INTRODUCCIÓN A LA GEOMETRÍA DIFERENCIAL Y RIEMANNIANA

ESCUELA CIMPA
SANTIAGO DE CHILE, 2014

MICKAËL CRAMPON

Contents

1. Introducción: los límites de la noción de subvariedad

El círculo
$$C = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ \|x\| = 1\}$$
está definido como un subconjunto de $\mathbb{R}^2$, lo que nos permite verlo como espacio topológico con la topología inducida.
El círculo es un espacio de dimension 1: "se puede ver". De hecho, si $x_0 = (1,0) \in C$ y $\theta(x) \in [0, 2\pi)$ es el ángulo entre x_0 y x, la aplicación
$$\begin{array}{rccc} \phi: & C & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \theta(x) \end{array}$$
es una biyección que identifica el círculo con una parte de $\mathbb{R}$. Pero eso no es suficiente: por ejemplo, existe una biyección continua de $[0,1]$ en $[0,1] \times [0,1]$ (curva de Peano). Para decir que dos espacios topológicos son similares, la buena noción es el homeomorfismo. Pero no existe un homeomorfismo entre el círculo y una parte de $\mathbb{R}$ (¿porqué ?). Lo que sí existen son homeomorfismos locales: cada punto de C tiene una vecindad homeomórfica a una parte de $\mathbb{R}$, pues si $x_0 \in C$, la función
$$\begin{array}{rccc} \phi_{x_0}: & C \setminus \{x_0\} & \longrightarrow & (0, 2\pi) \\ & x & \longmapsto & \widehat{(x_0, x)} \end{array}$$
es un homeomorfismo. La función se llama una carta local de C, permiten definir coordenadas locales, es decir en una vecindad de un punto. Con dos tales funciones podemos cubrir el círculo (por ejemplo Φ_{x_0} y Φ_{-x_0}), y podemos decir que el círculo como espacio topológico es localmente igual a $\mathbb{R}$. Lo mismo se podría hacer con la esfera $\mathbb{S}^2 = \{x \in \mathbb{R}^3,\ \|x\| = 1\}$, que es localmente igual a $\mathbb{R}^2$.

Las cartas locales nos permiten también definir una estructura diferenciable en el círculo, nos permiten decir lo que significa que una funcion definida sobre C es diferenciable.
Por ejemplo, ¿qué significa que la función $f(x) = \|x_0 x\|$ es diferenciable de C en $\mathbb{R}$? f es la restricción al círculo de $F(x_1, x_2) = \sqrt{(1-x_1)^2 + x_2^2}$ definida en todo $\mathbb{R}^2$. F es continua, diferenciable en $\mathbb{R}^2 \setminus \{x_0\}$. Su diferencial en el punto $x \neq 0$ es una aplicación lineal $dF(x) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida para $u = (u_1, u_2)$ por
$$dF(x)(u) = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(x), \frac{\partial F}{\partial x_2}(x)\right) \left(\begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \end{array}\right) = \frac{\partial F}{\partial x_1}(x) u_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2}(x) u_2.$$
Ahora, ¿qué es la diferencial de f en un punto $x \in C$? Es la restricción de $dF(x)$ a los vectores tangentes a C en x; esos vectores forman un subespacio de $\mathbb{R}^2$ de dimensión 1 que se llama el espacio tangente a C en x.

Todo eso lo podemos hacer porque el círculo es una subvariedad del plano euclideano y que la función elegida tiene un sentido en todo $\mathbb{R}^2$.

Definición 1.1. *Un subconjunto M de $\mathbb{R}^{m+k}$ es una subvariedad de dimensión m si para todo $x \in M$, existe una vecindad abierta U de x en $\mathbb{R}^{m+k}$ y un difeomorfismo $\mathcal{C}^\infty$ $\Phi : U \longrightarrow V \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$ tal que $\Phi(U \cap M) = \mathbb{R}^m \times \{0\}^k$.*

Ejercicio 1. Sea $f : \mathbb{R}^{m+k} \longrightarrow \mathbb{R}^k$ una submersión, es decir una aplicación $\mathcal{C}^\infty$ cuya diferencial es suryectiva. Demostrar que $f^{-1}(\{0\})$ es una subvariedad de $\mathbb{R}^{m+k}$ de dimensión m.

Pero ¿cómo hubiéramos hecho en el caso que la función estuviera definida solo en C y no en $\mathbb{R}^2$? Por ejemplo la función $g(x) = d_C(x_0, x),\ x \in C$ que mide la distancia entre x y x_0 *en* C:
$$g(x) = \inf length(\gamma) = \inf \int_0^1 \|\gamma'(t)\|\ dt$$

donde el infimum está tomado sobre todas las curvas $\gamma : [0,1] \longrightarrow C$ entre x_0 y x. Obviamente, $g(x)$ es el ángulo mínimo entre x_0 y x que toma sus valores en $[0,\pi]$. Así, g es una función de C en $[0,\pi]$. Para investigar su diferenciabilidad, buscamos una fórmula local que defina g. En una vecindad de un punto $x \neq x_0$, *identificamos* a $C \setminus \{x_0\}$ con $(0,2\pi)$ gracias a Φ_{x_0}, y g se lee como la función

$$\begin{array}{rcl} g_{x_0} \quad : (0,2\pi) & \longrightarrow & [0,\pi] \\ \theta & \longmapsto & \min(\theta, \theta-\pi) \end{array}$$

que es diferenciable sino en π, que corresponde al punto $-x_0$ de C. En una vecindad de x_0, utilizamos Φ_{y_0}, donde $y_0 = (1,0)$, para identificar a $C \setminus \{y_0\}$ con $(0,2\pi)$, y g se lee como

$$\begin{array}{rcl} g_{y_0} \quad : (0,2\pi) & \longrightarrow & [0,\pi] \\ \theta & \longmapsto & \min(\pi/2+\theta, |3\pi/2-\theta|) \end{array}$$

que es diferenciable sino en $\pi/2$ y $3\pi/2$, que corresponde respetivamente a los puntos $-x_0$ y x_0 de C. Concluimos que g es diferenciable en todo C sino en $\pm x_0$.
Para tener una fórmula de la diferencial, también usamos las expresiones anteriores de g. Obviamente, la fórmula de la diferencial depende de la carta que utilizamos. Por ejemplo, escogemos un punto $x \neq \pm x_0$ tal que $\Phi_{x_0}(x) = \theta_{x_0}(x) < \pi/2$ y $\Phi_{y_0} = \theta_{y_0}(x) = 3\pi/2 + \theta_{x_0}(x)$. Se puede utilizar la carta Φ_{x_0} o Φ_{y_0}. En el primer caso, $g'_{x_0}(\theta_{x_0}(x)) = 1$, en el segundo $g'_{y_0}(\theta_{y_0}(x)) = -1$.

Las observaciones importantes son las siguientes.

- Todas las cartas $\Phi_x,\ x \in C$ dan los mismos puntos de diferenciabilidad de g en C: el conjunto $C \setminus \{x_0, -x_0\}$. Si no fuera así, hubieran puntos todos distintos $x, y, y' \in C$ tales que g_y es diferenciable en $\Phi_y(x)$ y $g_{y'}$ no es diferenciable en $\Phi_{y'}(x)$. Pero $g_{y'} = g \circ \Phi_{y'}^{-1} = g \circ \Phi_y^{-1} \circ \Phi_y \circ \Phi_{y'}^{-1} = g_y \circ \Phi_y \circ \Phi_{y'}^{-1}$. Entonces, *como* $\Phi_y \circ \Phi_{y'}^{-1}$ *es diferenciable*, g_y es diferenciable en $\Phi_y(x)$ si y solo si $g_{y'}$ lo es en $\Phi_{y'}(x)$.
- Si bien las fórmulas de la diferencial dependen de la carta, la relación anterior entre g_y y $g_{y'}$ dan, por la fórmula de Leibniz,

$$dg_{y'} = dg_y \circ d(\Phi_y \circ \Phi_{y'}^{-1}).$$

  Es decir no hay fórmula por la diferencial pero todas las fórmulas posibles mediante las cartas tienen algo en común, tienen algo que los relacione: el cambio de cartas (o cambio de coordenadas) $\Phi_y \circ \Phi_{y'}^{-1}$. De cierta forma podríamos decir que la diferencial de g es *todas las diferenciales* $\{g_x,\ x \in C\}$.

El ejemplo del círculo ilustra las preguntas y dificultades que uno puede tener a considerar un objecto (el círculo C) en si mismo o como sub-objeto (sub-variedad) de otro ($\mathbb{R}^2$). La noción de variedad diferenciable es la que permite considerar al objeto en si (el circulo C) como un objeto diferenciable con el cual podremos hacer cálculo diferencial.
Un ejemplo más evolucionado que el círculo o la esfera es el plano proyectivo real. Es un objeto cuya dimensión es claramente 2 pero no "se puede ver o dibujar" en $\mathbb{R}^3$, aunque la definición necesite solo a $\mathbb{R}^3$, pues el plano proyectivo real consista en el conjunto de líneas vectoriales de $\mathbb{R}^3$. Si lo queremos ver como subconjunto de algún $\mathbb{R}^n$, hay que subir a $\mathbb{R}^4$, y eso no es de lo más natural y es mucho más fácil trabajar con cartas locales que nos permiten verlo bien como un objeto de dimensión 2.

2. Variedades

Consideramos únicamente espacios topológicos separados y segundo numerable:

- separado o de Hausdorff significa que cada dos puntos tienen vecindades abiertas disjuntas;

- segundo numerable significa que el espacio tiene una basis de abiertos numerable: existe una familia $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de abiertos tales que cualquier abierto del espacio contiene algún U_i; de forma similar, cualquier abierto se puede escribir como unión de U_i.

2.1. **Definiciones fundamentales.**

Definición 2.1. *Una* variedad topológica de dimensión $m \in \mathbb{N}$ *es un espacio topológico X que es localmente homeomórfico a un abierto de $\mathbb{R}^m$: en cada punto $x \in X$, existe una vecindad abierta U y un homeomorfismo Φ de U en un abierto V de $\mathbb{R}^m$.*

Si en la definición m pudiera depender de x, entonces sería constante sobre todo componente conexo. Así la noción de dimensión tendría sentido en un componente conexo.

Definición 2.2. *Un* atlas *de una variedad topológica X de dimension m es un conjunto de cartas locales $(U_i, \Phi_i)_{i\in I}$ tales que $\bigcup U_i = X$ y Φ_i es un homeomorfismo de U_i en su imagen en $\mathbb{R}^m$.*
Un atlas es diferenciable *(resp. $\mathcal{C}^r$, $r > 0$) si los cambios de cartas son diferenciables (resp. $\mathcal{C}^r$): la aplicación $\Phi_i \circ \Phi_j^{-1}$ definida sobre $\Phi_j^{-1}(U_i) \cap V_j$ es un difeomorfismo de clase $\mathcal{C}^\infty$ (resp. $\mathcal{C}^r$).*
Un atlas es maximal si cualquier carta local (U, Φ) tal que $\Phi\circ\Phi_i^{-1}$ es diferenciable es ya contenida en el atlas.

Un ejemplo de atlas vimos con el círculo. Las proyecciones estereográficas de las esferas son generalizaciones de ese ejemplo: el atlas mínimo de una esfera contiene dos cartas.
Un atlas siempre se puede completar, lo que permite definir:

Definición 2.3. *Una variedad diferenciable (resp. $\mathcal{C}^r$) de dimensión $m \in \mathbb{N}$ es un una variedad topológica X con un atlas diferenciable maximal $(U_i, \Phi_i)_{i\in I}$.*

Ejercicio 2. Definir una estructura de variedad en el producto de dos variedades M y N.

Ejercicio 3. Sea Γ el subgrupo de isometrías de $\mathbb{R}^2$ generado por las translaciones de vectores u y v non colineales. Demostrar que el toro $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\Gamma$ es una variedad.

Ejercicio 4 (Espacio proyectivo). Sea $\mathbb{RP}^n$ el conjunto de las rectas vectoriales del espacio vectorial $\mathbb{R}^{n+1}$, es decir $\mathbb{RP}^n = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}/\sim$, donde $u \sim v \Leftrightarrow \exists\lambda \neq 0, u = \lambda v$. Equipamos $\mathbb{RP}^n$ de la topología inducida por $\mathbb{R}^{n+1}$. Denotamos por $[x]$ la clase de equivalencia de $x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ en $\mathbb{RP}^n$. Sea H un hiperplano de $\mathbb{R}^{n+1}$ que no contiene al origen 0, y

$$\begin{array}{rcl} p_H \ : \mathbb{RP}^n & \longrightarrow & H \\ [x] & \longmapsto & [x] \cap H. \end{array}$$

Demostrar que la familia $(p_H)_H$ permite definir un atlas sobre $\mathbb{RP}^n$, que es entonces una variedad de dimensión n.

Ejercicio 5. Demostrar que cualquier superficie compacta orientable admite un atlas con 3 cartas locales. (Indicación: utilizar la clasificación de las superficies compactas por género.)

De esa forma, podemos decir cuando una aplicación entre variedades es diferenciable.

Definición 2.4. *Sean M y N dos variedades diferenciables. Una aplicación $f : M \longrightarrow N$ es diferenciable si, para todo punto $x \in M$, cartas locales $\Phi : U \subset M \longrightarrow V \subset \mathbb{R}^m$ en x y $\Phi' : U' \subset M' \longrightarrow V' \subset \mathbb{R}^{m'}$ en $f(x)$, la función compuesta $\Phi' \circ f \circ \Phi^{-1} : V \longrightarrow V'$ es diferenciable.*

Como los cambios de cartas son diferenciables, para investigar la diferenciabilidad de f en $x \in M$, basta elegir una carta en x y otra en $f(x)$ y verificar que la función compuesta está diferenciable. Es lo que pudimos ver en el ejemplo del círculo.
Un *difeomorfismo* de M en N es una función diferenciable que es un homeomorfismo y cuyo inverso es diferenciable. También se puede definir la noción de difeomorfismo local.
Las funciones diferenciables $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ juegan un rol importante en lo que sigue. Su conjunto

denotado por $\mathcal{C}^\infty(M)$ es un anillo.

Para probar que un espacio es una variedad, muchas veces se observa que es una sub-variedad de otra variedad bien conocida:

Ejercicio 6. Demostrar que los conjuntos $GL(n,\mathbb{R}), SL(n,\mathbb{R}), O(n)$ son variedades, demostrando que son subvariedes de $\mathcal{M}(n,\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{2n}$. Calcular su dimensión.

Ejercicio 7. ($\star$) Sea M una variedad y Γ un grupo de difeomorfismos de M actuando de forma

- libre: no hay elemento $g \in \Gamma \setminus \{Id\}$ tal que exista x fijo por g: $g(x) = x$; y
- propiamente discontinua: dado un compacto $K \subset M$, existe un número finito de $g \in \Gamma$ tales que $gK \cap K \neq \emptyset$.

Demostrar que M/Γ tiene una estructura de variedad.

Si f es un homeomorfismo local de un espacio topológico X en una variedad M con atlas $(U_i, \Phi_i)_{i\in I}$, se puede definir una estructura de variedad en X con $(f^{-1}(U_i), \Phi_i \circ f)_{i\in J}$, en que J es el conjunto por lo cual $f^{-1}|_{U_i}$ es un homeomorfismo.
Ahora, una observación interesante: ciertos espacios topológicos admiten varias estructuras diferenciables. Es decir, para un mismo espacio topológico X, podemos definir dos atlas que hacen de X variedades X_1 y X_2, tales que *no existe* un difeomorfismo entre X_1 y X_2 (aunque, por supuesto, exista un homeomorfismo). Es el caso por ejemplo de espacios topológicos simples como el espacio euclideano $\mathbb{R}^4$ que admite un continuum de estructuras diferenciables, y $\mathbb{S}^7 \subset \mathbb{R}^8$, aunque el espacio euclideano $\mathbb{R}^8$ mismo no admita otra estructura diferenciable...

Ejercicio 8. ¿Cómo definir una subvariedad de una variedad ?

2.2. **Espacio y fibrado tangente.**

2.2.1. *Vectores y espacio tangentes.* Si M es una subvariedad de $\mathbb{R}^{m+k}$ de dimensión m, el espacio tangente T_xM a M en $x \in M$ es el subespacio vectorial de dimensión m de los vectores de base x y tangentes a M. Lo podemos definir como

$$T_xM = \{\gamma'(0),\ \gamma : (-1,1) \longrightarrow M \text{ curva diferenciable tal que } \gamma(0) = x\}.$$

En una variedad, no es claro lo que significa $\gamma'(0)$.

Sean M una variedad diferenciable de dimensión m, $x \in M$ y $\Phi : U_\Phi \longrightarrow V_\Phi$ una carta en x. Una curva $\gamma : (-1,1) \longrightarrow M$ tal que $\gamma(0) = x$ es diferenciable en x si y solo si $\Phi \circ \gamma$ es diferenciable en 0. Es fácil ver que el conjunto

$$E_\Phi(x) = \{(\Phi \circ \gamma)'(0),\ \gamma \text{ curva tal que } \gamma(0) = x\}$$

es un espacio vectorial de dimensión m. Ahora, si $\Psi : U_\Psi \longrightarrow V_\Psi$ es otra carta en x, el conjunto $E_\Psi(x) = \{(\Psi \circ \gamma)'(0),\ \gamma \text{ curva tal que } \gamma(0) = x\}$ es tambień un espacio vectorial de dimensión m y el cambio de carta $\Psi \circ \Phi^{-1}$ permite identificar los vectores dados por una única curva γ, pues tenemos

$$(\Psi \circ \gamma)'(0) = d(\Psi \circ \Phi^{-1})(\Phi(x))((\Phi \circ \gamma)'(0)).$$

Un vector tangente a M en x será entonces definido por

$$\gamma'(0) = \{(\Phi \circ \gamma)'(0),\ (U, \Phi) \text{ carta en } x\}.$$

El espacio tangente a M en x es

$$T_xM = \{\gamma'(0),\ \gamma \text{ curva tal que } \gamma(0) = x\},$$

y sobre el definimos las leyes siguientes:

$$\gamma'(0) + \eta'(0) = \{(\Phi \circ \gamma)'(0) + (\Phi \circ \eta)'(0),\ (U, \Phi) \text{ carta en } x\},$$

$$\lambda \cdot \gamma'(0) = \{\lambda(\Phi \circ \gamma)'(0),\ (U, \Phi) \text{ carta en } x\},\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Gracias a las observaciones anteriores, se tiene que

Teorema 2.5. *El espacio tangente en un punto de una variedad diferenciable M de dimensión m es un espacio vectorial de dimension m.*

Ejercicio 9. Sea M una subvariedad de $\mathbb{R}^{m+k}$ de dimensión m definido por $M = f^{-1}(\{0\})$, $f : \mathbb{R}^{m+k} \longrightarrow \mathbb{R}^k$ una submersión. Demostrar que el espacio tangente a M en $x \in M$ es

$$T_xM = Im(df^{-1}(f(x))) = df^{-1}(f(x))(\mathbb{R}^k).$$

2.2.2. *Diferencial de una aplicación diferenciable en un punto.* Si $f : M \longrightarrow N$ es una aplicación diferenciable entre dos variedades, podemos definir la diferencial de f en un punto $x \in M$ como la aplicación lineal

$$df(x) : T_xM \longrightarrow T_{f(x)}N$$

dada por

$$df(x)(\gamma'(0)) = (f \circ \gamma)'(0).$$

Eso tiene sentido: γ siendo una curva en M tal que $\gamma(0) = x$, $f \circ \gamma$ es una curva en N tal que $f \circ \gamma(0) = f(x)$.

Ejercicio 10. Calcular las diferenciales de las aplicaciones $\det : A \in GL(n, \mathbb{R}) \longmapsto \det A$ y $f : A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{R}) \longmapsto Tr(A^tA)$.

Ejercicio 11. ¿Cuáles son los espacios tangentes de $SL(n, \mathbb{R})$ y $O(n)$ en la identidad ?

2.2.3. *Fibrado tangente.* Consideremos al conjunto

$$TM = \bigcup_{x \in M} \{x\} \times T_xM.$$

Si $\{(U, \Phi)\}$ es el atlas que define M, entonces la familia $\{(\mathcal{U}, \Psi)\}$ definida por

$$\mathcal{U} = \{\{x\} \times T_xM,\ x \in U\}$$

y

$$\begin{array}{rccc} \Psi : & \mathcal{U} & \longrightarrow & V \times \mathbb{R}^m \\ & (x, u) & \longmapsto & (\Phi(x), d\Phi(x)(u)) \end{array}$$

es un atlas para TM, que hace de TM una variedad diferenciable[1]. Ese atlas es el atlas canónico de TM. Toma valores en $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ y TM es una variedad de dimension $2m$.

La proyección $\begin{array}{ccc} \pi : TM & \longrightarrow & M \\ (x, u) & \longmapsto & x \end{array}$ es una aplicación diferenciable de fibras $\pi^{-1}(x) = T_xM$ todas isomorfas a $\mathbb{R}^m$. Por eso, TM se llama el *fibrado tangente* a M.

Ejercicio 12. ($\star$) Consideremos la esfera $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$. Demostrar que

$$S\mathbb{S}^2 = \{u \in T\mathbb{S}^2,\ \|u\| = 1\}$$

es homemórfico a $SO(3)$.

2.2.4. *Aplicación tangente.* Sea $f : M \longrightarrow N$ una aplicación diferenciable entre variedades. La aplicación tangente es la aplicación y definida por

$$\begin{array}{rccc} Tf : & TM & \longrightarrow & TN \\ & (x, u) & \longmapsto & (f(x), df(x)(u)). \end{array}$$

Para decirlo de otra forma, la aplicación Tf es la aplicación entre los fibrados tangentes TM y TN, definida por $Tf = (f, df)$: $Tf(x, u) = Tf(x)(u) = (f(x), df(x)(u))$.
Vemos así que la aplicación Ψ que aparece en el atlas canónico de TM es $\Psi = T\Phi$.

Ejercicio 13 (Fórmula de Leibniz). Sean M, N, V tres variedades, y $f : M \longrightarrow N$, $g : N \longrightarrow V$ dos aplicaciones diferenciables. Demostrar que $T(g \circ f) = Tg \circ Tf$.

[1] Si la variedad M hubiera sido $\mathcal{C}^r$, $r \geqslant 1$, entonces TM sería una variedad $\mathcal{C}^{r-1}$.

2.3. Coordenadas locales. Las cartas locales de una variedad M permiten definir coordenadas locales. Sea $\Phi : U \longrightarrow V$ una carta local en x_0, tal que $\Phi(x_0) = 0 \in V \subset \mathbb{R}^m$.
Cada punto de V tiene coordenadas como elemento de $\mathbb{R}^m$. Gracias a Φ, identificamos a $U \subset M$ con V para poder definir coordenadas $(x_1, \cdots, x_m)$ en U: las coordenadas de x son las del punto $\Phi(x)$ en $\mathbb{R}^m$. Es exactamente lo que uno hace cuando parametriza el círculo por $\theta \in (0, 2\pi)$ mediante la carta local Φ_{x_0}.
El atlas que define la variedad M proporciona así un sistema de coordenadas locales.

Ahora sea $f : M \longrightarrow N$ una aplicación diferenciable entre dos variedades diferenciables, de dimensión m y n respectivamente. Sean x_0 un punto de M y $y_0 = f(x_0)$ su imagen, $(x_1, \cdots, x_m)$ coordenadas locales en un abierto U de M que contiene a x_0. Podemos suponer que U es suficientemente pequeño para que en $f(U)$ tengamos coordenadas locales $(y_1, \cdots, y_n)$. De esa forma, podemos escribir f "en coordenadas" como $f = (f_1, \cdots, f_n)$:

$$f(x_1, \cdots, x_m) = (f_1(x_1, \cdots, x_m), \cdots, f_n(x_1, \cdots, x_m)).$$

La diferencial de f en x podrá ser vista entonces como una matriz:

$$df(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_m}(x)\right) = \begin{pmatrix} df_1(x) \\ \vdots \\ df_n(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(x) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(x) \end{pmatrix}.$$

Hacemos así cálculo diferencial en variedades. Por ejemplo, tenemos la fórmula de Taylor al orden 1:

$$f(x) = f(x_0) + df(x_0)(x - x_0) + o(\|x - x_0\|).$$

El sistema de coordenadas locales del fibrado tangente TM es el dado por el atlas canónico, previamente definido. Si $(x_1, \cdots, x_m)$ son coordenadas locales en $U \subset M$, las coordenadas locales correspondientes en $TU = \bigcup_{x \in U} \{x\} \times T_x M$ se escriben

$$(x_1, \cdots, x_m, \frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_m}).$$

Consiste en pegar en M las coordenadas de $U \times \mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ mediante $\Psi = (\Phi, d\Phi)$ (El primer $\mathbb{R}^m$ hay que considerarlo más bien como "espacio", es decir espacio euclideano, y el segundo como tangente, es decir espacio vectorial). Si $(u_1, \cdots, u_n)$ es la base canónica de $\mathbb{R}^m$, el vector $\frac{\partial}{\partial x_i}(x)$ de $T_x M$ es la imagen recíproca del vector u_i:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(x) = d\Phi^{-1}(\Phi(x))(u_i) = (d\Phi(\Phi(x)))^{-1}(u_i).$$

Lo que eso significa es lo siguiente: mediante Φ, identificamos $U \subset M$ con una parte de $\mathbb{R}^m$. En cada punto $y = \Phi(x)$ de $\mathbb{R}^m$, tenemos la base canónica de vectores tangentes, y los ejes de coordenadas que son las líneas generadas por esos vectores. Mediante Φ^{-1} podemos pegar en M esos ejes que son curvas en M teniendo a x como punto de intersección. El vector $\frac{\partial}{\partial x_i}(x)$ debe ser entendido como un vector tangente al i-esimo eje en x (es el vector tangente a la curva que sigue al eje con "velocidad euclideana" 1).

Ejercicio 14. Sea $x \in M$ y $(x_1, \cdots, x_m)$, $(y_1, \cdots, y_m)$ dos sistemas de coordenadas locales dados por cartas locales (U, Φ), (V, Ψ), tales que $x \in U \cap V$. Expresar el sistema de coordenadas $(\frac{\partial}{\partial y_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial y_m})$ en función de $(\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_m})$.

2.4. Campos de vectores. Un *campo de vectores* en una variedad M es una sección del fibrado tangente TM, es decir una aplicación *diferenciable* $X : M \longrightarrow TM$ tal que $\pi \circ X(x) = x$ donde $\pi : TM \longrightarrow M$ es la proyección canónica del fibrado. Con palabras: en cada punto x de M , escogemos un vector tangente de forma diferenciable.

Otra forma de verlo: localmente, un campo de vectores X se puede escribir con coordenadas locales:

$$X = X_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + X_m \frac{\partial}{\partial x_m} = (X_1, \cdots, X_m),$$

con $X_i \in \mathcal{C}^\infty(M)$.

Denotamos por $\mathcal{X}(M)$ el conjunto de campos de vectores en M. Eso forma un $\mathcal{C}^\infty(M)$-módulo de la forma siguiente:

$$(X+Y)(x) = X(x) + Y(x),\ (f \cdot X)(x) = f(x)X(x),\ X, Y \in \mathcal{X}(M),\ f \in \mathcal{C}^\infty(M).$$

2.4.1. *Imagen de un campo de vectores por una aplicación diferenciable.* Sea $f : M \longrightarrow N$ un difeomorfismo.
La imagen (o *pull-on*) del campo de vectores X en M por f es el campo de vectores f_*X en N definido por $f_*X(y) = df(x)(X(f^{-1}(x)))$.
El *pull-back* del campo de vectores Y en N por f es el campo de vectores f^*Y en N definido por $f^*Y(x) = df^{-1}(x)(Y(f(x)))$.

2.4.2. *Flujo de un campo de vectores.* La ecuación diferencial en M

$$y' = X(y)$$

tiene una única solución maximal, una vez dada un punto inicial $y(0) = x_0$, la curva integral de X desde el punto x_0, que llamaremos $\varphi_X(x_0) : (t_{x_0}, T_{x_0}) \longrightarrow M$ con $t_{x_0}, T_{x_0} \in \mathbb{R} \cup \pm\infty$. Cuando todas las curvas están definidas sobre $\mathbb{R}$, decimos que el campo de vectores es completo (eso pasa por ejemplo si M es compacta). En ese caso, podemos definir el *flujo de* X como el flujo de la ecuación diferencial, es decir

$$\begin{array}{llll} \varphi_X : & M \times \mathbb{R} & \longrightarrow & M \\ & (x,t) & \longmapsto & \varphi_X^t(x) = \varphi_X(x,t). \end{array}$$

cada φ_X^t es un difeomorfismo de M y tenemos la relación $\varphi_X^{t+s} = \varphi_X^t \circ \varphi_X^s = \varphi_X^s \circ \varphi_X^t,\ s, t \in \mathbb{R}$. En otras palabras, $(\varphi_X^t)_{t\in\mathbb{R}}$ forma un grupo a un parámetro de difeomorfismos.

Ejercicio 15. Sean X un campo de vectores completo en una variedad M, y $f : M \longrightarrow M$ un difeomorfismo. Demostrar que f_*X es completo. ¿Cuál es el flujo que genera en M ?

Ejercicio 16. Construir en la esfera $\mathbb{S}^2$ y el toro $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ un campo de vectores que genera un flujo cuyas órbitas son todas periódicas, es decir para todo x, existe $T > 0$ tal que $\varphi_X^t(x) = x$. Es posible hacer lo mismo en una superficie orientable de género 2 ?

2.4.3. *Derivada de Lie de una función diferenciable.* La *derivada de Lie* de una función $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ en la dirección de un campo de vector $X \in \mathcal{X}(M)$ es la función $L_X f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ definida por

$$L_X f(x) = df(x)(X(x)) = \lim_{t\to 0} \frac{f(\varphi_X^t(x)) - f(x)}{t}.$$

Debe ser entendido como la diferencial de f en la dirección de X. Es obvio que

$$L_{X+Y} f = L_X f + L_Y f,\ L_{aX} f = a L_X f,\ a, f \in \mathcal{C}^\infty M, X, Y \in \mathcal{X}(M).$$

En coordenadas locales, si $X = (X_1, \cdots, X_m)$, tenemos

$$L_X f(x) = X_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + X_m \frac{\partial f}{\partial x_m}.$$

Una observación fácil pero importante es que $X = Y$ si y solo si para cualquiera $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, $L_X f = L_Y f$.

Ejercicio 17. Una derivación $D : \mathcal{C}^\infty(M) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$ es una aplicación lineal tal que $D(fg) = D(f)g + fD(g)$. Si $X \in \mathcal{X}(M)$, L_X es una derivación. Demostrar que toda derivación es de la forma L_X.

2.4.4. *Derivada de Lie de un vector o corchete de Lie.* Queremos ver como definir la derivada de un campo Y de vectores en la dirección de otro X. En el espacio euclideano $\mathbb{R}^m$, lo más lógico sería utilizar la estructura afín para decir

$$\nabla_X Y(x) = \lim_{t\to 0} \frac{Y(\varphi_X^t(x)) - Y(x)}{t}.$$

En una variedad, podríamos hacer lo mismo mediante las cartas locales. Pero el resultado depende de la carta, lo que significa que no tiene ningún sentido.
Una solución consiste en definir una forma de comparar los vectores tangentes a M en dos puntos distintos, tal como lo podemos hacer en $\mathbb{R}^m$ mediante una translación. Esa solución consiste en definir una conexión, como lo veremos más adelante.
Otra solución consiste en darse cuenta de que ya en $\mathbb{R}^m$ hubiéramos podido hacerlo de otra forma. La aplicación φ_X^t es un difeomorfismo de M en M, así podemos definir el pull-back del vector $Y\varphi_X^t(x))$ por φ_X^t que es un vector tangente a M en x. La *derivada de Lie* de Y en la dirección de X es

$$L_X Y = \lim_{t\to 0} \frac{\varphi_X^{-t}{}_* Y(x) - Y(x)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{d\varphi_X^{-t}(Y(\varphi_X^t(x))) - Y(x)}{t}.$$

Esa fórmula tiene sentido, sea en $\mathbb{R}^m$ o en cualquier variedad.

Ejercicio 18. Demostrar que en coordenadas locales, con $X = \sum_i X_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, $Y = \sum_i Y_i \frac{\partial}{\partial x_i}$,

$$(L_X Y)_i = L_X Y_i - L_Y X_i.$$

El ejercicio anterior permite entender la acción del campo de vectores $L_X Y$ sobre las funciones:

Lema 2.6. *La acción del campo de vectores $L_X Y$ sobre $\mathcal{C}^\infty(M)$ es dada por*

$$L_{L_X Y}(f) = L_X L_Y f - L_Y L_X f,\ f \in \mathcal{C}^\infty(M).$$

Es importante ver que el operador $L_X L_Y - L_Y L_X$ que parece ser de orden 2 es al final una derivación. La forma más común de denotar $L_X Y$ viene de ese lema: es el corchete de Lie

$$[X, Y] := L_X Y.$$

Ejercicio 19. Demostrar que el corchete de Lie satisface las propiedades siguientes:

$$[X, Y] = -[X, Y],$$

$$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0,$$

$$[X, fY] = L_X f Y + f[X, Y],$$

para todos $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$, $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$.

Ejercicio 20. (*) Sean $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ dos campos de vectores completos, generando los flujos φ_X^t y φ_Y^s. Sea U un abierto de M. Definemos para cada $x \in U$ el intervalo $I_X(x)$ como el intervalo $I \ni 0$ más grande para lo cual $\varphi_X^t(x) \in U$ para todo $t \in I$. De la misma forma definamos $I_Y(x)$. Demostrar que $[X, Y] = 0$ en U si y solo si $\varphi_X^t \circ \varphi_Y^s(x) = \varphi_Y^s \circ \varphi_X^t(x)$ para todo $x \in U$ y todos esos s, t tales que $t \in I_X(x) \cap I_X(\varphi^s(x))$ y $s \in I_Y(x) \cap I_Y(\varphi^t(x))$.
Versión corta del ejercicio: demostrar que $[X, Y] = 0$ en U si y solo si las restricciones de φ_X^t y φ_Y^s a U comutan.

Ejercicio 21. Sea $f : M \longrightarrow N$ una aplicación diferenciable. Demostrar que para todos $X, Y \in \mathcal{X}(M)$,

$$[df(X), df(Y)] = df([X, Y]).$$

2.5. **Espacio y fibrado cotangente.** Sean M una variedad diferenciable de dimensión m y $x \in M$. El espacio dual del espacio tangente T_xM es el espacio vectorial de las formas lineales sobre T_xM, que es también de dimensión m. Se llama el *espacio cotangente* de M en x y lo denotamos por T_x^*M.
Ya nos hemos encontrado con un elemento del espacio cotangente: la diferencial $df(x)$ de una función $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ es un elemento de T_x^*M.

Tal como el espacio tangente, definimos el *fibrado cotangente* como

$$T^*M = \bigcup_{x\in M} \{x\} \times T_x^*M,$$

con proyección $\pi^* : T^*M \longrightarrow M$. Es una variedad de dimensión $2m$: dado un atlas $\{(U,\Phi)\}$ de M, el atlas canónico de TM es definido por $(\mathcal{U}^*, \Psi^*)$ donde

$$\mathcal{U}^* = \{\{x\} \times T_x^*M,\ x \in U\}$$

y

$$\begin{array}{rccl} \Psi : & \mathcal{U}^* & \longrightarrow & V \times \mathbb{R}^m \\ & (x,\alpha) & \longmapsto & \left((\Phi(x), (\alpha(d\Phi(x)^{-1}(u_1)), \cdots, \alpha(d\Phi(x)^{-1}(u_m))))\right), \end{array}$$

donde $(u_1, \cdots, u_m)$ es la base canónica de $\mathbb{R}^m$.
Podemos reescribir la fórmula

$$(\alpha(d\Phi(x)^{-1}(u_1)), \cdots, \alpha(d\Phi(x)^{-1}(u_m))))$$

escribiendo $\Phi = (\Phi_1, \cdots, \Phi_m)$ con $\Phi_i : U \longrightarrow \mathbb{R}$. Las formas lineales $(d\Phi_1(x), \cdots, d\Phi_m(x))$ forman una base de T_x^*M para todo punto $x \in U$ y $(\alpha(d\Phi(x)^{-1}(u_1)), \cdots, \alpha(d\Phi(x)^{-1}(u_m))))$ son las coordenadas de α en esa base.
Talvez se entiende mejor utilizando coordenadas locales: si $(x_1, \cdots, x_m, \frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_m})$ son las coordenadas locales en $TU \subset TM$, entonces las coordenadas correspondientes en $T^*U = \bigcup_{x\in U}\{x\} \times T_x^*M$ son

$$(x_1, \cdots, x_m, dx_1, \cdots, dx_m)$$

donde $(dx_1, \cdots, dx_m)$ es la base dual de $(\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_m})$, es decir:

$$dx_i\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j. \end{array} \right.$$

La fórmula $(\alpha(d\Phi(x)^{-1}(u_1)), \cdots, \alpha(d\Phi(x)^{-1}(u_m))))$ da las coordenadas de α en esa base.

2.6. **Formas diferenciales.** Las secciones del fibrado cotangente son las *formas diferenciales* en M. df es un ejemplo de forma diferencial.
Tal como definimos el espacio cotangente en x, se puede definir el espacio de las k-formas antisimétricas en T_xM, que denotamos por Λ_x^kM. El fibrado asociado lo denotamos por Λ^kM. Las secciones de Λ^kM son las *k-formas diferenciales* en M. Tenemos $\Lambda^0M = \mathcal{C}^\infty(M)$, $\Lambda^0M = T^*M$ y $\Lambda^kM = M$ si $k > m$ la dimensión de M.

El producto exterior de dos formas $\mu \in \Lambda^kM$ y $\mu' \in \Lambda^{k'}M$ es

$$\mu \wedge \mu'(u_1, \cdots, u_k, u_{k+1}, \cdots, u_{k+k'}) = \sum_\sigma \epsilon(\sigma)\mu(u_{\sigma(1)}, \cdots, u_{\sigma(k)})\mu(u_{\sigma(k+1)}, \cdots, u_{\sigma(k+k')}).$$

La suma se toma sobre todas las permutaciones de $\{1, \cdots, k+k'\}$, $\epsilon(\sigma)$ es la signatura de la permutación σ.

La derivada exterior es un operador d que actua en $\Lambda M = \bigcup \Lambda^kM$ que
- extende la diferencial $d : \Lambda^0M \longrightarrow \Lambda^1M$;
- $d(\mu \wedge \mu') = d\mu \wedge \mu' + (-1)^k\mu \wedge \mu',\ \mu \in \Lambda^kM, \mu' \in \Lambda^{k'}M$;
- $d^2 = 0$.

Por recurencia, tenemos que $d(\Lambda^k M) \subset \Lambda^{k+1} M$. Se dice que una forma $\mu \in \Lambda^k M$ es *cerrada* si $d\mu = 0$, *exacta* si existe $\mu' \in \Lambda^{k-1} M$ tal que $d\mu' = \mu$.

2.6.1. *Orientación.* Importante es el caso $k = m$:

Definición 2.7. *Una variedad es* orientable *si existe una forma volumen, es decir una m-forma diferencial vol que no se anule. forma volumen.*

En coordenadas locales, una forma volumen se escribe $f dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_m$ donde f no se anula.

Ejercicio 22. Demostrar que una variedad es orientable si y solo si $\mathcal{C}^\infty(M)$-módulo $\Lambda^m M$ es de dimensión 1, es decir: existe $\omega \in \Lambda^m M$ tal que toda m-forma diferencial se escribe $f\omega$ con $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$.

Dos formas volumen ω y ω' definen la misma orientación de M si existe $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, $f > 0$ en M tal que $\omega = f\omega'$. "Definir la misma orientación" es una relación de equivalencia. Tiene solo 2 clases de equivalencia. Eligir una orientación es eligir una de esas dos clases de equivalencia, es decir una clase $[\omega] = \{f\omega, f > 0\}$. Un sistema de coordenadas locales $(x_1, \cdots, x_n)$ será orientado para la orientación $[\omega]$ si $\omega(\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_m}) > 0$.

2.6.2. *Imagen y pull-back.* Si $\Phi : M \longrightarrow N$ es un difeomorfismo, podemos definir la imagen de una forma diferencial $\mu \in \Lambda^k M$:

$$\Phi_* \mu(y)(u_1, \cdots, u_k) = \mu(d\Phi^{-1}(y)(u_1), \cdots, d\Phi^{-1}(y)(u_k)), y \in N, u_1, \cdots, u_k \in T_y N$$

y el pull-back de una forma diferencial $\mu \in \Lambda^k N$:

$$\Phi^* \mu(x)(v_1, \cdots, v_k) = \mu(d\Phi(x)(v_1), \cdots, d\Phi^{-1}(x)(v_k)), x \in M, v_1, \cdots, v_k \in T_x M.$$

3. Conexiones lineales

Hemos visto que la estructura afín de $\mathbb{R}^m$ permite comparar vectores tangentes a $\mathbb{R}^m$ en puntos distintos, o más bien transportarlos paralelamente, y que eso permite definir la derivada $\nabla_X Y(x)$. No existe tal derivada o transporte paralelo que esté canónicamente asociado a una variedad cualquiera, eso es una estructura más que se puede poner en la variedad. De cierta forma, consiste en definir una estructura lineal o afín infinitesimala (hay una diferencia conceptual entre conexiones afines y lineales pero la dejaremos de lado).

Definición 3.1. *Una* conexión lineal *es una aplicación $\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \longrightarrow \mathcal{X}(M)$ que satisface*

- $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$;
- $\nabla_X(fY) = L_X f Y + f\nabla_X Y$, $\nabla_{fX}(Y) = f\nabla_X Y$;
- $\nabla_{X+Y}(Z) = \nabla_X Z + \nabla_Y Z$,

para $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$, $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$.

Los símbolos de Christoffel (Γ_{ij}^k) son las coordenadas locales de la conexión:

$$\nabla_{\frac{\partial x}{\partial x_i}} \frac{\partial x}{\partial x_j} = \sum_k \Gamma_{ij}^k \frac{\partial x}{\partial x_k}.$$

Permiten escribir para $X = \sum_i X_i \frac{\partial x}{\partial x_i}$ y $Y = \sum Y_j \frac{\partial x}{\partial x_j}$,

$$\nabla_X Y = \sum_k L_X Y_k \frac{\partial x}{\partial x_k} + \sum_{i,j,k} X_i Y_j \Gamma_{ij}^k \frac{\partial x}{\partial x_k}.$$

La *torsion* de una conexión es definida por

$$T(X, Y) := \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y], \ X, Y \in \mathcal{X}(M).$$

Ejercicio 23. En coordenadas locales, sean T_{ij}^k tales que $T(\frac{\partial x}{\partial x_i}, \frac{\partial x}{\partial x_j}) = \sum_k T_{ij}^k \frac{\partial x}{\partial x_k}$. Demostrar que

$$T_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k$$

3.1. **Derivada covariante a lo largo de una curva.** Si N es una subvariedad de M, y X un campo de vectores definido en M, entonces existe una vecindad abierta U de N en M en la que se puede extender el campo X, es decir, existe un campo de vectores $\tilde{X}$ en U tal que $\tilde{X}(x) = X(x),\ x \in N$.
Gracias a esa observación, es posible restingir una conexión lineal a una subvariedad, y en particular:

Proposición 3.2. *Sean ∇ una conexión lineal en M, $\gamma : [0,1] \longrightarrow M$ una curva, y X un campo de vectores a lo largo de γ. Entonces se puede definir la derivada covariante de X a lo largo de γ como:*

$$\frac{D_\gamma}{dt} X(t) = \nabla_{\dot{\gamma}(t)} \tilde{X}(\gamma(t)),$$

en que $\tilde{X}$ es cualquiera extensión de X a una vecindad abierta de γ.

Demostración. Lo único que tenemos que ver es que la definición no depende de la extensión: en la fórmula en coordenadas locales

$$\nabla_X Y(x) = \sum_k L_X Y_k(x) \frac{\partial x}{\partial x_k}(x) + \sum_{i,j,k} X_i(x) Y_j(x) \Gamma_{ij}^k(x) \frac{\partial x}{\partial x_k}(x),$$

se puede ver que $\nabla_X Y(x)$ solo depende del valor de X en el punto x. □

3.2. **Transporte paralelo.**

Definición 3.3. *Un transporte paralelo T es una familia de isomorfismos lineales $\{T_\gamma, \gamma : [0,1] \longrightarrow M \text{una curva}\}$, $T_\gamma : T_{\gamma(0)}M \longrightarrow T_{\gamma(1)}M$, que satisfacen a*

- *$T_\gamma = Id$ si $\gamma(t) = x,\ t \in [0,1]$;*
- *$T_{\gamma \circ c} = T_\gamma \circ T_c$ si γ, c son dos curvas.*

A un transporte paralelo T corresponde una conexión lineal como sigue. Para $X \in \mathcal{X}(M)$ definamos para $t > 0$, $c_{X,x,t} : [0,t] \longrightarrow M$ la curva tal que $c_{X,x,t}(s) = \varphi^s(x), s \in [0,t]$. Entonces el transporte paralelo permite definir la conexión

$$\nabla_X Y(x) = \lim_{t \to 0} \frac{T^{-1}_{c_{X,x,t}}(Y(\varphi_X^t(x))) - Y(x)}{t}.$$

Los dos primeros puntos de la definición están obvios, el tercero merece una demostración:

Ejercicio 24. ($\star$) Demostrar que la fórmula anterior define una conexión.

Reciprocamente, una conexión lineal genera un transporte paralelo:

Definición 3.4. *Se dice que un campo de vector X es paralelo a lo largo de una curva γ si $\frac{D_\gamma}{dt} X = 0$.*

Lema 3.5. *Sean $\gamma : [0,1] \longrightarrow M$ una curva entre dos puntos x y y de M, y u_0 un vector tangente a M en x. Existe un único campo de vectores U a lo largo de γ que es paralelo y tal que $U(x) = u_0$.*

Demostración. Cubriendo la curva con abiertos de cartas locales, podemos suponer que la curva entera está contenida en tal abierto.
En coordenadas locales, si $\dot{\gamma}(t) = \sum_i c_i(t) \frac{\partial}{x_i}$ y $U(\gamma(t)) = \sum_i U_i(t) \frac{\partial}{x_i}$. La ecuación $\nabla_{\dot{\gamma}} X = 0$ es equivalente al sistema de ecuaciónes

$$L_{\dot{\gamma}(t)} U_k(t) + \sum_{i,j} c_i(t) U_j(t) \Gamma_{ij}^k(t) = 0,\ k = 1 \cdots n,$$

o

$$U_k'(t) + \sum_{i,j} c_i(t)U_j(t)\Gamma_{ij}^k(t) = 0,\ k = 1 \cdots n,$$

o

$$U'(t) = A(t)U(t)$$

con $A = (a_{kj}) \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ y $a_{kj} = \sum_i c_i \Gamma_{ij}^k$. Ese tiene una solución única. □

Este lema permite definir un transporte paralelo definiendo $T_\gamma(u) = U(1) \in T_y M$.

3.3. **Geodésicas.**

Definición 3.6. *Una* geodésica *es una curva γ definida en un intervalo de $\mathbb{R}$ cuya velocidad es paralela, es decir*

$$\frac{D_\gamma}{dt}\dot{\gamma} = 0.$$

Teorema 3.7. *Para todo $x \in M, u \in T_x M$, existe una única geodésica maximal γ tal que $\gamma(0) = x, \gamma'(0) = u$.*

Demostración. Eso porque la condición $\frac{D_\gamma}{dt}\dot{\gamma} = 0$ es una ecuación del segundo grado. Escribamos $\gamma(t) = (\gamma_k(t))$ entonces en coordenadas locales tenemos locales se escribe

$$\gamma_k''(t) + \sum_{i,j} \gamma_i'(t)\gamma_j'(t)\Gamma_{ij}^k(t) = 0,\ k = 1 \cdots n.$$

□

Esa geodésica, la notaremos $\gamma_{x,u}$. En el caso en que cualquier $\gamma_{x,u}$ esté definida en todo $\mathbb{R}$, diremos que la conexión es completa. Eso es por ejemplo cuando la variedad es compacta.

Ejercicio 25. Sea ∇ una conexión con coordenadas Γ_{ij}^k. Para $s \in [0,1]$, definamos la conexión $\nabla(s)$ por sus coordenadas $\Gamma_{ij}^k(s) = (1-s)\Gamma_{ij}^k + s\Gamma_{ji}^k$. Demostrar que $\nabla(s)$ y ∇ tienen las mismas geodésicas. En particular, observen que entre ellas, $\nabla(1/2)$ no tiene torsión.

3.4. **Aplicación exponencial.** Un argumento de compacidad demuestra que para todo punto $x \in M$, existe una vecindad U_x de 0 en $T_x M$ tal que, para cualquier $u \in U_x$, la geodésica $\gamma_{x,u}$ existe para $t \in [-1,1]$. La *aplicación exponencial* al punto x es definida en U_x por

$$\exp_x(u) = \gamma_{x,u}(1).$$

Si la conexión es completa, la aplicación exponencial está definida en todo $T_x M$, para cualquier $x \in M$.

Teorema 3.8. *La aplicación exponencial es una aplicación diferenciable de U_x en M. Su diferencial en $0 \in T_x M$ es la identidad.*

Demostración. La diferenciabilidad de $\exp_x$ viene de resultados generales sobre la dependencia en las condiciones iniciales de soluciones de ecuaciones diferenciales. El cálculo de la diferencial es inmediato. □

Ejercicio 26. Demostrar que la diferencial de $\exp_x$ en $0 \in T_x M$ es la identidad.

Como consecuencia del teorema de inversión local, tenemos el corolario siguiente.

Corolario 3.9. *Existe una vecindad V_x de $0 \in T_x M$ tal que $\exp_x$ es un difeomorfismo de V_x en su imagen.*

Ese último resultado permite definir coordenadas normales en la vecindad $U_x = \exp_x(V_x)$ de x en M. Eligemos un sistema de coordenadas $(x_1, \cdots, x_m)$ en $T_x M \simeq \mathbb{R}^m$ y identificamos a U_x con $V_x \subset T_x M$ mediante $\exp_x$. Las coordenadas normales en U_x son dadas por $(x_1, \cdots, x_m)$. Lo más importante en ese sistema de coordenadas es que las geodésicas desde x son las líneas.

Ejercicio 27. Demostrar que en coordenadas normales en una vecindad del punto x, tenemos

$$\Gamma_{ij}^k(x) + \Gamma_{ji}^k(x) = 0.$$

En particular, si la torsión es nula, $\Gamma_{ij}^k(x) = 0$

Ejercicio 28. Sean ∇ y ∇' dos conexiones, y $S(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla'_X Y$ su diferencia. Demostrar que ∇ y ∇' tienen las mismas geodésicas si y solo si S es antisimétrica: $S(X,Y) = -S(Y,X)$ para todo $X, Y \in \mathcal{X}(M)$. (Indicación: utilizar las coordenadas normales.)
Deducir de eso que dada una conexión ∇, existe una única conexión con las mismas geodésicas y cuya torsion es nula.

4. Estructura riemanniana en una variedad

4.1. **Métrica riemanniana.**

Definición 4.1. *Una métrica riemanniana en una variedad M es un campo de productos escalares en M: a cada punto $x \in M$, asociamos un producto escalar $g_x \in T_xM$ tal que la aplicación $x \longmapsto g_x$ sea diferenciable.*

Expliquemos lo que significa que $x \longmapsto g_x$ sea diferenciable.
En coordenadas locales, darse un producto escalar en T_xM significa darse una matriz definida positiva $G_x = (g_{ij}(x))$, y $g_x(u,v) = \sum_{i,j} g_{ij}(x) u_i v_j$ for $u, v \in T_xM$. $x \longmapsto g_x$ es diferenciable si $x \longmapsto G_x$ lo es.
Otra forma de ver eso consiste en definir el fibrado de las formas bilineales sobre M, $B(M) \longrightarrow M$. $B(M)$ tiene una estructura de variedad pues en coordenadas locales, una forma bilineal es una matriz de $M(m, \mathbb{R})$, y $B(M)$ es localemente homeomórfica a $\mathbb{R}^{3m}$. $x \longmapsto g_x$ es una sección de este fibrado, así podemos entender su diferenciabilidad.

El producto escalar g_x induce una norma $\| \cdot \|_x$ en el espacio tangente T_xM:

$$\|u\|_x = \sqrt{g_x(u,u)}.$$

Otra forma de decirlo es que la métrica riemanniana g induce un campo de normas en M, es decir una aplicación diferenciable $x \longmapsto \| \cdot \|_x$ en que cada $\| \cdot \|_x$ es una norma en T_xM.

Teorema 4.2. *Cualquier variedad M admite una métrica riemanniana.*

Demostración. Se utiliza una partición de la unidad: una familia (U_i, Φ_i) de cartas locales y funciones $f_i \in \mathcal{C}^\infty(M)$ tales que $\cup_i U_i = M$, $f_i = 0$ fuera de U_i y $\sum_i f_i = 1$.
Tenemos $\Phi_i : U_i \longrightarrow \mathbb{R}^m$ y definemos en cada U_i la métrica riemanniana

$$g_i(u,v) = \langle d\Phi_i(u), d\Phi_i(v) \rangle_{\mathbb{R}^m}, \ x \in U_i, \ u, v \in T_xM.$$

La fórmula $g = \sum_i f_i g_i$ define una métrica riemanniana en M. □

Una subvariedad de una variedad riemanniana tiene una métrica riemanniana inducida por restricción del producto escalar. Por ejemplo, la estructura riemanniana standard de la esfera $\mathbb{S}^m$ es la dada por restricción de la de $\mathbb{R}^{m+1}$.
Un ejemplo importante de variedad riemanniana es el *espacio hiperbólico*. Tiene varias definiciones, damos una primera aquí. Sea $H = \{x \in \mathbb{R}^m, x_m > 0\}$ el semi-plano superior de $\mathbb{R}^m$. Definamos una métrica riemannian g_H por

$$g_H(u,v) = \frac{1}{x_m} \langle u, v \rangle.$$

La variedad riemanniana (H, g_H) es conocida como modelo del semi-plano de Poincaré del espacio hiperbólico.

Si $f : M \longrightarrow N$ es un difeomorfismo y g es una métrica en M, se puede definir la métrica imagen f_*g de g por f:

$$f_*g_x(u,v) = g_{f^{-1}(x)}(df^{-1}(x)(u), df^{-1}(x)(v)).$$

Ejercicio 29. Demostrar que la fórmula $g(A,B) = \frac{1}{2}Tr(A^tB)$ permite definir una métrica riemanniana en $SL(n,\mathbb{R})$. Demostrar que esa métrica es invariante por las aplicaciones $L_g : h \longrightarrow gh$ y $R_g : h \longrightarrow hg$.

Ejercicio 30. Sea $e_m = (0,\cdots,0,-1) \in \mathbb{R}^m$ y $\sigma : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ la aplicación definida por

$$\sigma(x) = e_n + 2\frac{x - e_n}{\|x - e_n\|^2}.$$

Demostrar que

(1) $\sigma(H)$ es la bola unidad B de $\mathbb{R}^m$;
(2) la métrica imagen $g_B = \sigma_* g_H$ es dado por

$$g_B(x)(u,v) = 4\frac{\langle u,v\rangle_{\mathbb{R}^m}}{1 - \|x\|^2}.$$

La variedad riemanniana (B, g_B) es el modelo de la bola de Poincaré del espacio hiperbólico.

Ejercicio 31. Consideremos una proyección estereográfica $p_x : \mathbb{S}^m \setminus \{x\} \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Demostrar que la métrica riemanniana imagen en $\mathbb{R}^m$ es dado por

$$g_x(u,v) = \frac{4}{1 + \|x\|^2}\langle u,v\rangle_{\mathbb{R}^m}.$$

4.2. **Distancia riemanniana, ángulo y volumen.** Con una métrica riemanniana, podemos definir la longitud de una curva $\gamma : [0,1] \longrightarrow M$ por

$$l(\gamma) = \int_0^1 \|\dot\gamma(t)\|\ dt.$$

La distancia riemanniana entre dos puntos x y y de M inducida por la métrica riemanniana g está definida por

$$d(x,y) = \inf_{\gamma} l(\gamma), \tag{4.1}$$

en que el infimum se toma entre todas las curvas $\gamma : [0,1] \longrightarrow M$ de x a y.

Ejercicio 32. Demostrar que eso define una distancia en el espacio euclideano $\mathbb{R}^n$. Indicación: demostrar que la longitud de cualquier curva entre dos puntos x y y es mayor a la del segmento $[xy]$.
Deducir de eso que para cualquier variedad riemanniana, la fórmula (4.1) define una distancia.

Ejercicio 33. Sean $\lambda > 1$, $x = (x_{m-1},\cdots,x_{m-1}), y = (y_{m-1},\cdots,y_{m-1}) \in \mathbb{R}^{m-1}$ distintos. Consideremos el espacio hiperbólico (H, g_H) de dimensión m. Calcular la longitud de la curva $\gamma_x(t) = (x_1,\cdots,x_{m-1},t)$ definido para $t \in [1,\lambda]$ o $t \in [1/\lambda, 1]$. Demostrar que

$$\lim_{t\to+\infty} d(\gamma_x(t), g_y(t)) = 0,\ \lim_{t\to+\infty} d(\gamma_x(t), g_y(t)) = +\infty.$$

El producto escalar permite definir un ángulo en cada espacio tangente, pues es entonces un espacio euclideano. Por ejemplo, los dos modelos de Poincaré del espacio hiperbólico (la bola y el semi-plano) son conformes en el sentido que sus ángulos son los mismos que el del espacio ambiente $\mathbb{R}^m$.

Si la variedad es orientable, y dado una orientación, la métrica riemanniana induce una forma volumen en la variedad M, la m-forma diferencial que se escribe localmente en un sistema de coordenadas orientado como

$$dVol_g = \sqrt{|\det(g_{ij})|}dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_m.$$

Da el mismo volumen a todas las bolas unidad $B_x(1) \subset T_xM$: el de la bola unidad en $\mathbb{R}^m$.

Ejercicio 34. Calcular "la" forma volumen de (H, g_H) y (B, g_B).

4.3. **Isometrías.**

Definición 4.3. *Sean* (M, g^M) *y* (N, g^N) *dos variedades riemannianas. Un difeomorfismo* $f : M \longrightarrow N$ *es una isometría si* $f_* g^M = g^N$*, es decir, para todo* $x \in M$*,* $u, v \in T_xM$*,*

$$g^N_{f(x)}(d_x f(u), d_x f(v)) = g^M_x(u, v).$$

Ejercicio 35. El grupo $SL(2, \mathbb{R})$ actua en el plano hiperbólico $H = \{z \in \mathcal{C}, Imz > 0\}$ de la forma siguiente: si $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ entonces

$$g(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Demostrar que así $SL(2, \mathbb{R})$ actua por isometría, y de forma transitiva (es decir que para todo $x, y \in H$, existe $g \in SL(2, \mathbb{R})$ tal que $g(x) = y$. Demostrar aún que la acción tangente en el fibrado tangente $T^1H = \{(x, u) \in TH, \|u\|_x = 1\}$ es transitiva.

Ejercicio 36. Demostrar que una isometría $f : M \longrightarrow N$ preserva las distancias: $d^N(f(x), f(y)) = d^M(x, y)$. Que será de la recíproca ?

Ejercicio 37. ¿Cuál es el grupo de isometrías de la esfera $\mathbb{S}^2$?

4.4. **Conexión de Levi-Civita.** Tal como tenemos una conexión “canónica” en el espacio euclideano $\mathbb{R}^m$, vamos a asociar una conexión a una métrica riemanniana. Lo mínimo que podemos pedir a tal conexión es que respete la métrica riemanniana. Pero varias conexiones satisfacen esa propiedad. Una condición más satisfecha por la conexión de $\mathbb{R}^m$ es que su torsión es nula.

Teorema 4.4. *Sea* (M, g) *una variedad riemanniana. Existe una única conexión* ∇ *en* M *con torsión nula y tal que*

$$L_X(g(Y, Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z), \ \ X, Y, Z \in \mathcal{X}(M). \tag{4.2}$$

Demostración. Hay que observar que necesariamente, ∇ satisface a

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) = \ & L_X(g(Y, Z)) + L_Y(g(X, Z)) - L_Z(g(Y, X)) \\ & + g(Z, [X, Y]) + g(Y, [Z, X]) + g(Z, [X, Y]) \end{aligned}$$

y que esa fórmula define una conexión. □

La conexión dada por el teorema se llama *conexión de Levi-Civita.*

Ejercicio 38. Dada una variedad riemanniana (M, g) con conexión de Levi-Civita ∇, cuál es la conexión de Levi-Civita de una subvariedad N con la métrica inducida ?

Ejercicio 39. Calcular la conexión de Levi-Civita del espacio euclideano $\mathbb{R}^m$, del plano hiperbólico (H, g_H) o (B, g_B).

Ejercicio 40. Sea g la métrica riemanniana en $SO(n, \mathbb{R})$ definida por $g(A, B) = \frac{1}{2} Tr(A^t B)$. Demostrar que

$$\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X, Y].$$

Ejercicio 41. Demostrar que en coordenadas locales, los símbolos de Christoffel de la conexión de Levi-Civita son dados por

$$\Gamma^k_{ij} = \sum_l g^{kl} \left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l} \right),$$

donde $g = (g^{kl})$ es la matriz inversa de $g = (g_{ij})$.

Ejercicio 42. El radio de inyectividad de una variedad riemanniana (M, g) es

$$\rho(M, g) := \inf_{x \in M} \{\rho_x(M, g)\}$$

donde $\rho_x(M, g)$ es el radio maximal de la bola de (T_xM, g_x) en la que $\exp_x : T_xM \to M$ es inyectivo.

(1) Calcular $\rho(M, g)$ para $\mathbb{S}^2$, $\mathbb{T}^2$ y el cilindro;
(2) Demostrar que $\rho(M, g) > 0$ si M es compacta.

El transporte paralelo de la conexión de Levi-Civita respeta la métrica riemanniana:

Proposición 4.5. *Sean X, Y dos campos de vectores paralelos a lo largo de una curva $\gamma : [0, 1] \longrightarrow M$. Entonces $t \longmapsto g_{\gamma(t)}(X(\gamma(t)), Y(\gamma(t)))$ es constante.*

Demostración. Utilizamos la compatibilidad con la métrica riemanniana:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} g_{\gamma(t)}(X(\gamma(t)), Y(\gamma(t))) &= L_{\dot\gamma(t)} g_{\gamma(t)}(X(\gamma(t)), Y(\gamma(t))) \\ &= g(\nabla_{\dot\gamma(t)} X(\gamma(t)), Y(\gamma(t))) + g(X(\gamma(t)), \nabla_{\dot\gamma(t)} Y(\gamma(t))) \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

En particular, si $(u_1, \cdots, u_m)$ es una base de T_xM, que es ortonormal por g_x, si $\gamma : [0, 1] \longrightarrow M$ es una curva tal que $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$, entonces el transporte paralelo $(v_1, \cdots, v_m)$ de $(u_1, \cdots, u_m)$ a lo largo de γ es una base g_y-ortonormal de T_yM.

Ejercicio 43 (Recíproca del lema). Demostrar que si el transporte paralelo es una isometría (i.e. satisface el resultado del lema anterior) entonces ∇ satisface (4.2).

5. Geodésicas riemannianas

La geodésicas de una métrica riemanniana son la de su conexión de Levi-Civita.

Ejercicio 44. Cuáles son las geodésicas del espacio euclideano $\mathbb{R}^2$, del toro $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, del cilindro $\mathbb{R} \times S^1 \subset \mathbb{R}^3$?

Ejercicio 45. Determinar las geodésicas de la esfera $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$. Demostrar que en el modelo (B, g_B) del plano hiperbólico, las geodésicas pasando por el punto $0 \in B \subset \mathbb{R}^2$ son rectas; deducir de eso las otras geodésicas. ¿Cuáles son las geodésicas en (H, g_H) ?
Deducir de eso que en la esfera no hay geodésicas paralelas, mientras en el espacio hiperbólico, dado un punto x y una geodésica γ que no pase por x, existe una infinidad de geodésicas paralelas a γ pasando por x.

Ejercicio 46. Demostrar que si $f : (M, g^M) \longrightarrow (N, g^N)$ es una isometría, entonces la imagen de una geodésica de M por f es una geodésica de N.

Un teorema importante, que no demostraremos, es el siguiente:

Teorema 5.1 (Teorema de Hopf-Rinow)**.** *Sea (M, g) una variedad riemanniana. Son equivalentes:*

- *El espacio (M, g) es un espacio métrico completo;*
- *La conexión de Levi-Civita de (M, g) es completa.*

5.1. **Caminos más cortos.**

Sea $x \in M$. Existe $r = r(x)$ tal que la aplicación exponencial $\exp_x$ es un difeomorfismo entre la bola $B_x(r)$ de radio r para g_x en T_xM y un conjunto abierto $B(x, r) = \exp_x(B_x(r))$. Escojamos un sistema de coordenades g_x-ortonormal $(x_1, \cdots, x_m)$ en T_xM. Mediante $\exp_x$, definemos coordenades normales $(x_1, \cdots, x_m)$ en $B(x, r)$, y así vemos a $B(x, r)$ como una vecindad de 0 en el espacio euclideano $\mathbb{R}^m$. Observaciones importantes:

- las geodésicas saliendo de x son las líneas rectas;
- si u es un vector de $\mathbb{R}^m$ y $y = x + u$, entonces la g_y-norma de u es su norma en $\mathbb{R}^m$.

Demostremos ese último punto: la curva $t \longmapsto y(t) = x + tu$ definida para t pequeño es una geodésica, y entonces $g_{y(t)}(y'(t), y'(t)) = g_{y(t)}(u, u)$ es constante igual a $g_x(u, u) = \langle u, u\rangle = \sum_i u_i^2$. Como consecuencia, tenemos que

$$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^m,\ \|y\|^2 := \sum_i y_i^2 < r^2\}.$$

Las geodésicas tienen la propiedad siguiente de ser localmente los caminos más cortos:

Lema 5.2. *Sea $r > 0$ tal que la aplicación exponencial $\exp_x$ es un difeomorfismo entre $B_x(r)$ y $B(x, r)$.*

(1) *Para todo punto y de $B(x, r)$, existe un único segmento geodésico $\gamma_{xy} : [0, 1] \longrightarrow B(x, r)$ entre x y y;*

(2) *Ese segmento geodésico tiene longitud $l(\gamma_{xy}) = d(x, y) = \sqrt{\sum_i y_i^2}$;*

(3) *Cualquier curva $\gamma : [0, 1] \longrightarrow M$ entre x y y tal que $l(\gamma) = d(x, y)$ es una reparametrización creciente de γ_{xy}: existe $\lambda : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ creciente tal que $\gamma = \gamma_{xy} \circ \lambda$;*

(4) *$B(x, r) = \{y,\ d(x, y) < r\}$.*

Demostración. (1) y (2): Sea $y \in B(x, r)$. La curva $\gamma : t \longmapsto ty$ de $[0, 1]$ en $B(x, r)$ es la única geodésica en $B(x, r)$ entre x y y y su longitud es

$$l(\gamma) = \int_0^1 \|y\|\ dt = \|y\| = \sqrt{\sum_i y_i^2}.$$

(3) Vamos a demostrar que cualquier otra curva $c : [0, 1] \longrightarrow B(x, r)$ entre 0 y y es más larga: $l(c) = \int_0^1 \|c'(t)\|_{c(t)} dt \geqslant l(\gamma)$. Escribamos $c'(t) = r(t)c(t) + c^{\perp}(t)$ donde $g_{c(t)}(c(t), c^{\perp}(t)) = 0$, y

$$r(t) = \frac{g_{c(t)}(c(t), c'(t))}{g_{c(t)}(c(t), c(t))} = \frac{g_{c(t)}(c(t), c'(t))}{\|c(t)\|^2}.$$

Además,

$$\frac{d}{dt}\|c(t)\| = \frac{d}{dt}\sqrt{g_{c(t)}(c(t), c(t))} = \frac{g_{c(t)}(c(t), c'(t))}{\|c(t)\|}$$

lo que implica que $\frac{d}{dt}\|c(t)\| = r(t)\|c(t)\|$ y

$$\|c'(t)\|_{c(t)} = |r(t)|\|c(t)\| + \|c^{\perp}(t)\|_{c(t)} \geqslant \frac{d}{dt}\|c(t)\|,$$

con igualdad si y solo si $c^{\perp}(t) = 0$, es decir $c(t) = \gamma(\lambda(t)) = \lambda(t)y$ en que $\lambda(0) = 0, \lambda(1) = 1$. Así,

$$l(c) = \int_0^1 |\lambda'(t)|\|y\|\ dt \geqslant \int_0^1 \lambda'(t)\|y\|\ dt = \|y\| = l(\gamma),$$

con igualdad si y solo si $\lambda'(t) \geqslant 0$ para todo $t \in [0, 1]$. Eso demuestra (3) para esas curvas que se quedan en $B(x, r)$. Falta ver que si c sale de $B(x, r)$, la parte de c en $B(x, r)$ tiene longitud a lo menos r, por lo cual no existe curva minimizante que salga de $B(x, r)$.
(4) Lo anterior implica que $\{y,\ d(x, y) < r\} \subset B(x, r)$, pues $d(x, y) = l(\gamma_{xy})$. Ahora si $y \notin B(x, r)$, cualquier curva entre x y y tiene una parte en $B(x, r)$ cuya longitud es a lo menos r, lo que termina la demostración. □

Da otra demostración (en verdad casi la misma) del resultado del ejercicio 32:

Corolario 5.3. *La "distancia" riemanniana d* es *una distancia en M, y la topología definida por d en M es la de M.*

Proposición 5.4. *Para todo punto $x \in M$, existen $r \geqslant \rho > 0$ tales que para todos puntos $y, z \in B(x, \rho)$, existe un único segmento geodésico $\gamma_{xy} : [0, 1] \longrightarrow B(x, r)$ entre y y z tal que $l(\gamma_{xy}) = d(y, z)$.*

Demostración. Sea r por lo cual $\exp_x : B_x(r) \longrightarrow M$ es un difeomorfismo. Como la aplicación $\exp_p$ depende continuamente de $p \in M$ y $\exp_x$ es inyectiva en $B_x(r)$, el conjunto $A = \{p, \ \exp_p \text{ es inyectiva en } B_p(r/2)\}$ es una vecindad abierta de x. Sea $0 < \rho < r/4$ tal que que $B(x,\rho) \subset A$. Si $y \in B(x,\rho)$, tenemos que $B(x,\rho) \subset B(y, r/2)$, así por el lema 5.2, para todo punto $z \in B(x,\rho)$, siempre existe un único segmento geodésico γ_{yz} contenido en $B(y,r/2) \subset B(x,r)$, tal que $l(\gamma) = d(y,z)$, y tal que cualquier otra curva que no sea una reparametrización creciente de este sea más larga. $\square$

Ejercicio 47. Dar un ejemplo de variedad riemanniana conexa en la que entre dos puntos x, y distintos,

- no existe geodésica;
- existen una infinidad de geodésicas.

Ejercicio 48. Sean d_B y d_H las distancias riemannianas en los modelos (B, g_B) y (H, g_H) del espacio hiperbólico de dimensión m. Demostrar que

$$\cosh d_B(x,y) = 1 + \frac{2\|x-y\|^2}{(1-\|x\|^2)(1-\|y\|^2)}$$

y

$$\cosh d_H(x,y) = 1 + \frac{\|x-y\|^2}{2x_m y_m}.$$

Ejercicio 49. Demostrar que las esferas métricas de centro $0 \in B \subset \mathbb{R}^2$ en el plano hiperbólico (B, g_B) son círculos euclideanos. ¿Cómo son las otras ? ¿Y en (H, g_H) ?

Terminemos esta parte por una observación importante: en un espacio métrico (X,d), una geodésica es una curva $\gamma : [a,b] \longrightarrow X$ para la cual existe $\lambda \geqslant 0$ tal que para cada $t \in (a,b)$ existe $\epsilon > 0$ tal que si $t_1, t_2 \in (t-\epsilon, t+\epsilon)$ tenemos $d(\gamma(t_1), \gamma(t_2)) = \lambda |t_1 - t_2|$. Es decir, una geodésica es localmente un camino más corto (puede haber varios).
Lo que acabamos de ver es que en una variedad riemanniana, localmente existe un único camino más corto. Es decir, en el espacio métrico (M,d), entre dos puntos suficientemente cercanos, hay una única geodésica.
Entonces, pudiéramos haber definido las curvas geodésicas de (M,g) sin utilizar la conexión como siendo las geodésicas del espacio métrico (M,d), eso nos hubiera dado una familia de curvas. La conexión de Levi-Civita es la única conexión cuyas geodésicas son esas curvas y cuya torsión es nula.

5.2. **Las bolas métricas son geodésicamente convexas.** En esta parte demostraremos el teorema siguiente.

Teorema 5.5. *Para todo punto $x \in M$, existe $\rho > 0$ tal que entre cada dos puntos y y z de $B(x,\rho)$, existe un único segmento geodésico γ_{yz} entre y y z cuya imagen está incluida en $B(x,\rho)$. Su longitud es $d(y,z)$.*

Para r pequeño, la esfera métrica $S(x,r) = \{y \in M, \ d(x,y) = r\}$ es una subvariedad de M como imagen por $\exp_x$ de la esfera $S_x(r)$ de (T_xM, g_x). Antes de demostrar el teorema, desmostremos otro resultado intuitivo, conocido como lema de Gauss:

Proposición 5.6. *Una geodésica $t \longmapsto \exp_x(tu)$ corta $S(x,r)$ ortogonalmente.*

Demostración. Sea y_s una curva sobre $S(x,r)$ y $u_s \in S_x(r) = \{u, \ \|u\| = r\}$ tal que $y_s = \exp_x(u_s)$. Las geodésicas $t \in [0,1] \longmapsto y_s(t) = \exp_x(tu_s)$ tienen todas la misma velocidad constante:

$$\|y_s'(t)\| = \|u_s\| = r, \ \forall t, s.$$

Así,

$$\frac{\partial}{\partial s}\|y_s'(t)\|^2 = \frac{\partial}{\partial s} g(y_s'(t), y_s'(t)) = 2g(y_s'(t), \frac{\partial}{\partial s} y_s'(t)) = 0$$

y

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} g(y'_s(t), \frac{\partial}{\partial s} y_s(t)) &= L_{r y'_s(t)} g(y'_s(t), \frac{\partial}{\partial s} y_s(t)) \\
&= r(g(\nabla_{y'_s(t)} y'_s(t), \frac{\partial}{\partial s} y_s(t)) + g(y'_s(t), \frac{\partial}{\partial s} y'_s(t))) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

donde hemos utilizado la compatibilidad (4.2) de la conexión con la métrica riemanniana. Eso implica que $t \longmapsto g(y'_s(t), \frac{\partial}{\partial s} y_s(t))$ es constante igual a

$$g(y'_s(0), \frac{\partial}{\partial s} y_s(t)|_{t=0}) = g(u_s, 0) = 0.$$

En $t = 1$ y $s = 0$, nos da

$$g(y, \frac{d}{ds} y_s|_{s=0}) = 0,$$

lo que concluye la demostración. □

Para demostrar el teorema 5.5, necesitaremos este lema. Seguimos trabajando en coordenadas normales en una vecindad $B(x, 2r)$ del punto x.

Lema 5.7. *Sea γ una geodésica tal que $\gamma(0) \in S(x,r)$ y γ es tangente a $S(x,r)$ en $\gamma(0)$. Entonces, para t suficientemente pequeño, $\gamma(t) \notin B(x,r)$.*

Demostración. Sea $y(t) = (y_1(t), \cdots, y_m(t))$ una geodésica tal que $y(0) = y \in S(x,r)$ y que sea tangente a $S(x,r)$ en y. Sea $f(t) = \|y(t)\|^2 = \sum_k y_k(t)^2$. Tenemos $f(0) = r^2$,

$$f'(t) = 2 \sum_k y'_k(t) y_k(t) = 2\langle y(t), y'(t)\rangle$$

lo que en $t = 0$ da $f'(0) = 0$ por hipótesis, y

$$f''(t) = 2 \sum_k y'_k(t)^2 + y_k(t) y''_k(t).$$

Pero la ecuación de las geodésicas da que

$$y''_k(t) + \sum_{i,j} y'_i(t) y'_j(t) \Gamma^k_{ij}(y(t)) = 0, \ k = 1 \cdots n.$$

Así,

$$\begin{aligned}
f''(t) &= 2 \sum_k y'_k(t)^2 - y_k(t) \sum_{i,j} y'_i(t) y'_j(t) \Gamma^k_{ij}(y(t)) \\
&= 2 \sum_{i,j} \left[\delta_{ij} - \left(\sum_k \Gamma^k_{ij}(y(t)) y_k(t) \right) \right] y'_i(t) y'_j(t).
\end{aligned}$$

Recordemos (ejercicio 27) que como la torsión es nula, $\Gamma^k_{ij}(x) = 0$. Así, la forma quadrática $(\delta_{ij} - \sum_k \Gamma^k_{ij}(y) y_k(0))_{i,j}$ es definida positiva si $y \in B(x,\rho)$ para ρ suficientemente pequeño. Eso implica que si r es suficientemente pequeño, $f''(0) > 0$ y entonces que $f(t) > r^2$. □

Ahora podemos demostrar que las bolas métricas son geodésicamente convexas:

Demostración del teorema 5.5. Sean $r > \rho > 0$ los reales dados por el lema 5.4. Ya sabemos que existe un único segmento geodésico $\gamma = \gamma_{yz}$ en $B(x,r)$ entre cada dos puntos y y z de $B(x,\rho)$. Demostremos que $\gamma = (\gamma_1, \cdots, \gamma_m)$ se queda en $B(x,\rho)$. Si no fuera así, entonces la función $f : t \longmapsto d(x, \gamma(t))^2 = \sum_i \gamma_i(t)^2$ sería tal que $f(0) < \rho^2, f(1) < \rho^2$ y con algún $t_0 \in [0,1]$ en el que f alcanza su maximum $r_0^2 := f(t_0) > \rho^2$. Pero entonces $\gamma(t_0) \in S(x, r_0)$ y la curva es tangente a $S(x, r_0)$ en $\gamma(t_0)$. Estamos bajo las hipótesis del lema 5.7, que nos dice que la geodésica γ debe salir de $B(x, r_0)$, contradiciendo la maximalidad de $f(t_0)$. □

5.3. **El flujo geodésico.** Cuando la variedad es completa, podemos definir el *flujo geodésico*. Es el flujo $\varphi^t : TM \longrightarrow TM$ tal que $\varphi^t(u) = \dot{\gamma}_u(t)$, en que γ_u es la geodésica generada por u. Como una geodésica tiene velocidad constante, φ^t preserva los conjuntos $T^\lambda M = \{u \in TM, \|u\| = \lambda\}$, $\lambda \geqslant 0$, en particular el *fibrado tangente unitario*

$$T^1M = \{u \in TM, \|u\| = 1\}.$$

Los $T^\lambda M$ son todos variedades, subvariedades de TM, y todos difeomorfos.

Ejercicio 50. Sea φ^t el flujo geodésico en el *fibrado tangente unitario* del toro $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ euclideano. Demostrar que una órbita $\{\varphi^t(u), t \in \mathbb{R}\}$ de φ^t es o periódica o su proyección en $\mathbb{T}^2$ es densa.

6. Curvatura

6.1. **Tensor de curvatura.** El *tensor de curvatura* $R(X,Y) : \mathcal{X}(M) \longrightarrow \mathcal{X}(M)$ es definido por

$$R(X,Y) = \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X,Y]}, \;\; X, Y \in \mathcal{X}(M).$$

Las simetría $R(X,Y) = -R(Y,X)$ es obvia. Además, R es lineal: para $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$, $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$,

$$R(X+Z, Y+W) = R(X,Y) + R(Z,Y),$$
$$R(fX, Y) = fR(X,Y).$$

$R(X,Y)$ también es lineal: para $X, Y, Z, Z' \in \mathcal{X}(M)$, $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$,

$$R(X,Y)(fZ + gZ') = fR(X,Y)Z + gR(X,Y)Z';$$

como consecuencia, tenemos que $R(X,Y)Z(x)$ solo depende de los valores de X, Y y Z en $x \in M$ (esa última propiedad es lo que significa que $R(X,Y)$ es un tensor...); así se puede hablar de $R(v,w)u$ para $v, w, u \in T_xM$.

Finalmente, tenemos las propiedades siguientes:

(1) $R(X,Y) = -R(Y,X)$;
(2) $R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0$;
(3) $g(R(X,Y)Z, W) = -g(R(X,Y)W, Z)$;
(4) $g(R(X,Y)Z, W) = g(R(Z,W)X, Y)$.

Ejercicio 51. Verificar esas cuatro propiedades.

Ejercicio 52. Sea g la métrica riemanniana en $SO(n,\mathbb{R})$ definida por $g(A,B) = \frac{1}{2}Tr(A^tB)$. Demostrar que

$$R(X,Y)Z = -\frac{1}{4}[[X,Y],Z].$$

6.2. **Curvatura seccional.** Definamos

$$K(X,Y) = \frac{g(R(X,Y)Y,X)}{\|X\|^2\|Y\|^2 - g(X,Y)^2} \in \mathbb{R}.$$

Como se puede verificar facilmente, el número $K(X,Y)(x)$ solo depende del plano generado por $X(x)$ y $Y(y)$ en T_xM.

Definición 6.1. *Sea $x \in M$. La* curvatura seccional *del plano $\Pi \subset T_xM$ es*

$$K(\Pi) = K(v,w)$$

donde $v, w \in T_xM$ generan al plano Π.

Teorema 6.2. *El valor $K(\Pi)$ de todos los planes $\Pi \subset T_xM$ determina el tensor de curvatura de forma única.*

Demostración. Consiste en demostrar que si R y R' satisfacen a las propiedades de simetría (1) a (4) y toman los mismos valores $K(\Pi)$ en todos los planes $\Pi \subset T_xM$ entonces $R = R'$. Es un juego poco entretenido. □

Corolario 6.3. *Sea $x \in M$. Si $K(\Pi) = \kappa$ no depende del plano $\Pi \in T_xM$, entonces en el punto x,*

$$R(X,Y)Z = \kappa(g(Y,Z)X - g(X,Z)Y).$$

Demostración. Basta ver que el término a la derecha satisface las propiedades de simetría (1) a (4) y que sus curvaturas seccionales valen κ en x. □

6.3. **Campos de Jacobi.**

6.3.1. *La ecuación de Jacobi.* Sea $\Psi : (s,t) \in [-1,1]^2 \longmapsto \Psi(s,t)$ una familia de curvas geodésicas en M: a $s = s_0$ fijo, $t \longmapsto \Psi(s_0,t)$ es una geodésica.
Definamos

$$X = \frac{\partial\Psi}{\partial t},\ J = \frac{\partial\Psi}{\partial s}.$$

Como $t \longmapsto \Psi(s_0,t)$ es una geodésica, tenemos que $\nabla_X X = 0$.

Teorema 6.4. *J satisface a la ecuación diferencial*

$$\nabla_X\nabla_X J + R(J,X)X = 0.$$

Demostración. Tenemos

$$[X,J] = \left[d\Psi(\frac{\partial}{\partial t}), d\Psi(\frac{\partial}{\partial s})\right] = d\Psi\left[\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial s}\right] = 0.$$

Entonces

$$R(J,X)X = \nabla_J\nabla_X X - \nabla_X\nabla_J X - \nabla_{[J,X]}X = -\nabla_X\nabla_J X.$$

Recordemos que la torsión es nula, en particular

$$0 = T(X,J) = \nabla_X J - \nabla_J X - [X,J] = \nabla_X J - \nabla_J X.$$

Así,

$$R(J,X)X = -\nabla_X\nabla_X J.$$

□

Definición 6.5. *Un campo de vectores a lo largo de una curva geodésica γ es un* campo de Jacobi *si satisface a la ecuación de Jacobi*

$$\nabla_{\dot\gamma}\nabla_{\dot\gamma}J + R(J,\dot\gamma)\dot\gamma = 0.$$

Escojamos una base ortonormal $(X_1,\cdots,X_n)$ de vectores paralelos a lo largo de γ. Escribamos $J = \sum_i J_iX_i$. Tenemos

$$\nabla_X\nabla_X J = \sum_i L_X^2 J_i X_i$$

y

$$R(J,X)X = \sum_i J_i R(X_i,X)X = \sum_{i,j} J_i r_{ij} X_j,$$

entonces la ecuación anterior se escribe como el sistema

$$J_i''(t) + \sum_j r_{ij}J_i(t) = 0,\ i = 0,\cdots,m,$$

en que hemos denotado $J_i(t) = J_i(\gamma(t))$. Como consecuencia tenemos la

Proposición 6.6. *Sea γ una geodésica en M. Dados $J_0, J_0' \in T_{\gamma(0)}M$, existe un único campo de Jacobi J a lo largo de γ tal que $J(\gamma(0)) = J_0$, $\nabla_{\dot\gamma}J(\gamma(0)) = J_0'$. El conjunto de campos de Jacobi a lo largo de γ forma un espacio vectorial de dimensión $2m$.*

6.3.2. *El caso de curvatura constante.* Supongamos que la variedad tenga curvatura seccional constante igual a κ y que γ tiene velocidad 1: $g(X,X)=1$. J satisface a

$$\nabla_X\nabla_X J + R(J,X)X = 0.$$

Pero $R(J,X)X = \kappa(g(X,X)J - g(X,J)X) = \kappa g(X,X)J = \kappa J$. Así,

$$\nabla_X\nabla_X J + \kappa J = 0.$$

Escojamos una base ortonormales $(X_1,\cdots,X_n)$ de vectores paralelos a lo largo de γ y escribamos $J=\sum_i J_iX_i$. Como visto anteriormente, la ecuación de Jacobi se escribe

$$J_i'' + \kappa J_i = 0,\ i=0,\cdots,m.$$

Si las condiciones iniciales son $J(\gamma(0))=0, \nabla_{\dot\gamma}J(\gamma(0)) = J_0'$, y Z es el vector paralelo a lo largo de γ tal que $Z(\gamma(0))=0, \nabla_{\dot\gamma}Z(\gamma(0)) = J_0'$, entonces J se escribe

$$J(\gamma(t)) = \begin{cases} 1/\sqrt{-\kappa}\ \sinh(\sqrt{-\kappa}t)Z(t) & \text{si } \kappa<0 \\ tZ(t) & \text{si } \kappa = 0, \\ 1/\sqrt{\kappa}\ \sin(\sqrt{\kappa}t)Z(t) & \text{si } \kappa>0. \end{cases}$$

6.3.3. *Campos de Jacobi y curvatura.* Volvamos a nuestra familia de geodésicas $\Psi(s,t)$ y consideremos el caso $\Psi(s,t) = \exp_x(tv(s))$, en que $v:(-\epsilon,\epsilon)\longrightarrow T_xM$ es una curva tal que $v(s)\in S_x(1)$, para todo s; está bien definido para t pequeño. Fijemos $s=0$ y definamos $v=v(0)$, $\gamma(t)=\Psi(0,t)$, $J(t)=J(\gamma(t))$, y $X(t)=X(\gamma(t))=\dot\gamma(t)$. Escribiremos $\nabla_{\dot\gamma}J(\gamma(t)) =: J'(t)$, y lo mismo para las derivadas de orden superior.
Tenemos que $J(0)=0$, $\Psi(s,t)\in S(x,t)$, y por el lema 5.6 de Gauss, $g(J(t),X(t))=0$. La proposición siguiente da una interpretación de la curvatura en cuanto a como se separan las geodésicas (un equivalente local de lo que encontramos en curvatura constante):

Proposición 6.7. *Sea Π el plano de T_xM generado por $X(0)$ y $J'(0)$. Tenemos*

$$\frac{\|J(t)\|^2}{\|J(0)\|^2} = t^2 + \frac{1}{3}K(\Pi)t^4 + o(t^4)$$

Demostración. Sea $f(t)=\|J(t)\|^2 = g(J(t),J(t))$. Tenemos

$$f(0)=0, f'(0) = 2g(J(0),J'(0)) = 0,$$

$$f''(0) = 2g(J''(0),J(0)) + 2g(J'(0),J'(0)) = 2\|J'(0)\|^2.$$

Como $J''(0) = -R(X(0),J(0))X(0) = 0$

$$f'''(0) = 6g(J''(0),J'(0)) + 2g(J'''(0),J(0)) = 0.$$

Por fin,

$$f^{(4)}(0) = 6g(J'''(0),J'(0)) + 2g(J'''(0),J'(0)) = 8g(J'''(0),J'(0)).$$

Para determinar $J'''(0)$, utilizamos la ecuación de Jacobi que nos da

$$J'''(0) = -\nabla_X R(X,J)X(0)$$

.

Lema 6.8. *Tenemos $\nabla_X R(X,J)X(0) = R(X(0),J'(0))X(0)$.*

Demostración. Para todo campo de vectores Z a lo largo de γ,

$$g(\nabla_X R(X,J)X,Z)(0) = -g(R(X,J)X,\nabla_X Z) + L_X g(R(X,J)X,Z).$$

Pero $g(R(X,J)X,Z) = g(R(X,Z)X,J)$ por simetría de R, y

$$L_X g(R(X,Z)X,J) = g(\nabla_X R(X,Z)X,J) + g(R(X,Z)X,\nabla_X J).$$

En $t=0$ nos da

$$g(\nabla_X R(X,J)X,Z)(0) = g(R(X(0),Z(0))X(0),J'(0)) = g(R(X(0),J'(0))X(0),Z(0)),$$

demostrando que

$$\nabla_X R(X,J)X(0) = R(X(0),J'(0))X(0).$$

□

Por lo tanto,

$$f^{(4)}(0) = 8g(J'''(0),J'(0)) = -8g(R(X(0),J'(0))X(0),J'(0)).$$

Pero

$$\begin{aligned} K(J'(0),X(0)) &= \frac{g(R(X(0),J'(0))X(0),J'(0))}{\|X(0)\|^2\|J'(0)\|^2 - g(X(0),J'(0))^2} \\ &= \frac{g(R(X(0),J'(0))X(0),J'(0))}{\|J'(0)\|^2}. \end{aligned}$$

La fórmula de Taylor al orden 4 da el resultado. □

Ejercicio 53. Sea (B, g_B) el plano hiperbólico. Determinar la diferencial de $\exp_0 : T_0B \longrightarrow B$. Utilizar la proposición 6.7 para demostrar que la curvatura seccional de (B, g_B) es constant igual a -1.
Utilizar la misma técnica para demostrar que la curvatura seccional de $\mathbb{S}^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$ es constante igual a 1.

6.4. **Variedades riemannianas de curvatura constante.** Diremos que una variedad M tiene curvatura constante si existe $\kappa \in \mathbb{R}$ tal que para cualquier $x \in M$ y plano $\Pi \subset T_xM$, $K(\Pi) = \kappa$.

El espacio euclideano $\mathbb{R}^m$ tiene curvatura seccional nula. Es fácil demostrarlo.
La esfera $\mathbb{S}^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$ es un espacio de curvatura seccional constante igual a 1.
El espacio hiperbólico (H, g_H) es un espacio de curvatura seccional constante igual a -1.

Ejercicio 54. Cuál es la curvatura de la esfera de radio r, $S(r) = \{x \in \mathbb{R}^{m+1}, \|x\| = r\}$?

De cierta forma, esos tres ejemplos son los únicos ejemplos:

Teorema 6.9. *Sea M una variedad completa de curvatura seccional constante $\kappa = -1, 0$ o 1. Entonces su cubrimiento universal es isométrico a $\mathbb{H}^m$ si $\kappa = 1$, $\mathbb{R}^m$ si $\kappa = 0$ o $\mathbb{S}^m$ si $\kappa = -1$.*

6.5. **Curvatura negativa.** Que la variedad tenga sus curvaturas seccionales siempre nagativas tiene importantes consecuencias. Por ejemplo:

Teorema 6.10 (Cartan-Hadamard)**.** *Sea (M, g) una variedad riemanniana completa y simplemente conexa de dimensión m. Si sus curvaturas seccionales satisfacen $K(\Pi) < 0$, para todo plano $\Pi \subset T_xM$, todo $x \in M$, entonces M es difeomórfica a $\mathbb{R}^m$.*

References

[1] Manfredo P. Do Carmo. *Riemannian geometry*, Birkhaüser.
[2] Sylvestre Gallot, Dominique Hulin, Jacques Lafontaine. *Riemannian geometry*, Springer.
[3] Frank W. Warner. *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Springer.

E-mail address: mikl_crampon@yahoo.fr