'}(\alpha)),$$

dans $KK^{\mathrm{ban}}(A \rtimes^{\rho\oplus\rho'} G, B \rtimes^\rho G)$.

Avant de démontrer le lemme 2.22, remarquons qu'il implique le lemme 2.21. En effet, pour X une partie G-compacte de $\underline{E}G$ et pour un élément α dans $KK_G(C_0(X),B)$,

$$\mu_{\rho\oplus\rho'}^B(\alpha) = \Sigma(j_{\rho\oplus\rho'}(\alpha))(\Delta_{\rho\oplus\rho'}),$$

donc, on a les égalités suivantes,

$$\begin{aligned} i_{\rho,*}(\mu_{\rho\oplus\rho'}^B(\alpha)) &= i_{\rho,*} \circ \Sigma(j_{\rho\oplus\rho'}(\alpha))(\Delta_{\rho\oplus\rho'}), \\ &= \Sigma(i_{\rho,*}(j_{\rho\oplus\rho'}(\alpha)))(\Delta_{\rho\oplus\rho'}), \\ &= \Sigma(i_\rho^*(j_\rho(\alpha)))(\Delta_{\rho\oplus\rho'}), \\ &= \Sigma(j_\rho(\alpha))(i_{\rho,*}(\Delta_{\rho\oplus\rho'})), \\ &= \Sigma(j_\rho(\alpha))(\Delta_\rho) = \mu_\rho^B(\alpha). \end{aligned}$$

On a alors que $\mu_\rho^B = i_{\rho,*} \circ \mu_{\rho\oplus\rho'}^B$, pour toute G-C^*-algèbre B, ce qui termine la démonstration du lemme 2.21.

□

Démonstration du lemme 2.22. Soit (E,T) un représentant de α dans $E_G(A,B)$. Alors

$$i_\rho^*(j_\rho(E)) = E \rtimes^\rho G,$$

où $E \rtimes^{\rho} G$ est un $(A \rtimes^{\rho\oplus\rho'} G, B \rtimes^{\rho} G)$-bimodule de Banach, l'action de $A \rtimes^{\rho\oplus\rho'} G$ étant donnée par i_ρ, et

$$i_{\rho,*}(j_{\rho\oplus\rho'}(E))^{>} = (E \rtimes^{\rho\oplus\rho'} G)^{>} \otimes^{\pi}_{\widetilde{B\rtimes^{\rho\oplus\rho'}G}} (\widetilde{B \rtimes^{\rho} G}),$$
$$i_{\rho,*}(j_{\rho\oplus\rho'}(E))^{<} = (\widetilde{B \rtimes^{\rho} G}) \otimes^{\pi}_{\widetilde{B\rtimes^{\rho\oplus\rho'}G}} (E \rtimes^{\rho\oplus\rho'} G)^{<}.$$

On considère l'application suivante,

$$\tau : C_c(G,E) \otimes_{C_c(G,B)} C_c(G,B) \to C_c(G,E)$$
$$x \otimes b \mapsto xb.$$

On a alors,

$$\begin{aligned}\|\tau(x\otimes b)\|_{E\rtimes^{\rho}G} &\leq \|x\|_{E\rtimes^{\rho}G}\|b\|_{B\rtimes^{\rho}G},\\ &\leq \|x\|_{E\rtimes^{\rho\oplus\rho'}G}\|b\|_{B\rtimes^{\rho}G},\end{aligned}$$

et donc τ définit une application,

$$(E \rtimes^{\rho\oplus\rho'} G) \otimes^{\pi}_{\widetilde{B\rtimes^{\rho\oplus\rho'}G}} \widetilde{B \rtimes^{\rho} G} \to E \rtimes^{\rho} G,$$

que l'on note encore τ par abus de notation.
Comme

$$\|\tau(x\otimes b)\|_{E\rtimes^{\rho}G} \leq \|x\otimes b\|_{(E\rtimes^{\rho\oplus\rho'}G)\otimes^{\pi}_{\widetilde{B\rtimes^{\rho\oplus\rho'}G}}(\widetilde{B\rtimes^{\rho}G})},$$

l'application τ définit un morphisme de $B \rtimes^{\rho} G$-modules de Banach à droite de norme inférieure ou égale à 1.
De même, il existe un morphisme de $B \rtimes^{\rho} G$-modules de Banach (à gauche)

$$\overline{\tau} : \widetilde{B \rtimes^{\rho} G} \otimes^{\pi}_{\widetilde{B\rtimes^{\rho\oplus\rho'}G}} (\overline{E} \rtimes^{\rho\oplus\rho'} G) \to \overline{E} \rtimes^{\rho} G,$$

de norme inférieure ou égale à 1.
On va construire une homotopie entre $(i_{\rho,*}(j_{\rho\oplus\rho'}(\alpha))$ et $j_\rho(\alpha)$ en utilisant les cônes associés à ces morphismes.

Soit,

$$\mathcal{C}(\tau)^{>} = \{(h,x) \in (E \rtimes^{\rho} G)[0,1] \times i_{\rho,*}(j_{\rho\oplus\rho'}(E))^{>} | h(0) = \tau(x)\},$$

le cône associé à τ, et

$$\mathcal{C}(\tau)^{<} = \{(h,x) \in (\overline{E} \rtimes^{\rho} G)[0,1] \times i_{\rho,*}(j_{\rho\oplus\rho'}(E))^{<} | h(0) = \overline{\tau}(x)\},$$

le cône associé à $\overline{\tau}$.
On pose

$$\mathcal{C}(\tau) := (\mathcal{C}(\tau)^{<}, \mathcal{C}(\tau)^{>}),$$

qui est un $\big(A \rtimes^{\rho\oplus\rho'} G, (B \rtimes^{\rho} G)[0,1]\big)$-bimodule de Banach.

Soit $\mathcal{C}(\tau,T) \in \mathcal{L}(\mathcal{C}(\tau))$, l'opérateur sur $\mathcal{C}(\tau)$ défini par la formule suivante

$$\mathcal{C}(\tau,T)^{>}(h, e\otimes b) = \Big(t \mapsto (T \rtimes^{\rho} G)(h(t)), \big((T \rtimes^{\rho\oplus\rho'} G)^{>} e \otimes b\big)\Big),$$

pour $(h, e\otimes b) \in \mathcal{C}(\tau)^{>}$ et $\mathcal{C}(\tau, T)^{<}$ défini de façon analogue sur $\mathcal{C}(\tau)^{>}$. On a alors le lemme suivant

Lemme 2.23. *L'élément $(\mathcal{C}(\tau), \mathcal{C}(\tau, T))$ défini ci-dessus est un élément de $E^{\mathrm{ban}}\big(A \rtimes^{\rho\oplus\rho'} G, (B \rtimes^{\rho} G)[0,1]\big)$.*

Démonstration. On doit montrer que pour tout $a \in C_c(G, A)$ et pour tout $g \in G$, les opérateurs,

$$[a, \mathcal{C}(\tau, T)], \quad a(1 - (\mathcal{C}(\tau, T))^2) \quad \text{et} \quad a(g(\mathcal{C}(\tau, T)) - \mathcal{C}(\tau, T))$$

sont des opérateurs compacts de $\mathcal{C}(\tau)$.

Soit $S = (S_g)_{g\in G} \in C_c(G, \mathcal{K}(E))$ et soit $\widehat{S}_{\rho}$ (resp. $\widehat{S}_{\rho\oplus\rho'}$) l'élément de $\mathcal{L}_{B\rtimes^{\rho}G}(E \rtimes^{\rho} G)$ (resp. de $\mathcal{L}_{B^{\rho\oplus\rho'}\rtimes G}(E^{\rho\oplus\rho'} \rtimes G)$) associé à S par la définition 2.5 appliquée à la représentation ρ (resp. $\rho\oplus\rho'$). On a alors une application

$$\psi : C_c(G, \mathcal{K}(E)) \to \mathcal{L}(\mathcal{C}(\tau))$$

définie par la formule

$$\psi(S)^{>}(h, e\otimes b) = \Big(t \mapsto \widehat{S}_{\rho}^{>}(h(t)), \widehat{S}_{\rho\oplus\rho'}^{>}(e)\otimes b\Big),$$

où $S \in C_c(G, \mathcal{K}(E))$ et $(h, e\otimes b) \in \mathcal{C}(\tau)^{>}$, et où $\psi(S)^{<}$ est défini sur $\mathcal{C}(\tau)^{<}$ de façon analogue.

Lemme 2.24. *L'application ψ induit un morphisme d'algèbres de Banach de $\mathcal{K}(E) \rtimes^{\rho\oplus\rho'} G$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{C}(\tau))$, que l'on note ψ par abus de notation et dont l'image est contenue dans $\mathcal{K}(\mathcal{C}(\tau))$.*

Avant de démontrer le lemme , remarquons que le lemme suivant implique le lemme 2.23

Lemme 2.25. *Les opérateurs*

$$[a, \mathcal{C}(\tau, T)], \quad a(1 - (\mathcal{C}(\tau, T))^2) \quad \textit{et} \quad a(g(\mathcal{C}(\tau, T)) - \mathcal{C}(\tau, T))$$

appartiennent à l'image de ψ.

Démonstration du lemme 2.25. Si on pose, pour tout $a \in C_c(G, A)$, pour tout $g \in G$ et pour tout $g_1 \in G$,

$$\begin{aligned} S_1(g_1) &:= a(g_1)(g_1(T) - T) + [a(g_1), T]), \\ S_2(g_1) &:= a(g_1)g_1(1 - T^2)), \\ \text{et} \quad S_3(g_1) &:= a(g_1)g_1((gT) - T)), \end{aligned}$$

de sorte que,

$$\begin{aligned} \widehat{S_1} &= [a, T \rtimes^{\rho} G], \\ \widehat{S_2} &= a(1 - (T \rtimes^{\rho} G)^2), \\ \text{et} \quad \widehat{S_3} &= a(g(T \rtimes^{\rho} G) - T \rtimes^{\rho} G), \end{aligned}$$

(voir lemme 2.7), alors, par des calculs simples, on obtient,

$$\begin{aligned} &\psi(S_1) = [a, \mathcal{C}(\tau, T)], \\ &\psi(S_2) = a(1 - (\mathcal{C}(\tau, T))^2), \\ \text{et} \quad &\psi(S_3) = a(g(\mathcal{C}(\tau, T)) - \mathcal{C}(\tau, T)). \end{aligned}$$

□

Il est clair que les lemmes 2.5 et 2.25 impliquent le lemme 2.23 car pour tout $a \in C_c(G, A)$ et pour tout $g \in G$, les opérateurs $[a, \mathcal{C}(\tau, T)]$, $a(1-(\mathcal{C}(\tau, T))^2)$ et $a(g(\mathcal{C}(\tau, T))-\mathcal{C}(\tau, T))$ sont contenus dans l'image de ψ qui, d'après le lemme 2.5, est contenue dans l'algèbre des opérateurs compacts de $\mathcal{C}(\tau)$. Ceci implique donc que $(\mathcal{C}(\tau), \mathcal{C}(\tau, T))$ appartient à $E^{\mathrm{ban}}\big(A \rtimes^{\rho\oplus\rho'} G, (B \rtimes^{\rho} G)[0,1]\big)$, ce qui termine la démonstration du lemme 2.23. □

Il est clair que $(\mathcal{C}(\tau), \mathcal{C}(\tau, T))$ réalise alors une homotopie entre $i_\rho^*(j_\rho(\alpha))$ et $i_{\rho,*}(j_{\rho\oplus\rho'}(\alpha))$, et ceci termine la démonstration du lemme 2.22. □

Démonstration du lemme 2.5. Soit

$$(h, e \otimes b) \in C_c(G, E) \times (C_c(G, E) \otimes C_c(G, B)).$$

Alors,

$$\begin{aligned} &\|\psi(S)^{>}(h, e \otimes b)\|_{\mathcal{C}(\tau)^{>}} \\ &\qquad = \max\Big(\sup_{t\in[0,1]} \|\widehat{S}^{>}_{\rho}(h(t))\|_{E\rtimes^{\rho} G}, \|\widehat{S}^{>}_{\rho\oplus\rho'}(e) \otimes b\|_{i_{\rho,*}(j_{\rho\oplus\rho'}(E))^{>}}\Big), \end{aligned}$$

et donc,

$$\begin{aligned} \|\psi(S)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{C}(\tau))} &\le \max\Big(\|\widehat{S}_\rho\|_{\mathcal{L}(E\rtimes^{\rho} G)}, \|\widehat{S}_{\rho\oplus\rho'}\|_{\mathcal{L}(E\rtimes^{\rho\oplus\rho'} G)}\Big), \\ &\le \int_G \|S_g\| \|(\rho\oplus\rho')(g)\|_{\mathrm{End}(\mathrm{V}\oplus\mathrm{V}')} dg. \end{aligned}$$

L'application ψ définit alors un morphisme d'algèbres de Banach de l'algèbre $\mathcal{K}(E) \rtimes^{\rho\oplus\rho'} G$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{C}(\tau))$, car

$$\|\widehat{S}_{\rho\oplus\rho'}\|_{\mathcal{L}(E\rtimes^{\rho\oplus\rho'} G)} = \|S\|_{\mathcal{K}(E)\rtimes^{\rho\oplus\rho'} G},$$

(voir la démonstration du lemme 2.8).

On va maintenant montrer que l'image de ψ est contenue dans l'algèbre des opérateurs compacts de $\mathcal{C}(\tau)$. Soit $S = (S_g)_{g\in G} \in C_c(G, \mathcal{K}(E))$ et soit $\epsilon > 0$. D'après le lemme 2.8, il existe $n \in \mathbb{N}$ et pour $i = 1, .., n$, il existe des éléments $y_i \in C_c(G, E)$ et $\xi_i \in C_c(G, \overline{E})$ tels que, l'élément $K = (K_g)_{g\in G}$ de $C_c(G, \mathcal{K}(E))$ définit par la formule,

$$K_g = \int_G \sum_{i=1}^{n} |y_i(g_1)\rangle\langle g(\xi_i(g_1^{-1}g))| dt,$$

vérifie l'inégalité,

$$\int_G \|S_g - K_g\|_{\mathcal{K}(E)} \|(\rho \oplus \rho')(g)\|_{\mathrm{End}(V \oplus V')} dg < \epsilon.$$

Ceci implique

$$\begin{aligned} \|\psi(S) - \psi(K)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{C}(\tau))} &\leq \int_G \|S_g - K_g\| \|(\rho \oplus \rho')(g)\|_{\mathrm{End}(V \oplus V')} dg, \\ &\leq \epsilon. \end{aligned}$$

Mais, $\psi(K)$ appartient à $\mathcal{K}(\mathcal{C}(\tau))$, car

$$\begin{aligned} \psi(K) =& \Big(\sum_{i=1}^{n} |t \mapsto y_i\rangle\langle t \mapsto \xi_i|, \sum_{i=1}^{n} |g \mapsto y_i(g) \otimes 1\rangle\langle g \mapsto 1 \otimes \xi_i(g)| \Big), \\ =& \sum_{i=1}^{n} \Big| \big(t \mapsto y_i, g \mapsto y_i(g) \otimes 1\big) \Big\rangle \Big\langle \big(t \mapsto \xi_i, g \mapsto 1 \otimes \xi_i(g)\big) \Big|, \end{aligned}$$

et donc $\psi(S)$ est approché par des sommes finies d'opérateurs de rang 1 ce qui implique que $\psi(S)$ appartient à $\mathcal{K}(\mathcal{C}(\tau))$. $\square$

3. Groupes admettant un élément γ de Kasparov

Nous allons maintenant montrer que les morphismes de Baum-Connes tordus, maximal et réduit, sont des isomorphismes pour tout groupe G admettant un élément γ de Kasparov égal à 1 dans $KK_G(\mathbb{C}, \mathbb{C})$. Pour ceci, nous allons d'abord montrer que les morphismes tordus à coefficients dans une algèbre propre sont toujours des isomorphismes.

3.1. **Coefficients dans une algèbre propre.**

On rappelle qu'une G-C^*-algèbre B est propre s'il existe un G-espace propre Z tel que B soit une $C_0(Z)$-G-C^*-algèbre au sens de Kasparov [Kas88, 1.5] (c'est-à-dire qu'il existe un morphisme Θ de $C_0(Z)$ dans le centre de l'algèbre $M(B)$ des multiplicateurs de B, G-équivariant et tel que $\Theta(C_0(Z))B = B$). Par abus de notation, si B est une G-C^*-algèbre propre on identifie $C_0(Z)$ à son image dans le centre de $M(B)$. De façon équivalente, B est une G-C^*-algèbre propre si et seulement si, il existe un G-espace propre Z tel que B soit munie d'une action du groupoïde $Z \rtimes G$. On renvoie le lecteur à [LG97] pour la définition de l'action d'un groupoïde sur une C^*-algèbre. On rappelle tout de même, que si Z est un G-espace, on note $Z \rtimes G$ le groupoïde dont l'ensemble des unités est Z, l'ensemble des flèches est le produit cartésien $Z \times G$ et les applications source et but sont données, respectivement, par les applications suivantes

$$s : (z, g) \mapsto g.z \quad \text{et} \quad r : (z, g) \mapsto z.$$

On note alors $(Z \rtimes G)^{(2)} := (Z \rtimes G)^{(1)} \times_{(Z \rtimes G)^{(0)}} (Z \rtimes G)^{(1)}$ l'ensemble des éléments composables de $Z \rtimes G$.

Si B est une $C_0(Z)$-G-C^*-algèbre, on note $r^*(B)$ la $C_0(Z \rtimes G)$-G-C^*-algèbre obtenue comme image réciproque de B par l'application r.
On rappelle aussi que si B est une G-C^*-algèbre propre, alors

$$C^*(G,B) = C^*_r(G,B)$$

(cf. [KS03, page 184], [HG04, page 192]). Nous allons montrer le théorème suivant

Théorème 3.1. *Si B est une G-C^*-algèbre propre, alors μ^B_ρ est un isomorphisme.*

Remarque 3.2. On remarque que si B est une G-C^*-algèbre propre, alors

$$B \rtimes^\rho G = B \rtimes^\rho_r G,$$

car $C^*(G,B) = C^*_r(G,B)$, donc le théorème 3.1 implique que le morphisme de Baum-Connes tordu réduit à coefficients dans une algèbre propre est aussi un isomorphisme.

Démonstration du théorème 3.1. On a le lemme suivant

Lemme 3.3. *Si B est une G-C^*-algèbre propre, les morphismes*

$$i_\rho : B \rtimes^{\rho\oplus 1_G} G \to B \rtimes^\rho G \quad et \quad i_{1_G} : B \rtimes^{\rho\oplus 1_G} G \to C^*(G,B),$$

où l'on note 1_G la représentation triviale de G, induisent des isomorphismes en K-théorie.

Le lemme implique le théorème 3.1. En effet, d'après le lemme 2.21, $i_{1_G,*} \circ \mu^B_{\rho\oplus 1_G} = \mu^B$, où μ_B est un isomorphisme car c'est le morphisme de Baum-Connes usuel à valeurs dans une algèbre propre [CEM01]. On en déduit que $\mu^B_{\rho\oplus 1_G}$ est un isomorphisme. Comme d'autre part, $i_{\rho,*} \circ \mu^B_{\rho\oplus 1_G} = \mu^B_\rho$ et que $i_{\rho,*}$ est aussi un isomorphisme, on en déduit que le morphisme de Baum-Connes tordu par ρ à coefficients dans une algèbre propre, μ^B_ρ, est un isomorphisme.

□

Pour montrer le lemme 3.1, on va utiliser un résultat de Lafforgue (cf. [Laf02b, Lemme 1.7.8]. On rappelle qu'une sous-algèbre D d'une algèbre A est dite héréditaire dans A si $DAD \subset D$. Pour nous, l'intérêt de cette notion est donnée par le lemme suivant démontré dans [Laf02b, Lemme 1.7.10]

Lemme 3.4. *Si C est une algèbre de Banach, B est une sous-algèbre de Banach dense de C et s'il existe une sous-algèbre dense de B qui est héréditaire dans C, alors B et C ont la même K-théorie.*

De plus, Lafforgue a montré le lemme suivant (cf. [Laf02b, Lemme 1.7.8])

Lemme 3.5. *Soit Z un G-espace propre tel que $Z \rtimes G$ agisse sur B et soient $s, r : Z \rtimes G \to Z$ les applications source et but, respectivement, de $Z \rtimes G$. Soit B_c la sous-algèbre de B formée des éléments b de B tels que $fb = b$ pour un certain $f \in C_c(Z)$. Alors $D = C_c(G, B_c)$, l'algèbre des sections continues à support compact dans $Z \rtimes G$ de $r^*(B)$, est une sous-algèbre héréditaire de $C^*(G, B)$.*

Nous allons donner ici la démonstration de Lafforgue avec plus de détails par souci de commodité pour le lecteur.

Démonstration. On rappelle que l'on note tout élément f de $C_c(G, B)$ par l'intégrale formelle $\int_G f(g)e_g dg$ et que $dg^{-1} = \Delta(g^{-1})dg$. Soient f_1, f_3 des éléments de $C_c(G, B)$. L'application

$$\begin{aligned} C_c(G, B) &\to C_c(G, B) \\ f_2 &\mapsto f_1 * f_2 * f_3, \end{aligned}$$

se prolonge par continuité en une application de $C^*_r(G, B)$ dans l'espace des fonctions f continues sur G à valeurs dans B qui vérifient la condition suivante : il existe une constante C telle que pour tout $g \in G$,

$$\|f(g)\|_B \Delta(g)^{\frac{1}{2}} < C.$$

En effet, soit $\mathrm{L}^2(G, B)$ muni de la structure de B-module hilbertien donnée par la formule :

$$\langle f, f' \rangle_B = \int_G f(t)^* f'(t) dt,$$

pour tout $f, f' \in \mathrm{L}^2(G, B)$. On note tout élément de $L^2(G, B)$ par l'intégrale formelle $\int_G e_g f(g) dg$ de sorte que B agisse à droite sur $L^2(G, B)$. Avec ces conventions, l'application de $C_c(G, B)$ dans $L^2(G, B)$ envoie $\int_G f(g)e_g dg$ dans $\int_G e_g f(g) dg$, donc il faut faire attention avec les formules.
Si $f = \int_G e_g f(g) dg$, on a $f^* = \int_G f(g)^* e_{g^{-1}} dg$ et donc

$$\begin{aligned} (f^* * f') &= (\int_G f(g)^* e_{g^{-1}} dg)(\int_G e_g f'(g) dg), \\ &= \int_{G \times G} f(g)^* t f'(gt) dg e_t dt. \end{aligned}$$

Si on note 1 l'identité de G, ceci implique que $f^* * f'(1) = \langle f, f' \rangle_B$. Donc, pour tout $f, f' \in C_c(G, B)$ et pour tout $g \in G$,

$$\begin{aligned} \|f * f'(g)\|_B &= \|f * (f' e_{g^{-1}})(1)\|_B, \\ &= \|\langle f^*, (f' e_{g^{-1}}) \rangle_{\mathrm{L}^2(G,B)}\|_B, \\ &\leq \|f^*\|_{\mathrm{L}^2(G,B)} \|f' e_{g^{-1}}\|_{\mathrm{L}^2(G,B)}. \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}\|f'e_{g^{-1}}\|_{\mathrm{L}^2(G,B)} &= \Big\| \int_G f'(tg)^* f'(tg)dt \Big\|_B^{\frac{1}{2}},\\ &= \Big\| \int_G f'(t)^* f(t)\Delta(g^{-1})dt \Big\|_B^{\frac{1}{2}},\\ &\leq \|f'\|_{L^2(G,B)}\Delta(g)^{-\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Ceci implique que, pour $f_1, f_3, f_2 \in C_c(G,B)$ et $g \in G$, on a les inégalités suivantes

$$\begin{aligned}\|f_1 * f_2 * f_3(g)\|_B &\leq \Delta(g)^{-\frac{1}{2}} \|f_1^*\|_{L^2(G,B)} \|f_2 * f_3\|_{L^2(G,B)},\\ &\leq \Delta(g)^{-\frac{1}{2}} \|f_1^*\|_{L^2(G,B)} \|\lambda_{(G,B)}(f_2) f_3\|_{L^2(G,B)},\\ &\leq \Delta(g)^{-\frac{1}{2}} \|f_1^*\|_{L^2(G,B)} \|f_2\|_{C_r^*(G,B)} \|f_3\|_{L^2(G,B)},\end{aligned}$$

où on note $\lambda_{G,B}$ la représentation régulière de $C_r^*(G,B)$ dans $\mathcal{L}(\mathrm{L}^2(G,B))$ de sorte que $\|\lambda_{(G,B)}(f_2)\|_{\mathcal{L}(L^2(G,B))} = \|f_2\|_{C_r^*(G,B)}$. On a donc

$$\|f_1 * f_2 * f_3(g)\|_B \Delta(g)^{\frac{1}{2}} \leq \|f_1^*\|_{L^2(G,B)} \|f_2\|_{C_r^*(G,B)} \|f_3\|_{L^2(G,B)},$$

ce qu'on voulait démontrer.

Maintenant, si f_1, f_3 appartiennent à $C_c(G, B_c)$, ce sont des sections continues à support compact sur $Z \rtimes G$ de $r^*(B)$, vu comme champ continu d'algèbres au-dessus de $Z \rtimes G$; donc $r(\mathrm{supp}_{Z\rtimes G}(f_1))$ et $s(\mathrm{supp}_{Z\rtimes G}(f_3))$ sont des sous-ensembles compacts de $Z \rtimes G$. De plus, comme Z est un espace G-propre, l'application

$$(r,s) : Z \rtimes G \to Z \times Z,$$

est propre et donc le sous-ensemble de $Z \rtimes G$

$$K := \{(z,h) | r(z,h) \in r(\mathrm{supp}_{Z\rtimes G}(f_1)), s(z,h) \in s(\mathrm{supp}_{Z\rtimes G}(f_3))\}$$

est compact.

Soit ϕ l'application qui à deux éléments composables de $Z \rtimes G$ associe leur composée :

$$\begin{aligned}\phi : (Z \rtimes G)^{(2)} &\to (Z \rtimes G)^{(1)}\\ \{((z',h),(z,g)) | z' = gz\} &\mapsto (z, hg).\end{aligned}$$

Si on définit un produit $*$ entre les parties de $Z \rtimes G$ de la manière suivante : pour $X, Y \subset Z \rtimes G$,

$$X * Y := \phi(X \times_{(Z\rtimes G)^{(0)}} Y),$$

alors le support du produit d'éléments de $C_c(G,B)$ est contenue dans le produit des supports. On a alors que, pour $f_2 \in C_c(G,B)$,

$$\mathrm{supp}_{Z\rtimes G}(f_1 * f_2 * f_3) \subset \mathrm{supp}_{Z\rtimes G}(f_1) * \mathrm{supp}_{Z\rtimes G}(f_2) * \mathrm{supp}_{Z\rtimes G}(f_3).$$

Or, $\mathrm{supp}_{Z\rtimes G}(f_1) * \mathrm{supp}_{Z\rtimes G}(f_2) * \mathrm{supp}_{Z\rtimes G}(f_3) \subset K$, car :

$$\begin{aligned}\mathrm{supp}_{Z\rtimes G}(f_1) &* \mathrm{supp}_{Z\rtimes G}(f_2) * \mathrm{supp}_{Z\rtimes G}(f_3)\\ &= \{(z,g) \in Z \rtimes G | g = g_1g_2g_3 \text{ avec } g_1, g_2, g_3 \in G,\\ &\quad (z, g_3) \in \mathrm{supp}_{Z\rtimes G}(f_3), (g_3z, g_2) \in \mathrm{supp}_{Z\rtimes G}(f_2),\\ &\quad (g_2g_3z, g_1) \in \mathrm{supp}_{Z\rtimes G}(f_1)\}.\end{aligned}$$

donc le support de $f_1 * f_2 * f_3$ est inclus dans un sous-ensemble compact de $Z \rtimes G$ qui ne dépend que de f_1 et f_3. On en déduit que pour $f_1, f_3 \in C_c(G, B_c)$ l'application $f_2 \mapsto f_1 * f_2 * f_3$ a pour image $C_c(G, B_c)$, car sur le support de $f_1 * f_2 * f_3$ la fonction $g \mapsto \Delta(g)$ est alors bornée. Ceci implique que $C_c(G, B_c)$ est une sous-algèbre héréditaire de $C^*_r(G, B)$. Comme, de plus, $C^*_r(G, B)$ est égal à $C^*(G, B)$ car B est propre, on en déduit que $C_c(G, B_c)$ est une algèbre héréditaire de $C^*(G, B)$. □

Démonstration du lemme 3.1. En gardant les notations du lemme précédent, l'algèbre D est une sous-algèbre dense de $B \rtimes^{\rho\oplus 1_G} G$ car B_c est dense dans $B = C_0(Z)B$. De plus, comme D est une sous-algèbre héréditaire de $C^*(G, B)$, alors $D \otimes \mathrm{End}(V)$ est héréditaire dans $C^*(G, B) \otimes \mathrm{End}(V)$ et comme $D \otimes \mathrm{End}(V) \cap B \rtimes^{\rho} G = D$ alors D est une sous-algèbre héréditaire de $B \rtimes^{\rho} G$.

En appliquant les lemmes [Laf02b, Lemme 1.7.9 et Lemme 1.7.10], on obtient alors que

$$\begin{aligned} &i_{\rho,*} : K(B \rtimes^{\rho\oplus 1_G} G) \to K(B \rtimes^{\rho} G),\\ \text{et}\quad &i_{1_G,*} : K(B \rtimes^{\rho\oplus 1_G} G) \to K(C^*(G, B))\end{aligned}$$

sont des isomorphismes. □

Remarque 3.6. D'après le lemme précédent, si B est une G-C^*-algèbre propre, l'application $i_{\rho,*} \circ i^{-1}_{1_G,*}$ de $K(C^*(G, B))$ dans $K(B \rtimes^{\rho} G)$ est un isomorphisme pour tout groupe localement compact.

3.2. **Élément γ de Kasparov.** On va maintenant utiliser le résultat obtenu pour les algèbres propres pour montrer que le morphisme de Baum-Connes tordu par n'importe quelle représentation de dimension finie de G et à coefficient dans une G-C^*-algèbre quelconque, est un isomorphisme pour tout groupe localement compact G qui admet un élément γ de Kasparov égal à 1 dans $KK_G(\mathbb{C}, \mathbb{C})$. Le résultat est donné par le théorème suivant

Théorème 3.7. *Soit G un groupe localement compact tel que il existe une G-C^*-algèbre propre A, et des éléments $\eta \in KK_G(\mathbb{C}, A)$ et $d \in KK_G(A, \mathbb{C})$ tels que, si on pose $\gamma := \eta \otimes_A d \in KK_G(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ on a $\gamma = 1$. Soit B une G-C^*-algèbre. Alors, pour toute représentation ρ de dimension finie de G, μ^B_{ρ} et $\mu^B_{\rho,r}$ sont des isomorphismes.*

Démonstration. Si A, B, D sont des G-C^*-algèbres, on note σ_D le morphisme de $KK_G(A,B)$ dans $KK_G(A \otimes D, B \otimes D)$ défini dans [Kas88]. Soient A, η et d vérifiant les hypothèses du théorème. L'injectivité et la surjectivité découlent de la commutativité du diagramme suivant (3.1)

$$\begin{tikzcd}
K^{\mathrm{top}}(G,B) \arrow[r, "\sigma_B(\eta)_*"] \arrow[d, "\mu_\rho^B"'] & K^{\mathrm{top}}(G, A\otimes B) \arrow[r, "\sigma_B(d)_*"] \arrow[d, "\mu_\rho^{B\otimes A}"] & K^{\mathrm{top}}(G,B) \arrow[d, "\mu_\rho^B"'] \\
K(B \rtimes^\rho G) \arrow[r, "\Sigma(j_\rho(\sigma_B(\eta)))"'] & K(A\otimes B \rtimes^\rho G) \arrow[r, "\Sigma(j_\rho(\sigma_B(d)))"'] & K(B\rtimes^\rho G).
\end{tikzcd}$$

On va démontrer d'abord la surjectivité. Supposons qu'il existe $\gamma \in KK_G(\mathbb{C},\mathbb{C})$ vérifiant les hypothèses et tel que $\gamma = 1$ dans $KK_G(\mathbb{C},\mathbb{C})$.

Le fait que γ soit égal à 1 implique que $\Sigma(j_\rho(\sigma_B(\gamma))) = \mathrm{Id}_{K(B\rtimes^\rho G)}$. Or, $\gamma = \eta \otimes_A d$, donc $\sigma_B(\gamma) = \sigma_B(\eta) \otimes_A \sigma_B(d)$ et donc

$$\begin{aligned}
\Sigma(j_\rho(\sigma_B(\gamma))) &= \Sigma(j_\rho(\sigma_B(\eta) \otimes_{A\otimes B} \sigma_B(d))),\\
&= \Sigma(j_\rho(\sigma_B(d))) \circ \Sigma(j_\rho(\sigma_B(\eta))),
\end{aligned}$$

ce qui implique que $\Sigma(j_\rho(\sigma_B(d)))$ est surjectif.
D'autre part,

$$\Sigma(j_\rho(\sigma_B(d))) \circ \mu_\rho^{A\otimes B} = \mu_\rho^B \circ \sigma_B(d)_*,$$

et comme $A \otimes B$ est une algèbre propre car A est propre, $\mu_\rho^{A\otimes B}$ est un isomorphisme et ceci implique que μ_ρ^B est surjectif.

Montrons maintenant l'injectivité. Soit $x \in K^{\mathrm{top}}(G,B)$ tel que $\mu_\rho^B(x) = 0$. On a alors

$$\begin{aligned}
\mu_\rho^{A\otimes B}(\sigma_B(\eta)_*(x)) &= \Sigma(j_\rho(\sigma_B(\eta)))(\mu_\rho^B(x)),\\
&= 0,
\end{aligned}$$

ce qui implique que $\sigma_B(\eta)_*(x) = 0$ car $\mu_\rho^{A\otimes B}$ est un isomorphisme. Mais $\sigma_B(\gamma) = \sigma_B(\eta) \otimes_{A\otimes B} \sigma_B(d)$, donc $\sigma_B(\gamma)_*(x) = 0$. De plus, le fait que $\gamma = 1$ implique que $\sigma_B(\gamma) = 1$ et donc que $\sigma_B(\gamma)_* = \mathrm{Id}_{K^{\mathrm{top}}(G,B)}$. Ceci implique que $x = 0$.
Les remarques 2.20 et 3.2 impliquent que la même démonstration est valable dans le cas du morphisme tordu réduit.

□

Plus généralement, le diagramme (3.1) permet aussi de montrer que l'existence d'un élément γ de Kasparov implique l'injectivité du morphisme de Baum-Connes tordu. C'est le théorème suivant

Théorème 3.8. *Supposons que pour toute partie G-compacte Y de $\underline{E}G$, il existe une G-C^*-algèbre propre A et des éléments $\eta \in$*

$KK_G(\mathbb{C}, A)$ et $d \in KK_G(A, \mathbb{C})$ tels que $\gamma = \eta \otimes_A d \in KK_G(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ vérifie $p^*(\gamma) = 1$ dans $KK_{G \ltimes Y}(C_0(Y), C_0(Y))$, où p est la projection de Y vers le point. Alors, pour toute représentation ρ et pour toute G-C^*-algèbre B, les morphismes μ_ρ^B et $\mu_{\rho,r}^B$ sont sont injectifs.

Démonstration. Soit x un élément de $K^{\mathrm{top}}(G)$ tel que $\mu_\rho^B(x) = 0$. Soit Y une partie G-compacte de $\underline{E}G$ telle que $x \in KK_G(C_0(Y), B)$ et soient A, η, d et γ vérifiant les hypothèses du théorème. On va montrer que $x = 0$. La commutativité du diagramme (3.1) implique que $\sigma_B(\eta)_*(x) = 0$ car

$$\begin{aligned} \mu_\rho^{A\otimes B}(\sigma_B(\eta)_*(x)) &= \Sigma(j_\rho(\sigma_B(\eta)))(\mu_\rho^B(x)), \\ &= 0, \end{aligned}$$

et $\mu_\rho^{A\otimes B}$ est un isomorphisme (car $A \otimes B$ est une algèbre propre). Mais $\sigma_B(\eta)_*(x) = 0$ implique que $\sigma_B(\gamma)_*(x) = 0$, car $\sigma_B(\gamma) = \sigma_B(\eta) \otimes_{A\otimes B} \sigma_B(d)$.

D'autre part, l'égalité $p^*(\gamma) = 1$ dans $KK_{G\ltimes Y}(C_0(Y), C_0(Y))$ implique que $\sigma_{C_0(Y)}(\gamma)^* x = x$. Or, comme $\gamma \in KK_G(\mathbb{C}, \mathbb{C})$, on a

$$\sigma_{C_0(Y)}(\gamma) \otimes_{C_0(Y)} x = x \otimes_B \sigma_B(\gamma).$$

Ceci implique que $\sigma_B(\gamma)_* x = x$ et donc que $x = 0$. La même démonstration est valable dans le cas du morphisme tordu réduit. □

Références

[BCH94] P. Baum, A. Connes, and N. Higson, *Classifying space for proper actions and K-theory of group C^*-algebras*, C^*-algebras : 1943–1993 (San Antonio, TX, 1993), Contemp. Math., vol. 167, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994, pp. 240–291.

[Bos90] J. B. Bost, *Principe d'Oka, K-théorie et systèmes dynamiques non commutatifs*, Invent. Math. **101** (1990), 261–333.

[CEM01] J. Chabert, S. Echterhoff, and R. Meyer, *Deux remarques sur l'application de Baum-Connes*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **332** (2001), no. 7, 607–610.

[Cha03] I. Chatterji, *Property (RD) for cocompact lattices in a finite product of rank one Lie groups with some rank two Lie groups*, Geom. Dedicata **96** (2003), 161–177.

[GA07a] M. P. Gomez-Aparicio, *Propriéte (T) et morphisme de Baum-Connes tordus par une représentation non-unitaire*, Ph.D. thesis, Université de Paris VII, décembre 2007.

[GA07b] ______, *Sur la propriété (T) tordue par un produit tensoriel*, J. Lie Theory **17** (2007), 505–524.

[GA08] ______, *Représentations non-unitaires, morphisme de Baum-Connes et complétions inconditionnelles*, preprint, january 2008.

[HG04] N. Higson and E. Guentner, *Group C^*-algebras and K-theory*, Noncommutative geometry, Lecture Notes in Math., vol. 1831, Springer, Berlin, 2004, pp. 137–251.

[HK01] N. Higson and G. G. Kasparov, *E-theory and KK-theory for groups which act properly and isometrically on Hilbert space*, Invent. Math. **144** (2001), no. 1, 23–74.

[HLS02] N. Higson, V. Lafforgue, and G. Skandalis, *Counterexamples to the Baum-Connes conjecture*, Geom. Funct. Anal. **12** (2002), no. 2, 330–354.

[JK95] P. Julg and G. Kasparov, *Operator K-theory for the group $SU(n,1)$*, J. Reine Angew. Math. **463** (1995), 99–152 (English).

[Jul97] P. Julg, *Remarks on the Baum-Connes conjecture and Kazhdan's property T*, Operator algebras and their applications (Waterloo, ON, 1994/1995), Fields Inst. Commun., vol. 13, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997, pp. 145–153.

[Kas88] G. G. Kasparov, *Equivariant KK-theory and the Novikov conjecture*, Invent. Math. **91** (1988), no. 1, 147–201.

[Kaz67] D. A. Kazhdan, *On the connection of the dual space of a group with the structure of its closed subgroups*, Funkcional. Anal. i Priložen. **1** (1967), 71–74.

[KS91] G. G. Kasparov and G. Skandalis, *Groups acting on buildings, operator K-theory, and Novikov's conjecture*, K-Theory **4** (1991), no. 4, 303–337.

[KS03] ______, *Groups acting properly on "bolic" spaces and the Novikov conjecture*, Ann. of Math. (2) **158** (2003), no. 1, 165–206.

[Laf00] V. Lafforgue, *A proof of property (RD) for cocompact lattices of* $\mathrm{SL}(3,\mathbf{R})$ *and* $\mathrm{SL}(3,\mathbf{C})$, J. Lie Theory **10** (2000), no. 2, 255–267.

[Laf02a] ______, *Banach KK-theory and the Baum-Connes conjecture*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. II (Beijing, 2002) (Beijing), Higher Ed. Press, 2002, pp. 795–812.

[Laf02b] ______, *K-théorie bivariante pour les algèbres de Banach et conjecture de Baum-Connes*, Invent. Math. **149** (2002), no. 1, 1–95.

[LG97] P. Y. Le Gall, *Théorie de Kasparov équivariante et groupoïdes*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **324** (1997), no. 6, 695–698.

[Par06] W. Paravicini, *KK-theory for Banach algebras and proper groupoids*, Ph.D. thesis, november 2006.

[Ska91] G. Skandalis, *Kasparov's bivariant K-theory and applications*, Expo. Math. **9** (1991), no. 3, 193–250.

[Tu99] J. L. Tu, *La conjecture de Novikov pour les feuilletages hyperboliques*, K-Theory **16** (1999), no. 2, 129–184.

[Tza00] K. Tzanev, *C^*-algèbres de Hecke et* K-*théorie*, Ph.D. thesis, Université de Paris VII, 2000.

Maria Paula Gomez-Aparicio : Institut de Mathématiques de Jussieu, Projet d'algèbres d'Opérateurs et représentations, 175 rue du chevaleret, 75013 Paris, France.

E-mail address: gomez@math.jussieu.fr