Alcune notevoli identità per le somme dei divisori di certi numeri

Alla redazione di Archimede giungono con una certa frequenza segnalazioni di risultati interessanti o semplicemente curiosi di teoria dei numeri, scoperti dai lettori. Il fascino che questo ramo della matematica continua ad esercitare dopo secoli e secoli di ricerche, conferma il giudizio attribuito al grande Gauss, secondo il quale "la matematica è la regina delle scienze, e la teoria dei numeri è la regina della matematica".

Ma proprio l'enorme numero di ricerche effettuate nel passato fa sì che quasi tutti i risultati che i lettori segnalano, siano già noti da tempo, e reperibili nella vastissima letteratura dedicata alla teoria dei numeri, per esempio sul classico testo di G. H. Hardy - E. M. Wright: *An Introduction to the Theory of Numbers*, 5^a ed., Clarendon Press, Oxford 1979, oppure sulla recentissima edizione italiana del libro di H. Davenport: *Aritmetica Superiore* (traduzione dall'inglese con note aggiornate di U. Zannier), Zanichelli 1994.

Il fatto che un risultato sia già noto da tempo non toglie nulla al piacere della scoperta individuale; costringe però la redazione a respingere la quasi totalità degli articoli sull'argomento, per mancanza di spunti originali.

Il breve articolo qui di seguito pubblicato costituisce quindi un'eccezione assai notevole. Per la precisione, il lettore Giuliano Morelli ha formulato una serie di interessanti *congetture* a partire da un'accurata analisi di numerosi casi particolari.

Come è stato ribadito in varie occasioni anche su questa stessa rivista, un certo numero di verifiche effettuate su casi particolari non è sufficiente a garantire la validità generale dei risultati congetturati, ossia a trasformarli in *teoremi.*

Tuttavia, nel caso specifico, le congetture di Morelli sono state successivamente verificate al calcolatore da parte del dott. Giuseppe Melfi (Università di Pisa) su un certo numero di casi tanto elevato (oltre 2000) da rendere altamente probabile la loro correttezza in generale.

Il dott. Melfi è riuscito poi a dimostrare una delle due implicazioni relative all'identità (II), riconducendola ad una formula di Ramanujan. Non sembra invece agevole dimostrare le altre identità, partendo da risultati già noti nella letteratura; peraltro egli, confrontando le identità di Morelli con quelle di Ramanujan, ne propone qui di seguito una generalizzazione.

I. Le identità di Morelli

Come è consuetudine $\sigma(m)$ designerà la somma dei divisori del numero naturale m, inclusi 1 ed m stesso, cioè:

$$\sigma(m) = \sum_{d|m} d.$$

Ricordiamo che se $m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ allora

$$\sigma(m) = \prod_{i=1}^{k} \frac{p_i^{\alpha_i+1} - 1}{p_i - 1}.$$

Osserviamo che m ed n sono primi tra loro se e solo se $\sigma(mn) = \sigma(m)\sigma(n)$, ed in generale, invece, $\sigma(mn) \leq \sigma(m)\sigma(n)$. La funzione aritmetica σ è una funzione che pertiene alla struttura moltiplicativa degli interi.

Le identità che presenteremo coinvolgono operazioni di sommatoria che inaspettatamente si collegano alla struttura moltiplicativa della σ :

Congettura I. *Condizione necessaria e sufficiente affinché* $2n+1$ *sia primo è che*

$$\sum_{h=1}^{n} \sigma(h(2n+1-2h)) = \frac{n(n+1)(4n-1)}{6}.$$

Questa congettura ha anche una formulazione in termini geometrici: infatti, se $t_k = k(k+1)/2$ è il k-esimo numero triangolare allora

$$\sum_{h=1}^{n} \sigma(h(2n+1-2h)) = \sum_{h=1}^{n} \sigma(t_n - t_{h-1}).$$

Congettura II. *Condizione necessaria e sufficiente affinché* $2n+1$ *sia primo è che*

$$\sum_{h=1}^{n} \sigma(h(2n+1-h)) = \frac{n(n+1)(10n-1)}{6}.$$

Congettura III. *Condizione necessaria e sufficiente affinché* $4n+1$ *sia primo è che*

$$\sum_{h=1}^{n} \sigma(h(4n+1-4h)) = \frac{n(4n^2-1)}{3}.$$

Congettura IV. *Condizione necessaria e sufficiente affinché* $4n+3$ *sia primo è che*

$$\sum_{h=1}^{n} \sigma(h(4n+3-4h)) = \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}.$$

Congettura V. *Condizione necessaria e sufficiente affinché* $6n-1$ *sia primo è che*

$$\sum_{h=1}^{n} \sigma((3h-2)(6n+1-3h)) = n(12n^2-6n+1).$$

Giuliano Morelli
Via Don Minzoni, 31, Castelbelforte (MN)

II. Una generalizzazione delle identità di Morelli

Denotiamo con $\sigma_r(m)$ la somma delle r-esime potenze dei divisori di m:

$$\sigma_r(m) = \sum_{d|m} d^r.$$

Così ad esempio , se m è primo, $\sigma_r(m) = m^r + 1$. Per $r = 1$ risulta $\sigma_1(m) = \sigma(m)$, cioè la somma dei divisori di m. In accordo a S. Ramanujan, *Collected Papers,* Cambridge University Press 1927, p.136, poniamo per convenzione, $\sigma(0) = -1/24$. Ramanujan, fra le altre cose, ha dimostrato che per ogni intero positivo m vale

$$\sum_{h=0}^{m} \sigma(h)\sigma(m-h) = \frac{5\sigma_3(m) - 6m\sigma(m)}{12}.$$

Si può facilmente verificare che, se m è primo, $m = 2n+1$, l'identità di Ramanujan implica la seconda identità di Morelli. Si noti che se $2n+1$ è primo allora h e $2n+1-h$ sono primi tra loro per ogni h tra 1 ed n. Ramanujan ha dimostrato altre nove identità di questo tipo, nessuna delle quali implica una delle altre rimanenti congetture.

L'identità di Ramanujan è una generalizzazione della seconda identità di Morelli. Viene naturale chiedersi quindi se valgano delle generalizzazioni anche per le altre quattro identità. Ed in effetti una sperimentazione numerica al calcolatore ci permette di formulare le seguenti congetture:

Congettura VI. *Per ogni intero positivo* $m \equiv 1 \bmod 2$ *vale la seguente identità:*

$$\sum_{h=0}^{(m-1)/2} \sigma(h)\sigma(m-2h) = \frac{2\sigma_3(m) - 3m\sigma(m)}{24}.$$

In particolare se $m = 2n+1$ è primo, la precedente è la prima identità di Morelli.

Congettura VII. *Sia* $a \in \{1, 3\}$. *Per ogni intero positivo* $m \equiv a \bmod 4$ *vale la seguente identità:*

$$\sum_{h=0}^{(m-a)/4} \sigma(h)\sigma(m-4h) = \frac{\sigma_3(m) - 3m\sigma(m)}{48}.$$

In particolare se m è primo, con $a = 1$ si ottiene la terza identità e con $a = 3$ si ottiene la quarta identità.

Congettura VIII. *Per ogni intero positivo* $m \equiv 2 \bmod 3$ *vale la seguente identità:*

$$\sum_{h=0}^{(m-2)/3} \sigma(3h+1)\sigma(m-(3h+1)) = \frac{\sigma_3(m)}{9}.$$

Se m è primo la precedente implica la quinta identità di Morelli. Concludiamo questa breve nota con un'altra congettura, simile ma non riconducibile alle precedenti;

Congettura IX. *Per ogni intero positivo* $m \equiv 1 \bmod 2$ *vale la seguente identità:*

$$\sum_{h=0}^{(m-1)/2} \sigma(h)\sigma_3(m-2h) = \frac{\sigma_5(m) - 3m\sigma_3(m)}{48}.$$

Giuseppe Melfi
Dipartimento di Matematica
Università di Pisa