Ejercicios

1.
   - Consideramos la transformación de Möbius dada por
   $$f(z) = \frac{z-i}{z+i}.$$
   Mostrar que la imagen de $\mathbb{H}^2$ por f es el disco $\mathbb{D} = \{(x,y) : x^2+y^2 < 1\}$. Hallar explicitamente la inversa de f. Mostrar que el pullback por f^{-1} de la métrica de $\mathbb{H}^2$ por f es
   $$ds^2 = 4\frac{dx^2+dy^2}{(1-x^2-y^2)^2}.$$
   - Para $x \in (0,1)$ mostrar que
   $$d_{\mathbb{D}}(0,x) = \log\frac{1+x}{1-x} = 2\operatorname{arctanh}(x).$$
   Considerar entonces las *coordenadas polares* $(r,\theta) \mapsto \tanh(r/2)e^{i\theta}$. Mostrar que en coordeandas polares la métrica de $\mathbb{D}$ es
   $$ds^2 = dr^2 + \sinh^2(r)d\theta^2.$$
   Concluir que el perímetro de la circunferencia de radio r es $2\pi\sinh(r)$ y que el área del disco de radio r es $2\pi(\cosh(r)-1)$.

2.
   a) Calcular el área del triángulo ideal de vertices $-1, \infty, 1$. Concluir que el área de cualquier triángulo ideal es π.

   b) Demostrar que el conjunto $\{z \in \mathbb{H}^2 : |z| \geq 1 \text{ y } |\Re(z)| \leq 1/2\}$ es un dominio fundamental para $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$. Concluir que $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H}^2$ tiene área finita.

3.
   a) Probar que todo elemento de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ se escribe como producto de elementos de N y de U. Sugerencia: Considerar la acción lineal de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ en $\mathbb{R}^2$, observar que $N = \{g \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) : g(1,0) = (1,0)\}$ y $U = \{g \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) : g(0,1) = (0,1)\}$. Estudiar las órbitas de N y U respectivamente. Si $g \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ discutir según $g(1,0)$.

   b) Demostrar que todo morfismo continuo de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ a un grupo abeliano es trivial (sugerencia: usar que para todo $n \in N$ vale $a_t^{-1}na_t \to 1$ cuando $t \to +\infty$).

4. Se define el espacio proyectivo $\mathbb{P}(\mathbb{R}^n)$ como el espacio de las rectas de $\mathbb{R}^n$ que pasan por el origen. Equivalentemente
$$\mathbb{P}(\mathbb{R}^n) = (\mathbb{R}^n - \{0\})/(x \sim \lambda x, \text{ para todo } \lambda \in \mathbb{R} - \{0\})$$

a) Verificar que la acción estándar de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ en $\mathbb{R}^2$ define una acción de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ en $\mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$.

b) Se considera el mapa $f : \mathbb{P}(\mathbb{R}^2) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ que a una recta de $\mathbb{R}^2$ le asocia la tangente del ángulo con el eje Oy. Identificamos $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ con $\partial\mathbb{H}^2$, donde $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ actúa por transformaciones de Möbius. Mostrar que f es un homeomorfismo equivariante.

c) Sea $g \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) - \{\mathrm{Id}\}$. Usando la forma de Jordan de g mostrar que se cumple exactamente uno de los siguientes enunciados:

1) g **es elíptica:** g tiene un único punto fijo en $\mathbb{H}^2$.
2) g **es parabólica:** g tiene un único punto fijo en el borde $\partial\mathbb{H}^2$.
3) g **es hiperbólica:** g tiene exactamente dos puntos fijos en el borde $\partial\mathbb{H}^2$.

5. Sea Σ una superficie hiperbólica compacta y $\rho : \pi_1\Sigma \to \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ tal que $\Sigma = \rho(\pi_1\Sigma)\backslash\mathbb{H}^2$. Probar que para todo $\gamma \in \pi_1\Sigma$ vale que $\rho(\gamma)$ es hiperbólica. Concluir que en toda clase no trivial de homotopía libre de Σ hay una única geodesica cerrada.

6. Consideramos un flujo $\phi = (\phi_t : X \to X)_{t\in\mathbb{R}}$ en un espacio de métrico X y μ una probabilidad mixing para ϕ.

a) Mostrar que μ es ergódica.

b) Si además μ mide positivo en abiertos, mostrar entonces que la acción es *topologicamente mixing* i.e. para todo par de abiertos U, V de X existe t_0 tal que para todo $t > t_0$ vale $\phi_t(U) \cap V \neq \emptyset$.

7. *a*) Sea $T : X \to X$ un homeomorfismo en el espacio métrico compacto X. Consideramos la transformación $\hat{T} : X \times \mathbb{R} \to X \times \mathbb{R}$ dada por

$$\hat{T}(x, s) = (Tx, s - 1).$$

Mostrar que la acción de $\hat{T}$ es propiamente discontinua, i.e. para todo compacto $K \subset X \times \mathbb{R}$ el conjunto

$$\{n \in \mathbb{Z} : \hat{T}^n(K) \cap K \neq \emptyset\}$$

es finito.

b) Observar que la traslación en la coordenada real $\hat{\sigma}_t : X \times \mathbb{R} \to X \times \mathbb{R}$ dada por $\sigma_t(x, s) = (x, s - t)$ conmuta con $\hat{T}$. Concluir que $\hat{\sigma}_t$ induce un flujo en el cociente $\sigma = (\sigma_t : (X \times \mathbb{R})/\hat{T} \to (X \times \mathbb{R})/\hat{T})_{t\in\mathbb{R}}$. Este flujo es *la suspensión de* T.

c) Sea μ una medida ergódica para T positiva en abiertos de X. Mostrar que $\mu \times dt$ induce una medida positiva en abiertos de $(X \times \mathbb{R})/\hat{T}$, invariante por σ_t. Mostrar que esta medida es ergódica pero no mixing.

8. Mostrar que $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ no tiene representaciones unitarias de dimensión finita.

9. Mostrar que existe una constate $c > 0$ tal que

$$\frac{1}{\log R} \#\{(n, m) \in \mathbb{Z}^2 \cap B(0, R) : n^2 + 1 = 2m^2\} \to c$$

cuando $R \to \infty$, donde $B(0, R) = \{v \in \mathbb{R}^2 : \|v\| \leq R\}$.