Alcuni problemi di teoria elementare dei numeri e forme modulari

Giuseppe Melfi

November 1, 2002

Questo lavoro è diviso in tre parti indipendenti l'una dall'altra. I numeri pratici occupano la prima parte; il soggetto della seconda parte sono le successioni sum-free; nella terza parte sono presentate alcune identità aritmetiche correlate alla teoria delle forme modulari.

1. – Numeri pratici

DEFINITION **1.1** *Un intero positivo m si dice pratico se ogni intero n con $1 < n < m$ può essere espresso come una somma di divisori positivi distinti di m.*

Ci sono molte analogie tra proprietà dei numeri pratici e proprietà dei numeri primi. Sia $P(x)$ la funzione enumeratrice dei numeri pratici. Saias [9] ha dimostrato che $c_1x/\log x \le P(x) \le c_2x/\log x$ con opportune costanti positive c_1 e c_2, mentre Margenstern [4] ha iniziato uno studio sistematico di proprietà e congetture relative ai numeri pratici. In particolare, Margenstern ha congetturato che $P(x) \sim \lambda x/\log x$ per un'opportuna costante $\lambda > 0$.

Tra i risultati classici, il più importante è il seguente teorema di struttura del 1954, dovuto a Stewart [10]. Il teorema e il corollario che ne segue costituiscono il punto di partenza di ogni studio sui numeri pratici.

THEOREM **1.1** *Un intero positivo $m = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$, con $p_1 < p_2 < \cdots < p_k$ primi e $\alpha_i \ge 1$, è pratico se e solo se*

$$p_1 = 2 \quad e \quad p_{i+1} \le \sigma(p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_i^{\alpha_i}) + 1 \quad per\ i = 1, 2, \ldots, k-1,$$

ove $\sigma(n)$ è la somma dei divisori positivi di n.

COROLLARY **1.1** *Se m è pratico e n è un intero positivo che non supera $\sigma(m) + 1$, allora mn è pratico. In particolare se $n \le 2m$, allora mn è pratico.*

Uno dei risultati più interessanti che si è riusciti ad ottenere è il seguente [6]:

THEOREM **1.2** *Ogni intero positivo pari può essere espresso come somma di due numeri pratici.*

Questo teorema risolve positivamente una congettura di Margenstern sul problema di Goldbach per i numeri pratici. La dimostrazione è costruttiva e sono stati usati solo argomenti elementari. Un altro risultato di un certo interesse è il seguente:

THEOREM **1.3** *Esistono infinite terne di numeri pratici della forma* $m-2, m, m+2$.

Lo stesso enunciato per i primi è ovviamente falso, ma problemi analoghi, come quello della dimostrazione dell'esistenza di infinite coppie di primi gemelli della forma p, $p+2$, sono ancora aperti. È tuttora aperto anche il problema dell'infinità di numeri primi di Fibonacci. Tuttavia per i numeri pratici abbiamo dimostrato il seguente

THEOREM **1.4** *Sia* $u_0 = 0$*,* $u_1 = 1$ *e per* $n \geq 2$*,* $u_n = Pu_{n-1} - Qu_{n-2}$ *con* P *e* Q *interi. Se* $P^2 - 4Q > 0$ *e* $PQ + P$ *è pari, allora la successione* $\{u_n\}$ *contiene infiniti numeri pratici.*

In particolare con $P = 1$, $Q = -1$ si ottiene l'esistenza di infiniti numeri pratici di Fibonacci.

Con argomenti di tipo analitico si dimostra il seguente teorema, che fornisce una stima dall'alto della differenza tra due numeri pratici consecutivi.

THEOREM **1.5** *Sia* $\{s_n\}$ *la successione dei numeri pratici. Sia* $c > e^{-\gamma/2}$*, ove* γ *è la costante di Eulero-Mascheroni. Per* n *sufficientemente grande si ha:*

$$s_{n+1} - s_n < c\frac{s_n^{1/2}}{(\operatorname{loglog} s_n)^{1/2}}.$$

2. – Successioni sum-free

DEFINITION **2.1** *Una successione crescente di interi positivi si dice sum-free se nessun suo elemento può essere scritto come una somma di elementi precedenti distinti.*

Data una successione sum-free, denoteremo con $A(x)$ la sua funzione enumeratrice. In [3] sono dimostrate le due seguenti proposizioni:

PROPOSITION **2.1** *Ogni successione sum-free ha densità asintotica nulla.*

PROPOSITION **2.2** *Sia* $\alpha > (\sqrt{5} - 1)/2$*. Sia* $\{n_k\}$ *una successione sum-free. Allora*

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{A(x)}{x^\alpha} = 0.$$

Un problema che mi è stato proposto da Erdős riguarda l'esistenza o meno di successioni sum-free tali che $n_{k+1}/n_k \to 1$. Il seguente teorema ottenuto in collaborazione con Deshouillers [2] fornisce una risposta anche quantitativa alla questione:

THEOREM **2.1** *Sia* $\varepsilon > 0$*. Esiste una successione sum-free* $\{n_k\}$ *tale che*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{n_{k+1}}{n_k} = 1, \tag{1}$$

$$A(x) \gg x^{\frac{1}{3}-\varepsilon}. \tag{2}$$

Si può dimostrare elementarmente l'esistenza di una successione sum-free che soddisfi solo la (1). Per trovare una successione sum-free che soddisfi la (1) e la (2) si fa uso di un teorema di Erdős-Turán [4, pag. 124].

3. – Forme modulari e identità aritmetiche

Sia $\sigma_m(n)$ la somma delle m-esime potenze dei divisori positivi di n e $\sigma_m(0) = \frac{1}{2}\zeta(-m)$, dove ζ indica la funzione zeta di Riemann. Ramanujan [8] ha dimostrato nel 1916 nove identità della forma

$$\sum_{k=0}^{n} \sigma_r(k)\sigma_s(n-k) = A\sigma_{r+s+1}(n) + Bn\sigma_{r+s-1}(n), \tag{3}$$

con A e B razionali. Questo tipo di identità sono correlate a proprietà dei coefficienti di Fourier di forme modulari di peso $r+s+2$ per il gruppo modulare $\Gamma(1)$. A margine del suo lavoro, Ramanujan osservò che per n dispari si ha:

$$\sum_{k=0}^{[n/2]} \sigma_3(k)\sigma_1(n-2k) = \frac{1}{240}\sigma_5(n). \tag{4}$$

Si sa che le nove identità trovate da Ramanujan sono le sole del tipo (3). Ci si può chiedere se esistono altre identità del tipo (4). I coefficienti di Fourier di forme modulari di peso $2k$ per sottogruppi di congruenza di $\Gamma(1)$ sono spesso correlati alle funzioni $\sigma_{2k-1}(n)$, e quando si vanno a tradurre certe identità tra forme modulari in identità aritmetiche, il risultato sono sovente identità simili a quelle sopra menzionate. Per una dimostrazione dei due teoremi che seguono si veda [7].

Theorem 3.1 *Sia m un intero positivo e $\beta(m) = m^2 \prod_{p|m}(1+p^{-2})$. Per ogni $\varepsilon > 0$ ed n primo con m si ha*

$$\sum_{k=0}^{[n/m]} \sigma_1(k)\sigma_1(n-mk) = \frac{5}{12\beta(m)}\sigma_3(n) - \frac{1}{4m}n\sigma_1(n) + O\left(n^{\frac{3}{2}+\varepsilon}\right).$$

Per dimostrare questo teorema si sono studiati i coefficienti di Fourier di una particolare forma modulare per il sottogruppo $\Gamma_0(m)$. Come si può notare, nel precedente teorema è presente un termine di errore, che in alcuni casi può essere nullo. Nel seguente teorema sono enumerati questi casi. Inoltre si può dimostrare un'altra identità (la (5)) di forma leggermente diversa.

Theorem 3.2 *Se $n \equiv 2 \bmod 3$, allora*

$$\sum_{\substack{k=0 \\ k\equiv 1 \bmod 3}}^{n} \sigma_1(k)\sigma_1(n-k) = \frac{1}{9}\sigma_3(n). \tag{5}$$

Se n è un intero positivo dispari, allora

$$\sum_{k=0}^{[n/2]} \sigma_1(k)\sigma_s(n-mk) = A\sigma_{s+2}(n) + Bn\sigma_s(n), \tag{6}$$

per $(s, m, A, B) \in \{(1, 2, 1/12, -1/8), (3, 2, 1/48, -1/16), (1, 4, 1/48, -1/16)\}$.
Se $n \not\equiv 0 \bmod 3$, allora

$$\sum_{k=0}^{[n/3]} \sigma_1(k)\sigma_1(n-3k) = \frac{1}{24}\sigma_3(n) - \frac{1}{12}n\sigma_1(n). \tag{7}$$

Se $n \equiv 8 \bmod 16$ *e* $n \not\equiv 0 \bmod 5$, *allora*

$$\sum_{k=0}^{[n/5]} \sigma_1(k)\sigma_1(n-5k) = \frac{5}{312}\sigma_3(n) - \frac{1}{20}n\sigma_1(n). \tag{8}$$

Se $n \equiv 2 \bmod 3$ *oppure se* $n \equiv 1 \bmod 3$ *e esiste un primo* $p \equiv 2 \bmod 3$ *tale che* $p|n$ *ma* $p^2 \not| \; n$*, allora*

$$\sum_{k=0}^{[n/9]} \sigma_1(k)\sigma_1(n-9k) = \frac{1}{216}\sigma_3(n) - \frac{1}{36}n\sigma_1(n). \tag{9}$$

La dimostrazione delle (6) e della (7) utilizza alcune formule di Ramanujan [1, pag. 139 e pag. 460], mentre per la (5), la (8) e la (9) è stata necessaria una attenta analisi delle proprietà aritmetiche dei coefficienti di Fourier di certe forme modulari di peso 4 per i sottogruppi $\Gamma(3)$, $\Gamma_0(5)$ e $\Gamma_0(9)$ rispettivamente.

REFERENCES

[1] Berndt B. C., *Ramanujan's notebooks, III*, Springer-Verlag (1991).

[2] Deshouillers J-M., Erdős P. and Melfi, G., *On a question about sum-free sequences*, in corso di stampa su Discrete Mathematics.

[3] Erdős P., *Some remarks on number theory, III*, Mat. Lapok, **13** (1962), 28–38.

[4] Kuipers L. and Niederreiter H., *Uniform Distribution of Sequences*, John Wiley (1974).

[5] Margenstern M., *Les nombres pratiques: théorie, observations et conjectures*, J. Number Theory, **37** (1991), 1–37.

[6] Melfi, G., *On two conjectures about practical numbers*, J. Number Theory, **56** (1996), 205–210.

[7] Melfi, G., *On some modular identities*, Number Theory, Diophantine, Computational and Algebraic Aspects: Proceedings of the International Conference held in Eger, Hungary, Walter de Gruyter (1998), 371–382.

[8] Ramanujan S., *On certain arithmetical functions*, Trans. Cambridge Philos. Soc., **22** (1916), 159–184.

[9] Saias E., *Entiers à diviseurs denses 1*, J. Number Theory, **62** (1997), 163–191.

[10] Stewart, B. M., *Sums of distinct divisors*, Amer. J. Math., **76** (1954), 779–785.

Insitut de Mathématiques, Université de Lausanne
e-mail: Giuseppe.Melfi@ima.unil.ch
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Pisa) - Ciclo IX
Direttore di ricerca: Prof. Carlo Viola, Università di Pisa