

**Université Libre de Bruxelles**  
Faculté des Sciences  
Département de Mathématiques

**Orbites périodiques pour une  
particule chargée sur un 2-tore dans  
un champ magnétique**

Michaël Poss

Mémoire présenté en vue de l'obtention du grade de  
Licencié en Sciences Mathématiques

Année académique 2005-2006  
Directeur de mémoire : Felix Schlenk

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>2</b>
1.1	Physique du problème . . . . .	2
1.2	Action physique du système . . . . .	5
1.3	La Conjecture d'Arnold . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Difféomorphismes Hamiltoniens</b>	<b>9</b>
2.1	Notions de géométrie symplectique . . . . .	9
2.2	L'homomorphisme du flux . . . . .	13
<b>3</b>	<b>Théorème de Conley-Zehnder</b>	<b>19</b>
3.1	Opérateurs de Fredholm . . . . .	20
3.2	Formulation analytique . . . . .	21
3.3	Démonstration du Théorème 3.1 . . . . .	31
<b>4</b>	<b>Mouvements périodiques dans un champ magnétique</b>	<b>45</b>
4.1	Énoncé du problème et résultat . . . . .	45
4.2	Démonstration du Théorème 4.1 . . . . .	50
4.2.1	Plan de la démonstration . . . . .	50
4.2.2	L'angle comme nouveau paramètre pour le flot . . . . .	51
4.2.3	Le centre de masse est fixé par $\varphi$ pour la mesure $\rho(z, 0)d\lambda$ . . . . .	54
4.2.4	Construction de l'isotopie symplectique pour $\varphi$ . . . . .	54
4.2.5	Passage à la variété symplectique $(\mathbb{T}_1, dq^1 \wedge dq^2)$ . . . . .	56
4.2.6	L'application $\psi = h \circ \varphi \circ h^{-1}$ fixe le centre de masse de $(\mathbb{T}_1, dq^1 \wedge dq^2)$ . . . . .	57
<b>A</b>	<b>Cas d'une infinité d'orbites périodiques</b>	<b>62</b>
	<b>Remerciements</b>	<b>63</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>64</b>

# Chapitre 1

## Introduction

L'objet de ce mémoire est d'étudier le nombre minimal de trajectoires fermées qui sont contractiles pour une particule chargée en mouvement sur un tore de courbure Riemannienne arbitraire alors qu'un champ magnétique agit perpendiculairement à la surface de celui-ci. Suivant une idée d'Arnold (et la preuve de Levy [10]), nous montrerons qu'il existe toujours au moins trois orbites de ce type.

C'est un très bel exemple de problème physique qui sera résolu par des méthodes faisant intervenir des outils complexes dans différentes branches des mathématiques : l'analyse fonctionnelle, la topologie algébrique, la géométrie Riemannienne et bien sûr la dynamique symplectique et Hamiltonienne.

### 1.1 Physique du problème

Ce problème est en fait moins abstrait qu'on ne pourrait le penser, car comme nous avons imposé que les trajectoires soient fermées et contractiles, on peut transcrire le problème dans le plan de recouvrement du tore,  $\mathbb{R}^2$ . En effet, comme le plan est le revêtement universel du tore, seules les trajectoires fermées qui sont contractiles possèdent un relèvement fermé dans le plan (voir [6], Proposition 1.33). Ces relèvements ne sont, bien sûr, pas uniques et dépendent du point auquel ils seront rattachés. De même, on peut définir sur  $\mathbb{R}^2$  des relèvements pour le champ magnétique et la métrique Riemannienne. Nous remarquons donc que localement, la dynamique de ces particules est la même sur le tore, ou sur son recouvrement. De plus, il existe autant d'orbites fermées contractiles sur le tore qu'il en existe de fermées sur son recouvrement, modulo  $\mathbb{Z}^2$  à cause du choix de point base.

Nous verrons également que le modèle utilisé pour résoudre ce problème

permet de résoudre des problèmes similaires dans lesquels la courbure serait remplacée par une force conservatrice, par exemple : trouver une borne inférieure pour ces orbites fermées dans le cas d'une particule chargée, pesante et qui est contrainte à rester dans un plan perpendiculaire à un champ magnétique.

Rappelons que la force de Lorentz suffit à déterminer la dynamique d'un point matériel de charge  $e$  non pesant :

$$F = e(E + v \times B) \quad (1.1)$$

où  $E$  est le champ électrique et  $B$  le champ d'induction magnétique. Si nous sommes dans le vide, alors  $B = \mu_0 H$  ( $\mu_0$  est la constante de perméabilité magnétique et  $H$  le champ magnétique) et nous pourrions parler abusivement de champ magnétique pour  $B$  sans causer de confusion.

Supposons maintenant que notre particule se déplace sur  $\mathbb{R}^2$ , et qu'il n'y a pas de champ électrique. Comme (1) est toujours perpendiculaire à la vitesse, si  $B$  garde toujours la même orientation et qu'il satisfait à

$$\min_{\mathbb{R}^2} |B| \geq C \quad (1.2)$$

où  $C$  est une constante réelle positive quelconque, alors la particule aura une trajectoire du type de celle de la Figure 4.2.

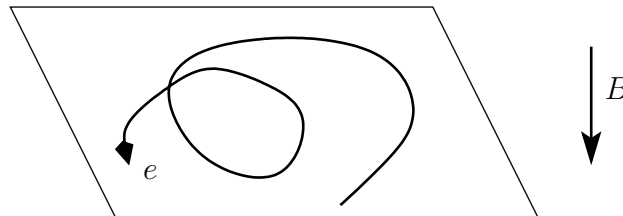


FIG. 1.1 – Trajectoire dans un champ magnétique

L'hypothèse (1.2) est fondamentale dans ce travail. En effet, sans celle-ci, on ne peut pas assurer l'existence de trajectoires fermées. Intuitivement, il est clair que (1.2) oblige les particules à avoir des trajectoires crollées. Formellement, elle permet de bien définir l'application de Poincaré (Chapitre 4), parce que les trajectoires tournent toujours dans le même sens, et que la vitesse angulaire de cette rotation est bornée inférieurement. En fait, comme  $B$  est toujours perpendiculaire à la surface, (1.2) implique qu'il garde toujours la même orientation (sinon il devrait être nul quelque part).

Rappelons que  $B$  doit satisfaire aux équations de Maxwell

$$\begin{cases} \operatorname{div} D = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \operatorname{div} B = 0 \\ \operatorname{rot} E + \partial_t B = 0 \\ \frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} H - \epsilon_0 \partial_t D = J. \end{cases}$$

Nous référons à [14] pour les détails sur les grandeurs introduites dans ces équations. Comme nous avons également supposé que  $E = 0$ , ces équations deviennent

$$\begin{cases} \partial_t B = 0 \\ \operatorname{div} B = 0 \\ \operatorname{rot} H = \mu_0 J \end{cases}$$

où la première équation indique qu'en absence de champ électrique, le champ magnétique ne varie pas dans le temps. Elle permet de remarquer que l'hypothèse que nous ferons plus tard,  $\partial_t B = 0$  (Chapitre 4), n'est pas réductrice.

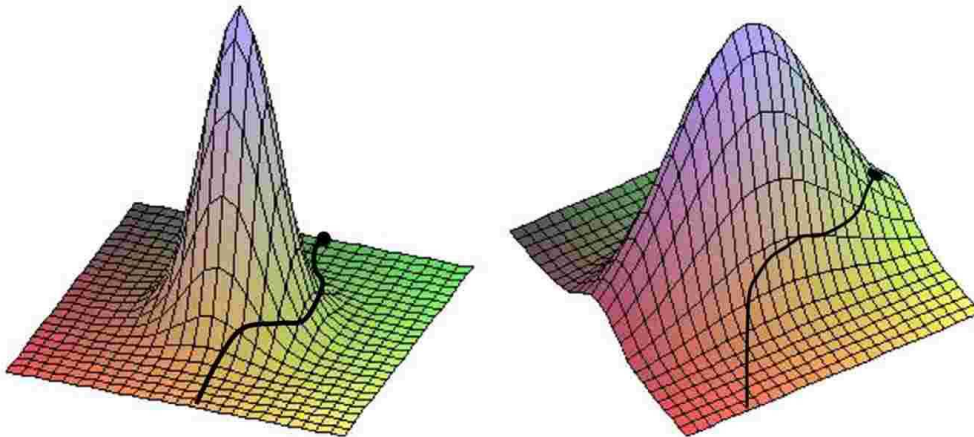


FIG. 1.2 – Déviation due à la courbure

Si maintenant nous munissons le tore (et donc son revêtement) d'une métrique Riemannienne quelconque, la condition (1.2) qui était suffisante pour une surface plate ne l'est plus. En effet, on voit bien intuitivement sur les figures qu'il faut maintenant imposer une condition du type

$$|B(x)| > |\text{pente de la surface en } x| \quad \forall x \in \mathbb{R}^2$$

si on veut que les particules tournent constamment dans le même sens. Nous verrons précisément (Chapitre 4) ce que devient cette condition et de quelle manière elle fait intervenir la courbure.

**Remarque 1.1.** Pour certaines métriques, il se pourrait que ce plan ne se plonge pas isométriquement dans  $\mathbb{R}^3$ . Dans ce cas, le problème n'aurait plus cette interprétation physique, car le champ magnétique n'est défini que dans  $\mathbb{R}^3$ .

## 1.2 Action physique du système

Dans cette section nous introduisons différentes actions, dites physiques, car elles ne seront pas définies proprement, i.e., comme des fonctionnelles lisses agissant sur des espaces de Banach. Néanmoins elles permettent de décrire intuitivement le problème et Mark Levi les a utilisées dans [10]. Dans le Chapitre 4, nous utiliserons un point de vue local, plus rigoureux, qui n'utilisera pas d'actions.

Soient  $q^1, q^2$  les coordonnées standards sur  $\mathbb{R}^2$ . L'action Lagrangienne standard pour le mouvement d'une particule de charge  $e = 1$  dans un champ magnétique  $B = \text{rot}A$  sur la variété Riemannienne  $(\mathbb{R}^2, G)$  est

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0(q, \dot{q}) &= \int_{\gamma} (L_2 + L_1) dt \\ &\equiv \int_I \left( \frac{1}{2} \langle G(q(t)) \dot{q}(t), \dot{q}(t) \rangle + \langle A(q(t)), \dot{q}(t) \rangle \right) dt \\ &= \int_I \left( \frac{1}{2} G_{ij}(q) \dot{q}^i(t) \dot{q}^j(t) + A_i(q) \dot{q}^i(t) \right) dt \end{aligned}$$

où tous les indices appartiennent à  $\{1, 2\}$ , et où l'on somme sur les indices répétés. Comme  $G(q)$  et  $A(q)$  sont les relèvements de fonctions définies sur  $\mathbb{T}_1 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ , elles sont périodiques :

$$G(q + k) = G(q) \quad \text{et} \quad A(q + k) = A(q), \quad q \in \mathbb{R}^2, k \in \mathbb{Z}^2.$$

Vérifions que  $\mathcal{L}_0$  est bien l'action de ce problème grâce au calcul des équations d'Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial q}, \quad \text{avec} \quad L = L_2 + L_1.$$

En fait, choisissant pour un point  $q$  des coordonnées exponentielles telles que  $G_{ij} = \delta_{ij}$ , et en étendant  $A$  de  $\mathbb{R}^2$  à tout l'espace  $\mathbb{R}^3$  constamment en  $z$ , nous

trouvons

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} &= \dot{q}_k(t) + A_k(q) \\
\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} &= \ddot{q}_k(t) + \frac{\partial A_k}{\partial q^s}(q) \dot{q}^s(t) \\
\frac{\partial L}{\partial q^k} &= \frac{\partial A_i}{\partial q^k}(q) \dot{q}^i(t) \\
\ddot{q}_k &= \frac{\partial A_i}{\partial q^k} \dot{q}^i - \frac{\partial A_k}{\partial q^s} \dot{q}^s,
\end{aligned} \tag{1.3}$$

donc (1.3) sont bien les équations de mouvement d'un tel système. Il suffit de vérifier que le membre de droite est égal à la force de Lorenz  $(\dot{q} \times B)_k$ . C'est effectivement le cas, car

$$\begin{aligned}
(\dot{q} \times B)_i &= \epsilon^{ijk} \dot{q}^j B^k = \epsilon^{ijk} \dot{q}^j \epsilon^{klm} \frac{\partial A_m}{\partial q^l} \\
&= (\delta^{il} \delta^{jm} - \delta^{im} \delta^{jl}) \dot{q}^j \frac{\partial A_m}{\partial q^l} \\
&= \dot{q}^j \frac{\partial A_j}{\partial q^i} - \dot{q}^j \frac{\partial A_i}{\partial q^j}.
\end{aligned}$$

où  $q^3$  est la coordonnée donnée par la distance du point au plan  $\mathbb{R}^2$ , pour la métrique euclidienne de  $\mathbb{R}^3$ . Les indices prennent cette fois leurs valeurs dans  $\{1, 2, 3\}$ , mais comme  $A_3 = 0$  et  $\partial_3 A_1 = \partial_3 A_2 = 0$ , les termes non nuls sont ceux où les indices sont différents de 3.

Dans [10], Mark Levi a plutôt utilisé l'action modifiée

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_1(q, \dot{q}) &= \int_{\gamma} \left( \sqrt{2L_2} + L_1 \right) dt \\
&\equiv \int_I \left( \sqrt{\langle G(q(t)) \dot{q}(t), \dot{q}(t) \rangle} + \langle A(q(t)), \dot{q}(t) \rangle \right) dt \\
&= \int_I \left( \sqrt{G_{ij}(q) \dot{q}^i(t) \dot{q}^j(t)} + A_i(q) \dot{q}^i(t) \right) dt.
\end{aligned} \tag{1.4}$$

Clairement,  $\mathcal{L}_1(q, \dot{q})$  est invariante si on change la paramétrisation de  $q(t)$ .

**Proposition 1.1.** *Si  $\gamma$  est un chemin non paramétrisé dans  $\mathbb{R}^2$ , point critique de l'action Lagrangienne modifiée  $\mathcal{L}_1$ , alors le chemin  $\tilde{\gamma} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  paramétrisé tel que  $\|\dot{\tilde{\gamma}}\| = \sqrt{G_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j} \equiv 1$  est lisse et c'est un point critique de  $\mathcal{L}_0$ .*

**Démonstration.** Si  $\gamma$  est un point critique de  $\mathcal{L}_1$ , alors une fois paramétrisé arbitrairement, il doit satisfaire aux équations d'Euler-Lagrange de  $\mathcal{L}_1$ . Utilisant encore des coordonnées exponentielles appropriées, le calcul de celles-ci est

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} &= \frac{\dot{q}_k(t)}{\|\dot{\gamma}\|} + A_k(q) \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} &= \frac{\ddot{q}_k(t)}{\|\dot{\gamma}\|} + \dot{q}_k(t) \frac{d}{dt} \frac{1}{\|\dot{\gamma}\|} + \frac{\partial A_k}{\partial q^s}(q) \dot{q}^s(t) \\ \frac{\partial L}{\partial q^k} &= \frac{\partial A_i}{\partial q^k}(q) \dot{q}^i(t).\end{aligned}$$

Alors, en choisissant  $\|\dot{\gamma}\| \equiv 1$ , elles se ramènent aux équations calculées pour  $\mathcal{L}_0$  plus tôt.  $\square$

### 1.3 La Conjecture d'Arnold

On voit facilement comment la recherche d'orbites périodiques de période donnée pour un système dynamique sur un 2-tore revient à étudier les points fixes de certains difféomorphismes de ce tore. En effet, pour un système dynamique induisant le flot  $\phi^t : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ , on définit le difféomorphisme  $\Phi : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2 : x \mapsto \phi^T(x)$  où  $T$  est la période des orbites recherchées. Néanmoins, il est difficile d'assurer l'existence de points fixes pour des difféomorphismes  $\phi^T$  quelconques du tore. Par exemple, le théorème suivant ne nous est d'aucune utilité car  $\chi(\mathbb{T}^2) = 0$ .

**Théorème du point fixe de Lefschetz.** *Si  $X$  est une variété compacte et  $\Phi : X \rightarrow X$  est une application continue avec  $\tau(\Phi) \neq 0$ , alors  $\Phi$  possède un point fixe.*

Pour une démonstration de ce théorème, voir [6]. Le nombre  $\tau(\Phi)$  d'un difféomorphisme est appelé le nombre de Lefschetz et il est défini par

$$\tau(\Phi) = \sum_n (-1)^n \text{tr}(\Phi_* : H_n(X) \rightarrow H_n(X)).$$

On voit tout de suite que si  $\Phi$  provient d'un flot,  $\Phi = \phi^T$ , alors  $\Phi_* = \text{id}_*$  de sorte que  $\tau(\Phi) = \chi(X)$ .

Il faut donc restreindre la classe des difféomorphismes étudiés. L'exemple d'une rotation autour de l'axe du tore montre que restreindre cette classe



aux symplectomorphismes ne suffit pas. En fait, les bons difféomorphismes à étudier sont les difféomorphismes Hamiltoniens. En effet, Arnold énonça dans les années 1960 sa fameuse conjecture :

**Conjecture d'Arnold.** *Tout difféomorphisme Hamiltonien d'une variété symplectique  $(M, \omega)$  possède au moins autant de points fixes qu'une fonction  $F : M \rightarrow \mathbb{R}$  a de points critiques.*

Le but du Chapitre 4 sera de réduire notre problème sur l'existence d'orbites fermées à la conjecture d'Arnold. Dans le Chapitre 2 nous introduirons un homomorphisme usuel en géométrie symplectique, le flux, qui permet de comprendre intuitivement quelles sont les particularités des difféomorphismes Hamiltoniens. Nous montrerons ensuite un fameux théorème de Conley et Zehnder, qui fut la première réponse apportée à la Conjecture d'Arnold.

Dans ce travail, les variétés seront toujours des variétés  $C^\infty$ .

# Chapitre 2

## Difféomorphismes Hamiltoniens

Dans ce chapitre, nous allons définir quelques notions élémentaires de géométrie symplectique en suivant principalement [7] et [11]. Nous montrerons également qu'il existe une manière simple et intuitive de caractériser les difféomorphismes Hamiltoniens d'une variété symplectique.

### 2.1 Notions de géométrie symplectique

**Définition 2.1.** *Une structure symplectique sur une variété  $M$  est une 2-forme fermée et non dégénérée  $\omega \in \Omega^2(M)$ .*

**Remarque 2.1.** En dimension 2, les formes volumes et les formes symplectiques coïncident. En effet, sur une telle variété, toute 2-forme est fermée. Il en résulte qu'il suffit qu'une 2-forme soit non-dégénérée pour qu'elle soit symplectique, ce qui revient à la définition d'une forme volume.

**Définition 2.2.** *Un symplectomorphisme  $\psi : (M_1, \omega_1) \rightarrow (M_2, \omega_2)$  est un difféomorphisme  $\psi : M_1 \rightarrow M_2$  tel que  $\psi^*\omega_2 = \omega_1$ . De même, on appelle symplectomorphisme de  $(M, \omega)$  un difféomorphisme  $\psi$  de  $M$  tel que  $\psi^*\omega = \omega$ . On note  $\text{Symp}(M, \omega)$ , ou plus simplement  $\text{Symp}(M)$ , le groupe des symplectomorphismes de  $(M, \omega)$ .*

Comme  $\omega$  est non dégénérée, l'homomorphisme  $T_q M \rightarrow T_q^* M : v \rightarrow \iota(v)\omega$  est bijectif. On a alors une correspondance bijective entre les champs vectoriels et les 1-formes, via

$$\chi(M) \rightarrow \Omega(M) : X \rightarrow \iota(X)\omega,$$

comme en géométrie Riemannienne. Un champ vectoriel  $X \in \chi(M)$  est dit symplectique si  $\iota(X)\omega$  est fermée.

**Proposition 2.1.** *Soit  $M$  une variété fermée. Si  $t \mapsto \psi_t \in \text{Diff}(M)$  est une famille lisse de difféomorphismes engendrée par la famille de champs vectoriels  $X_t \in \chi(M)$  via*

$$\frac{d}{dt}\psi_t = X_t \circ \psi_t, \quad \psi_0 = \text{id},$$

alors  $\psi_t \in \text{Symp}(M)$  ssi  $X_t$  est symplectique pour tout  $t$ .

**Démonstration.** Cet énoncé découle de l'identité

$$\frac{d}{dt}\psi_t^*\omega = \psi_t^*\mathcal{L}_{X_t}\omega = \psi_t^*(\iota(X_t)d\omega + d(\iota(X_t)\omega)) = \psi_t^*(d\iota(X_t)\omega),$$

qui provient de la formule de Cartan pour la dérivée de Lie

$$\mathcal{L}_X\omega = \iota(X)d\omega + d(\iota(X)\omega)$$

et du fait que  $\omega$  est fermée. □

**Définition 2.3.** *Pour une fonction lisse  $H : M \rightarrow \mathbb{R}$ , le champ vectoriel  $X_H$  déterminé par l'identité*

$$\iota(X_H)\omega = -dH$$

est appelé le champ vectoriel Hamiltonien associé à la fonction Hamiltonienne  $H$ .

Si  $M$  est fermée, le champ vectoriel  $X_H$  génère un groupe à 1-paramètre de difféomorphismes  $\varphi_H^t \in \text{Diff}(M)$  satisfaisant

$$\frac{d}{dt}\varphi_H^t = X_H \circ \varphi_H^t, \quad \varphi_H^0 = \text{id}.$$

C'est le flot Hamiltonien associé à  $H$ . Pour définir un difféomorphisme Hamiltonien, nous devons introduire la notion d'isotopie symplectique :

**Définition 2.4.** *Une isotopie symplectique est une application lisse  $[0, 1] \times M \rightarrow M : (t, q) \mapsto \psi_t(q)$  telle que  $\psi_t \in \text{Symp}(M)$  pour tout  $t$  et  $\psi_0 = \text{id}$ .*

Une telle famille de symplectomorphismes est générée par une unique famille de champs vectoriels  $X_t$ , telle que

$$\frac{d}{dt}\psi_t = X_t \circ \psi_t. \tag{2.1}$$

Comme  $\psi_t$  est symplectique pour tout  $t$ , les champs vectoriels  $X_t$  satisfont à

$$d\iota(X_t)\omega = 0$$

grâce à la Proposition 2.1. Si toutes les 1-formes  $\iota X_t \omega$  sont exactes, il existe une famille lisse de fonctions Hamiltoniennes  $H_t : M \rightarrow \mathbb{R}$  telles que

$$\iota(X_t)\omega = -dH_t,$$

voir la démonstration du théorème 3.17 sans [11] pour les détails. Ceci signifie que  $X_t$  est le champ vectoriel Hamiltonien associé à  $H_t$ , pour tout  $t$ . Dans ce cas,  $H_t$  est appelé Hamiltonien dépendant du temps et  $\psi_t$  est appelé isotopie Hamiltonienne.

**Définition 2.5.** *Un symplectomorphisme  $\psi \in \text{Symp}(M)$  est dit Hamiltonien s'il existe une isotopie Hamiltonienne  $\psi_t$  de  $\psi_0 = \text{id}$  à  $\psi_1 = \psi$ . Notons  $\text{Ham}(M)$  l'ensemble de ces difféomorphismes Hamiltoniens.*

Nous aurons également besoin de savoir que ces difféomorphismes forment un sous-groupe (et même un sous-groupe normal, mais ce n'est pas nécessaire pour la suite) de  $\text{Symp}(M)$ .

**Proposition 2.2.**  *$\text{Ham}(M)$  est un sous-groupe de  $\text{Symp}(M)$ .*

**Démonstration.** Soient  $\psi_t$  l'isotopie Hamiltonienne générée par  $H_t$  et  $\phi_t$  l'isotopie Hamiltonienne générée par  $G_t$ . On vérifie alors que  $\psi_t \circ \phi_t$  est une isotopie Hamiltonienne pour la fonction Hamiltonienne  $H_t + G_t \circ \psi_t^{-1}$  et que  $\psi_t^{-1}$  est une isotopie Hamiltonienne de fonction Hamiltonienne  $-H_t \circ \psi_t$ , voir la proposition 1 du Chapitre 5 de [7].  $\square$

A partir de la structure symplectique, nous allons construire une structure auxiliaire qui nous permettra d'exprimer  $X_t$  explicitement en fonction de  $H_t$ .

**Proposition 2.3.** *Soit  $(M, \omega)$  une variété symplectique, alors il existe une structure presque complexe  $J$  sur  $M$  et une métrique Riemannienne  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  sur  $M$  tels que*

$$\omega_x(v, Ju) = \langle v, u \rangle_x \quad (2.2)$$

pour  $v, u \in T_x M$ . De la symétrie de  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , nous avons que

$$\omega_x(Jv, Ju) = \omega_x(v, u), \quad (2.3)$$

i.e.,  $J$  est une application symplectique de l'espace vectoriel symplectique  $(T_x M, \omega_x)$ . De plus,

$$J^* = J^{-1} = -J, \quad (2.4)$$

où  $J^*$  est l'adjoint de  $J$  dans l'espace euclidien  $(T_x M, \langle \cdot, \cdot \rangle_x)$ .

**Démonstration.** Choisissons une métrique Riemannienne  $g$  quelconque sur  $M$ . Fixant un point  $x \in M$ , nous allons construire  $J = J_x$  dans  $T_x M$ . Toutes les constructions vont dépendre de  $x$  de manière lisse, et pour faciliter les notations, ces dépendances ne seront pas mentionnées explicitement. Comme  $\omega$  est non dégénérée, il existe un unique isomorphisme linéaire  $A : T_x M \rightarrow T_x M$  satisfaisant

$$\omega(u, v) = g(Au, v), \quad u, v \in T_x M.$$

Comme  $\omega$  est antisymétrique, nous avons  $g(Au, v) = \omega(u, v) = -\omega(v, u) = -g(Av, u) = -g(v, A^*u) = g(-A^*u, v)$ , où  $A^*$  est l'application adjointe de  $A$  pour  $g$ . Ainsi

$$A^* = -A.$$

En conséquence,  $A^*A = AA^* = -A^2$  est une application auto-adjointe pour  $g$ , donc définie positive, et nous notons par  $Q = \sqrt{-A^2}$  la racine carrée positive de  $-A^2$ . Définissons

$$J \equiv AQ^{-1}.$$

Comme  $A$  et  $A^*$  commutent,  $A$  est une matrice normale, donc  $A$  et  $Q^{-1}$  commutent et nous pouvons calculer

$$J^2 = AQ^{-1}AQ^{-1} = A^2(-A^2)^{-1} = -\text{id}.$$

Finalement,

$$\begin{aligned} \omega(u, Jv) &= g(Au, Jv) = g(Au, AQ^{-1}v) \\ &= g(A^*Au, Q^{-1}v) = g(Q^2u, Q^{-1}v) \\ &= g(Qu, v). \end{aligned}$$

Comme  $Q$  est symétrique et définie positive, nous concluons que

$$\langle u, v \rangle \equiv g(Qu, v)$$

définit une métrique Riemannienne sur  $M$  qui, en général, est différente de  $g$ . C'est la métrique désirée. Le reste de l'énoncé se vérifie facilement en utilisant que la métrique  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est symétrique. Comme la construction dépendait de manière lisse de  $x$ , la preuve est terminée.  $\square$

Si maintenant  $\text{grad } H$  dénote le gradient d'une fonction Hamiltonienne  $H$  pour la métrique Riemannienne  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , i.e.  $\langle \text{grad } H(x), v \rangle = dH(x)v$  pour tout  $v \in T_x M$ , nous trouvons la représentation

$$X_t(x) = J \text{grad } H_t(x) \in T_x M$$

pour le champ vectoriel Hamiltonien  $X_t$ , en utilisant que  $J^2 = -1$ .

## 2.2 L'homomorphisme du flux

Nous avons maintenant défini les difféomorphismes Hamiltoniens, qui sont les difféomorphismes de  $M$  pour lesquels le théorème de Conley-Zehnder s'applique. Malheureusement, cette définition reste fort abstraite et difficile à utiliser en pratique. C'est d'autant plus gênant que dans le Chapitre 4, nous devons montrer qu'une certaine application de Poincaré est Hamiltonienne. C'est pourquoi nous allons maintenant développer une caractérisation plus directe de ces difféomorphismes grâce à une méthode intuitive. Conley et Zehnder ont obtenu le même résultat dans [3], sans utiliser introduire le flux. Nous suivons ici le Chapitre 10 de [11].

Dans cette section, nous supposons  $(M, \omega)$  compacte et sans bords. Considérons l'espace  $\text{Symp}(M)$  muni de la topologie  $C^1$ . Pour définir l'homomorphisme Flux, nous travaillerons avec la composante connexe à l'identité  $\text{Symp}_0(M) \subset \text{Symp}(M)$ . Deux éléments dans  $\text{Symp}_0(M)$  peuvent être joints par un chemin dans  $\text{Symp}_0(M)$  grâce au théorème suivant :

**Théorème 2.1.** (Weinstein) [11] *Soit  $(M, \omega)$  une variété symplectique compacte. Alors le groupe de symplectomorphismes  $\text{Symp}(M)$  est localement connexe par arcs.*

L'homomorphisme du flux est le plus naturellement défini sur le revêtement universel  $\widetilde{\text{Symp}}_0(M)$  de  $\text{Symp}_0(M)$ . Un point dans  $\widetilde{\text{Symp}}_0(M)$  est une classe d'homotopie d'isotopies symplectiques  $\psi_t \in \text{Symp}_0(M)$  entre  $\psi_0 = \text{id}$  et  $\psi_1 = \psi$ . Notons une telle classe d'homotopie par  $\{\psi_t\}$ . La structure de groupe peut se définir par juxtaposition des chemins. La classe d'équivalence  $\{\psi_t\} \cdot \{\varphi_t\}$  est la classe d'équivalence d'une reparamétrisation lisse de la juxtaposition  $\xi_t$  définie par

$$\xi_t = \begin{cases} \varphi_{2t}, & 0 \leq t \leq 1/2, \\ \psi_{2t-1} \circ \varphi_1, & 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases} \quad (2.5)$$

**Définition 2.6.** *L'homomorphisme du flux,  $\text{Flux} : \widetilde{\text{Symp}}_0(M) \rightarrow H^1(M; \mathbb{R})$  est défini par*

$$\text{Flux}(\{\psi_t\}) = \int_0^1 [\iota(X_t)\omega] dt \in H^1(M; \mathbb{R})$$

où les champs vectoriels  $X_t$  sont déterminés par (2.1).

Nous devons vérifier que cet homomorphisme est bien défini, c'est-à-dire qu'il ne dépend que de la classe d'homotopie, avec extrémités fixées, du chemin  $\psi_t$ . En pratique, nous allons utiliser le fait que, grâce à l'identification

habituelle de  $H^1(M; \mathbb{R})$  avec  $\text{Hom}(\pi_1(M), \mathbb{R})$ , la classe de cohomologie ci-dessus correspond à l'homomorphisme  $\pi_1(M) \rightarrow \mathbb{R}$  défini par

$$\begin{aligned} [\gamma] &\mapsto \int_0^1 \int_0^1 \omega(X_t(\gamma(s)), \dot{\gamma}(s)) ds dt \\ &= \int_0^1 \int_\gamma \lambda(t) dt, \quad \lambda(t) = \iota(X_t)\omega \end{aligned} \quad (2.6)$$

pour  $\gamma : S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow M$ .

**Lemme 2.1.** *Le membre de droite de (2.6) dépend seulement de la classe d'homotopie de  $\gamma$  et de la classe d'homotopie, avec extrémités fixées, de  $\psi_t$ .*

**Démonstration.** Comme  $\psi_t$  est une famille de symplectomorphismes, les 1-formes  $\lambda(t) \equiv \iota(X_t)\omega$  sont fermées. Ceci implique que le terme de droite de (2.6) ne dépend que de la classe d'homotopie de  $\gamma$  : si  $\gamma$  et  $\tilde{\gamma}$  sont homotopes, alors ces chemins sont les bords d'une surface  $S$  et grâce au théorème de Stokes, on a

$$\int_\gamma \lambda(t) dt - \int_{\tilde{\gamma}} \lambda(t) dt = \int_{\partial S} \lambda(t) dt = \iint_S d\lambda(t) dt = 0.$$

Définissons maintenant l'application  $\beta : S^1 \times [0, 1] \rightarrow M$  par  $\beta(s, t) \equiv \psi_t^{-1}(\gamma(s))$ . Dérivant l'identité  $\psi_t(\beta(s, t)) = \gamma(s)$  par rapport à  $s$  et  $t$ , on obtient

$$d\psi_t(\beta) \frac{\partial \beta}{\partial s} = \dot{\gamma}(s), \quad d\psi_t(\beta) \frac{\partial \beta}{\partial t} = -X_t(\gamma(s)).$$

Comme  $\psi_t^*\omega = \omega$ , Flux peut se réécrire

$$\text{Flux}(\{\psi_t\})(\gamma) = \int_0^1 \int_0^1 \omega \left( \frac{\partial \beta}{\partial s}, \frac{\partial \beta}{\partial t} \right) ds dt.$$

Cette expression dépend seulement de la classe d'homotopie de  $\beta$  ayant comme conditions aux bords

$$\beta(s+1, t) = \beta(s, t), \quad \beta(s, 1) = \psi^{-1}(\beta(s, 0))$$

où  $\psi \equiv \psi_1$ . Le membre de droite de (2.6) dépend donc seulement de la classe d'homotopie de  $\psi_t$  sujette à  $\psi_0 = \text{id}$  et  $\psi_1 = \psi$ .  $\square$

Nous avons maintenant montré que le flux est bien défini. Le lemme ci-dessus possède aussi une interprétation géométrique. La valeur de  $\text{Flux}(\{\psi_t\})$  sur un chemin  $\gamma$  est simplement l'aire symplectique balayée par le chemin  $\gamma$

sous l'isotopie  $\psi_t$ . Notons que  $\text{Flux} : \widetilde{\text{Symp}}_0(M) \rightarrow H^1(M; \mathbb{R})$  est un homomorphisme de groupe :

$$\begin{aligned} \text{Flux}(\{\varphi_t\} \cdot \{\psi_t\}) &= \int_0^{1/2} [\iota(X_t^{\varphi_{2t}})\omega]dt + \int_{1/2}^1 [\iota(X_t^{\psi_{2t-1} \circ \varphi_1})\omega]dt \\ &= \int_0^1 [\iota(X_t^{\varphi_t})\omega]dt + \int_0^1 [\iota(X_t^{\psi_t})\omega]dt \\ &= \text{Flux}(\{\varphi_t\}) + \text{Flux}(\{\psi_t\}) \end{aligned}$$

Le théorème suivant permet de relier l'homomorphisme du flux aux difféomorphismes Hamiltoniens..

**Théorème 2.2.** *Soit  $\psi \in \text{Symp}_0(M)$ . Alors  $\psi$  est un symplectomorphisme Hamiltonien ssi il existe une isotopie symplectique*

$$[0, 1] \rightarrow \text{Symp}_0(M, \omega) : t \mapsto \psi_t$$

telle que

$$\psi_0 = \text{id}, \quad \psi_1 = \psi, \quad \text{Flux}(\{\psi_t\}) = 0.$$

De plus, si  $\text{Flux}(\{\psi_t\}) = 0$  alors  $\{\psi_t\}$  est isotopique, avec extrémités fixées, à une isotopie Hamiltonienne.

**Démonstration.** Si  $\psi$  est Hamiltonien, c'est l'extrémité d'une isotopie Hamiltonienne correspondant à une famille de fonctions Hamiltoniennes  $H^t : M \rightarrow \mathbb{R}$ , et

$$\text{Flux}(\{\psi_t\}) = \int_0^1 [\iota(X_t)\omega]dt = \int_0^1 [dH_t] = 0.$$

Inversément, soit  $\psi_t \in \text{Symp}_0(M, \omega)$  une isotopie symplectique de  $\psi_0 = \text{id}$  à  $\psi_1 = \psi$  telle que  $\text{Flux}(\{\psi_t\}) = 0$ , et définissons  $X_t \in \chi(M, \omega)$  par

$$\frac{d}{dt}\psi_t = X_t \circ \psi_t.$$

Comme  $\int_0^1 [\iota(X_t)\omega]dt = 0$ , nous savons que  $\int_0^1 \iota(X_t)\omega dt$  est exacte. Il faut changer l'isotopie  $\psi_t$  afin que  $\iota(X_t)\omega$  soit exacte pour chaque  $t$ . De manière équivalente, nous devons rendre  $\int_0^T \iota(X_t)\omega dt$  exacte pour chaque  $T \in [0, 1]$ . Ceci signifie que  $\text{Flux}(\{\psi_t\}_{0 \leq t \leq T}) = 0$  pour tout  $T \in [0, 1]$ .

La première étape consiste à modifier  $\psi_t$  par une isotopie Hamiltonienne de manière à ce que la 1-forme  $\int_0^1 \iota(X_t)\omega dt$  soit nulle en plus d'être exacte. Dans ce but notons d'abord que, comme  $\text{Flux}(\{\psi_t\}) = 0$ , il existe une fonction  $F : M \rightarrow \mathbb{R}$  telle que

$$\int_0^1 \iota(X_t)\omega dt = dF.$$



Soit  $\varphi_F^s$  le flot Hamiltonien de  $F$ . Comme  $\varphi_F^s$  est Hamiltonien pour chaque  $s \in \mathbb{R}$ , il suffit de prouver le théorème pour la composition  $\varphi_F^{-1} \circ \psi$ , plutôt que pour  $\psi$ . Or cette composition est l'extrémité de la juxtaposition  $\psi'_t$  définie par  $\psi'_t = \psi_{2t}$  pour  $0 \leq t \leq 1/2$ , et  $\psi'_t = \varphi_F^{1-2t} \circ \psi_1$  pour  $1/2 \leq t \leq 1$ . Cette isotopie  $\psi'_t$  (ou une reparamétrisation lisse) est générée par une famille de champs vectoriels  $X'_t$  tels que  $\int_0^1 \iota(X'_t)\omega dt = 0$ , donc tels que  $\int_0^1 X'_t dt = 0$ . C'est pourquoi, à partir de maintenant, nous allons supposer que  $\psi = \psi_1$  pour une isotopie telle que

$$\int_0^1 X_t dt = 0.$$

Ensuite, pour tout  $t$ , soit  $\theta_t^s \in \text{Symp}_0(M, \omega)$ ,  $s \in \mathbb{R}$ , le flot généré par le champ vectoriel symplectique

$$Y_t = - \int_0^t X_\lambda d\lambda;$$

c'est à dire

$$\frac{d}{ds} \theta_t^s = Y_t \circ \theta_t^s, \quad \theta_t^0 = \text{id}.$$

Observons que  $Y_0 = Y_1 = 0$  et donc  $\theta_0^s = \theta_1^s = \text{id}$  pour tout  $s$ .

Nous affirmons que

$$\varphi_t = \theta_t^1 \circ \psi_t$$

est l'isotopie Hamiltonienne désirée, de  $\varphi_0 = \text{id}$  à  $\varphi_1 = \psi_1 = \psi$ . Pour le voir, rappelons nous que Flux est un homomorphisme de groupes,

$$\begin{aligned} \text{Flux}(\{\varphi_t\}_{0 \leq t \leq T}) &= \text{Flux}(\{\theta_t^1\}_{0 \leq t \leq T}) + \text{Flux}(\{\psi_t\}_{0 \leq t \leq T}) \\ &= \text{Flux}(\{\theta_T^s\}_{0 \leq s \leq 1}) + \int_0^T [\iota(X_t)\omega] dt \\ &= [\iota(Y_T)\omega] + \int_0^T [\iota(X_t)\omega] dt \\ &= 0. \end{aligned}$$

La seconde étape utilise l'invariance du flux sous une homotopie, à extrémités fixées, et la troisième provient du fait que  $\theta_T^s$  est le flot de  $Y_T$ .  $\square$

Il nous reste maintenant à qualifier facilement le noyau de l'homomorphisme du flux. Comme notre but dans le Chapitre 4 sera de l'appliquer à un 2-tore muni de la structure symplectique standard  $\omega_0$ , nous allons nous restreindre à cette variété. En fait, le résultat se démontre de la même manière pour  $(\mathbb{T}^{2n}, \omega_0) = (\mathbb{R}^{2n}/\mathbb{Z}^{2n}, \omega_0)$  et c'est donc avec ces tores que nous allons

travailler. Soit  $\varphi \in \text{Symp}(\mathbb{T}^{2n}, \omega_0)$  et choisissons un lift  $\psi : (\mathbb{R}^{2n}, \omega_0) \rightarrow (\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ . Alors, comme  $\varphi$  est isotope à l'identité dans  $\text{Symp}(\mathbb{T}^{2n})$ ,

$$\psi(w + l) = \psi(w) + l$$

pour  $w \in \mathbb{R}^{2n}$  et  $l \in \mathbb{Z}^{2n}$ .

**Proposition 2.4.** *Soit  $\varphi_t \in \text{Symp}_0(\mathbb{T}^{2n}, \omega_0)$  une isotopie symplectique avec un lift  $\psi_t : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$  tel que*

$$\psi_t(w + l) = \psi_t(w) + l, \quad \psi_0(w) = w$$

pour  $w \in \mathbb{R}^{2n}$  et  $l \in \mathbb{Z}^{2n}$ . Alors

$$\text{Flux}(\{\varphi_t\}) = \left[ \sum_{j=1}^{2n} a_j dw_j \right], \quad a = (a_1, \dots, a_{2n}) = J_0 \int_{\mathbb{T}^{2n}} (\psi_1(w) - w) dw.$$

**Démonstration.** Soit  $H_t$  une famille lisse de fonctions Hamiltoniennes générant  $\psi_t$ , et  $J_0 \equiv -J$ , où  $J$  est une structure presque complexe pour  $\omega_0$ , telle que  $\frac{d}{dt}\psi_t = -J_0 \text{grad } H_t \circ \psi_t$ . Nous affirmons qu'il existe des fonctions  $h_j(t)$  telles que

$$H_t(w + l) = H_t(w) + \sum_{j=1}^{2n} h_j(t) l_j$$

pour  $w \in \mathbb{R}^{2n}, l \in \mathbb{Z}^{2n}, 0 \leq t \leq 1$ . Pour le voir, définissons  $h_j(t)$  tels que l'équation est vérifiée lorsque  $l$  est le  $j$ -ème vecteur de la base canonique, et ensuite, utilisons la linéarité par rapport à  $l$ . Donc

$$\begin{aligned} a &\equiv J_0 \int_{\mathbb{T}^{2n}} (\psi_1(w) - w) dw \\ &= J_0 \int_0^1 \int_{\mathbb{T}^{2n}} \frac{d}{dt} \psi_t(w) dw dt \\ &= \int_0^1 \int_{\mathbb{T}^{2n}} \text{grad } H_t \circ \psi_t(w) dw dt \\ &= \int_0^1 \int_{\mathbb{T}^{2n}} \text{grad } H_t(w) dw dt \\ &= \int_0^1 h(t) dt. \end{aligned}$$

De plus, malgré que les fonctions  $H_t$  ne sont pas définies sur  $\mathbb{T}^{2n}$ , à la fois

$dH_t$  et  $X_{H_t}$  descendent sur  $\mathbb{T}^{2n}$ . Nous avons donc

$$\begin{aligned}
\text{Flux}(\{\varphi_t\}) &= \int_0^1 [\iota(X_{H_t})\omega_0] dt \\
&= \int_0^1 [dH_t] dt \\
&= \left[ \sum_{j=1}^{2n} \left( \int_0^1 h_j(t) dt \right) dw_j \right] \\
&= \left[ \sum_{j=1}^{2n} a_j dw_j \right].
\end{aligned}$$

□

De plus, on voit facilement que l'existence d'une isotopie symplectique  $\psi_s$  pour  $\psi$  implique que  $\psi$  agit trivialement sur l'homologie : en effet,  $\psi_s$  restreinte à un générateur de  $\pi_1(\mathbb{T}^{2n})$  est une homotopie entre ce générateur et son image par  $\psi$ , en se rappelant que  $\pi_1(\mathbb{T}^{2n}) \cong H_1(\mathbb{T}^{2n})$ . En conséquence de ceci, du Théorème 2.2 et de la Proposition 2.4, nous avons :

**Corollaire 2.1.** *Soit  $\psi$  un symplectomorphisme de  $(\mathbb{T}^{2n}, \omega_0)$  symplectiquement isotope à l'identité et tel que*

$$\int_{\mathbb{T}^2} w dw = \int_{\mathbb{T}^2} \psi(w) dw.$$

*Alors  $\psi$  est Hamiltonien.*

# Chapitre 3

## Théorème de Conley-Zehnder

Suivant [7], nous allons prouver le cas non dégénéré de la conjecture d'Arnold pour le tore standard  $(\mathbb{T}^{2n}, \omega_0)$ , où  $\mathbb{T}^{2n} = \mathbb{R}^{2n}/\mathbb{Z}^{2n}$  et où  $\omega_0$  est la structure symplectique induite par la structure standard de  $\mathbb{R}^{2n}$  :

$$\omega_0 = \sum_i dx^i \wedge dy^i.$$

Un champ vectoriel Hamiltonien sur ce tore, dépendant périodiquement du temps, est donné par une fonction lisse  $H : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}, (t, x) \mapsto H(t, x)$ , qui est périodique en chacune de ses variables :

$$H(t + 1, x) = H(t, x) = H(t, x + j), \quad \forall j \in \mathbb{Z}^{2n}.$$

Le système Hamiltonien associé est représenté par

$$\dot{x}(t) = J \operatorname{grad} H(t, x(t)), \quad x \in \mathbb{R}^{2n}, \quad (3.1)$$

où  $J$  est

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Une solution périodique  $t \mapsto x(t) = x(t + 1) \in \mathbb{R}^{2n}$  de (3.1) représente une solution périodique et contractile du champ vectoriel sur  $\mathbb{T}^{2n}$ .

**Théorème 3.1.** *Tout champ vectoriel lisse, dépendant périodiquement du temps et Hamiltonien sur le tore  $(\mathbb{T}^{2n}, \omega_0)$  possède au moins  $2n + 1$  solutions périodiques et contractiles, de période 1.*

**Remarque 3.1.** Conley et Zehnder ont également prouvé dans [3] en utilisant la théorie de Morse, que génériquement il existe au moins  $2^{2n}$  solutions périodiques et contractiles de période 1.

La démonstration que nous allons présenter est plus laborieuse que celle publiée initialement par Conley et Zehnder dans [3], car elle utilise des variétés Banachiques, donc de dimension infinie, alors que le cas du tore permet justement une réduction finidimensionnelle. Néanmoins elle introduit une partie des outils et des méthodes nécessaires à prouver la conjecture d'Arnold dans des cadres plus généraux que celui du tore. Comme cette démonstration nécessite beaucoup d'outils d'analyse fonctionnelle, nous allons commencer par les introduire dans les deux premières sections.

### 3.1 Opérateurs de Fredholm

Dans cette section, nous allons introduire les opérateurs de Fredholm et énoncer rapidement les propriétés dont nous aurons besoin dans la suite. Dans cette section,  $V$  et  $W$  sont des espaces de Banach et  $\mathcal{C}(V, W) = \{\text{applications linéaires et bornées } A : V \rightarrow W\}$ .

**Définition 3.1.**  $A \in \mathcal{C}(V, W)$  est Fredholm si

- $A$  est d'image fermée
- $\dim \ker A < \infty$
- $\dim \operatorname{coker} A < \infty$ , où  $\operatorname{coker} A = W/\operatorname{im} A$ .

L'index d'un opérateur de Fredholm  $A$  est défini par

$$\operatorname{index} A := \dim \ker A - \dim \operatorname{coker} A.$$

Rappelons que  $A \in \mathcal{B}(V, W)$  est compact si l'image par  $A$  de toute suite bornée dans  $V$  est relativement compacte<sup>1</sup>. Introduisons également les notations  $\mathcal{K}(V, W) = \{A \in \mathcal{B}(V, W), A \text{ compact}\}$  et  $\mathcal{F}(V, W) = \{A \in \mathcal{B}(V, W), A \text{ Fredholm}\}$ .

**Théorème 3.2.** Soit  $A \in \mathcal{F}(V, W)$

- (i) Il existe un  $\epsilon > 0$  tel que si  $B \in \mathcal{B}(V, W)$  est tel que  $\|B\| < \epsilon$ , alors  $A + B \in \mathcal{F}(V, W)$  et  $\operatorname{index}(A+B) = \operatorname{index} A$ .
- (ii) Si  $K \in \mathcal{K}(V, W)$ , alors  $A + K \in \mathcal{F}(V, W)$  et  $\operatorname{index}(A+K) = \operatorname{index} A$ .

**Définition 3.2.** Une application lisse  $f : V \rightarrow W$  est Fredholm si sa différentielle  $df(v) : V \rightarrow W$  est Fredholm pour tout  $v \in V$ . On définit également son index par  $\operatorname{index} f = \operatorname{index} df(v)$ , qui est indépendant du choix de  $v$  grâce au point (i) du théorème précédent.

---

<sup>1</sup>Un sous-espace  $Y \subset X$  est relativement compact si  $\bar{Y}$  est compact. Dans le cas où  $X$  est un espace métrique, c'est équivalent à être précompact :  $Y$  est précompact si toute suite dans  $Y$  admet une sous-suite de Cauchy, c'est-à-dire une sous-suite convergente si  $Y$  est complet.

**Définition 3.3.** *Pour une application lisse quelconque  $f : V \rightarrow W$ , un vecteur  $w \in W$  est appelé une valeur régulière de  $f$  si  $f_*(v) : V \rightarrow W$  est de rang maximal pour tout  $v \in f^{-1}(w)$ .*

Terminons cette section en énonçant deux théorèmes importants relatifs aux applications dérivables entre espaces de Banach (voir l'Appendice A de [12] pour les démonstrations).

**Théorème 3.3.** *Soit  $U \subset V$  un ensemble ouvert connexe et  $l$  un entier positif. Si  $f : U \rightarrow W$  est de classe  $C^l$  et  $w$  est une valeur régulière de  $f$ , alors*

$$\mathcal{M} \equiv f^{-1}(w) \subset V$$

*est une variété Banachique  $C^l$  et*

$$T_x\mathcal{M} = \ker df(v)$$

*pour tout  $v \in \mathcal{M}$ . De plus, si  $f$  est Fredholm,  $\mathcal{M}$  est de dimension finie et*

$$\dim\mathcal{M} = \operatorname{index} f.$$

Voici enfin la généralisation du Théorème de Sard pour des variétés de dimension infinie

**Théorème 3.4.** (Sard-Smale) *Soient  $V$  et  $W$  des espaces de Banachs séparables et  $U \subset V$  un ensemble ouvert. Supposons que  $f : U \rightarrow W$  soit une application Fredholm de classe  $C^l$ , où*

$$l \geq \max\{1, \operatorname{index} f + 1\}.$$

*Alors l'ensemble*

$$W_{\text{reg}}(f) := \{w \in W \mid v \in U, f(v) = w \Rightarrow \operatorname{im} df(v) = W\}$$

*des valeurs régulières de  $f$  est de seconde catégorie dans le sens de Baire (intersection dénombrable d'ouverts denses).*

Rappelons qu'un espace de Banach est séparable s'il admet un sous-ensemble dénombrable dense. Dans notre cas,  $f$  sera toujours  $C^\infty$ .

## 3.2 Formulation analytique

Rappelons que l'action d'un système Hamiltonien est

$$\Phi(x) = \int_0^1 \frac{1}{2} \langle -J\dot{x}(t), x(t) \rangle dt - \int_0^1 H(t, x(t)) dt, \quad x \in \widehat{\Omega}. \quad (3.2)$$

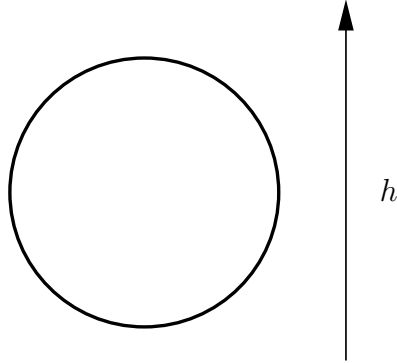


FIG. 3.1 – La fonction hauteur  $h$  possède deux extrema si elle est définie sur le cercle, alors qu'elle n'en a aucun sur le plan  $\mathbb{R}^2$  qui le contient.

Nous allons maintenant introduire l'espace fonctionnel  $\widehat{\Omega}$  adéquat pour notre action. En effet, celui-ci est primordial car si on en choisissait un trop grand, il se pourrait que l'action n'y possède pas d'extrema, voir Figure 3.3 pour un exemple en dimension finie. Nous verrons que  $\widehat{\Omega}$  est un bon espace pour notre action. Nous remarquerons également que la recherche des extrema de cette action reviendra à chercher les points critiques de son gradient. Dans cette section, nous travaillerons sur  $\mathbb{R}^{2n}$ , mais ces situations se transposeront facilement à  $\mathbb{T}^{2n}$  lorsque ce sera nécessaire.

Dans le but de trouver le bon espace de Hilbert, nous représentons les chemins périodiques  $x \in C^\infty(S^1, \mathbb{R}^{2n})$  par leurs séries de Fourier

$$x(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{k2\pi Jt} x_k, \quad x_k \in \mathbb{R}^{2n} \quad (3.3)$$

qui convergent, ainsi que toutes leurs dérivées, pour la norme supremum. Commençons par considérer la partie dominante de  $\Phi$  qui reflète la structure symplectique. On note

$$a(x, y) = \int_0^1 \frac{1}{2} \langle -J\dot{x}, y \rangle dt, \quad x, y \in C^\infty(S^1, \mathbb{R}^{2n}). \quad (3.4)$$

En insérant les séries de Fourier de  $x, y \in C^\infty(S^1, \mathbb{R}^{2n})$  dans  $a(x, y)$  et en observant que

$$\int_0^1 \langle e^{j2\pi Jt} x_j, e^{k2\pi Jt} y_k \rangle dt = \delta_{jk} \langle x_j, y_k \rangle,$$

nous obtenons

$$\begin{aligned}
2a(x, y) &= 2\pi \sum_{j, k \in \mathbb{Z}} \langle -J^2 e^{j2\pi Jt} x_j, e^{k2\pi Jt} y_k \rangle dt & (3.5) \\
&= 2\pi \sum_{j \in \mathbb{Z}} j \langle x_j, y_j \rangle \\
&= 2\pi \sum_{j > 0} |j| \langle x_j, y_j \rangle - 2\pi \sum_{j < 0} |j| \langle x_j, y_j \rangle.
\end{aligned}$$

En conséquence,  $a(x, y)$  peut être défini comme forme bilinéaire continue sur le plus grand espace  $H^{1/2} = H^{1/2}(S^1)$  qui est un espace de Sobolev. Rappelons que les espaces  $H^s = H^s(S^1)$  pour  $s \geq 0$  sont définis par

$$H^s = \left\{ x \in L^2(S^1) \mid \sum_{j \in \mathbb{Z}} |j|^{2s} |x_j|^2 < \infty \right\}$$

où

$$x = \sum_{j \in \mathbb{Z}} e^{j2\pi Jt} x_j, \quad x_j \in \mathbb{R}^{2n}$$

est la série de Fourier de  $x$ . L'espace  $H^s$  est un espace de Hilbert avec un produit scalaire et une norme définis par

$$\begin{aligned}
\langle x, y \rangle_s &= \langle x_0, y_0 \rangle + 2\pi \sum_{k \in \mathbb{Z}} |k|^{2s} \langle x_k, y_k \rangle \\
\|x\|_s^2 &= \langle x, x \rangle_s, & (3.6)
\end{aligned}$$

pour  $x, y \in H^s$ . Nous allons distinguer l'espace de Hilbert  $H^{1/2}$  qui est l'espace de définition de notre fonctionnelle par

$$\begin{aligned}
\widehat{\Omega} &\equiv H^{1/2} \\
\langle \cdot, \cdot \rangle &\equiv \langle \cdot, \cdot \rangle_{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad \| \cdot \| = \| \cdot \|_{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Il existe une décomposition orthogonale de  $\widehat{\Omega}$

$$\widehat{\Omega} = \widehat{\Omega}^- \oplus \widehat{\Omega}^0 \oplus \widehat{\Omega}^+$$

en espaces dans lesquels  $x \in \widehat{\Omega}$  ne possède des coefficients de Fourier que pour  $j < 0, j = 0, j > 0$ . Notons les projections orthogonales correspondantes par  $P^-, P^0, P^+$ . De plus, tout  $x \in \widehat{\Omega}$  possède une unique décomposition

$$x = x^- + x^0 + x^+.$$



Grâce à (3.5), nous définissons pour  $x, y \in \widehat{\Omega}$

$$\begin{aligned} a(x, y) &= \frac{1}{2} \langle x^+, y^+ \rangle - \frac{1}{2} \langle x^-, y^- \rangle \\ &= \frac{1}{2} \langle (P^+ - P^-)x, y \rangle, \end{aligned} \quad (3.7)$$

qui est une forme bilinéaire continue sur  $\widehat{\Omega}$ , égale à (3.4) pour  $x, y \in C^\infty(S^1, \mathbb{R}^{2n})$ . La fonction  $a : \widehat{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ , définie par

$$a(x) = a(x, x) = \frac{1}{2} \|x^+\|^2 - \frac{1}{2} \|x^-\|^2, \quad (3.8)$$

est différentiable, avec différentielle

$$\begin{aligned} da(x)(y) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2h} \left( \|x^+ + hy^+\|^2 - \|x^- + hy^-\|^2 - \|x^+\|^2 + \|x^-\|^2 \right) \\ &= \langle (P^+ - P^-)x, y \rangle, \end{aligned}$$

de sorte que le gradient de  $a$  est

$$\text{grad } a(x) = (P^+ - P^-)x = x^+ - x^- \in \widehat{\Omega}, \quad (3.9)$$

en tout point  $x \in \widehat{\Omega}$ .

Nous allons maintenant voir quelques propriétés des espaces  $H^s$  qui seront nécessaires pour étudier le deuxième terme de (3.2). On voit facilement que ces espaces sont décroissants,

$$H^t \subset H^s \subset H^0 = L^2 \quad \text{pour } t \geq s \geq 0,$$

car les normes sont croissantes :

$$\|x\|_t \geq \|x\|_s \geq \|x\|_0 = \|x\|_{L^2} \quad \text{pour } x \in H^t.$$

Ceci implique en particulier que les inclusions  $I : H^t \rightarrow H^s$  pour  $t \geq s$  sont continues.

**Proposition 3.1.** *Supposons  $t > s \geq 0$ . Alors l'inclusion  $I : H^t \rightarrow H^s$  est compacte.*

**Démonstration.** L'opérateur linéaire continu  $P_N : H^t \rightarrow H^s$  défini par

$$P_N x = \sum_{|k| \leq N} e^{k2\pi Jt} x_k$$

possède une image de dimension finie, et donc est un opérateur compact. L'estimation

$$\begin{aligned}
\|(P_N - I)x\|_s^2 &= \left\| \sum_{|k|>N} e^{k2\pi Jt} x_k \right\|_s^2 \\
&= 2\pi \sum_{|k|>N} |k|^{2s} |x_k|^2 = 2\pi \sum_{|k|>N} |k|^{2(s-t)} |k|^{2t} |x_k|^2 \\
&\leq N^{2(s-t)} 2\pi \sum_{|k|>N} |k|^{2t} |x_k|^2 \leq N^{2(s-t)} \|x\|_t^2
\end{aligned}$$

montre que  $P_N \rightarrow I$  pour la norme opérateur, i.e., la norme de  $\mathcal{B}(H^t, H^s)$ . En conséquence, montrons que  $I$  est également compact. Soit  $\epsilon > 0$  et choisissons  $N$  assez grand pour que  $\|P_N - I\| < \epsilon/2$  pour la norme opérateur. Si  $B$  est la boule unité dans  $H^t$ , alors la compacité de  $P_N$  implique<sup>2</sup> que  $P_N(B) \subset H^s$  est recouvert par un nombre fini de boules de rayon  $\epsilon/2$  qui sont centrées en  $y_1, y_2, \dots, y_m \in H^s$ . En effet, si  $x \in B$  nous trouvons un  $y_j$  satisfaisant  $\|P_N(x) - y_j\|_s < \epsilon/2$ , et avec  $\|P_N(x) - I(x)\|_s < \epsilon/2$ , on a que  $\|I(x) - y_j\|_s < \epsilon$ . Donc  $I(B)$  est couvert par un nombre fini de boules de rayon  $\epsilon > 0$ . Ceci est vrai pour tout  $\epsilon > 0$  et nous concluons que  $I(B)$  est relativement compact dans  $H^s$ .  $\square$

L'ensemble  $C^\infty(S^1, \mathbb{R}^{2n})$  est dense dans  $H^s$  pour tout  $s \geq 0$ . Pourtant, certains éléments de  $H^{1/2}$  ne sont pas représentés par des fonctions continues.

**Proposition 3.2.** *Supposons  $s > \frac{1}{2}$ . Si  $x \in H^s$ , alors  $x \in C(S^1)$ . De plus, il existe une constante  $c = c_s$  telle que*

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} |x(t)| \leq c \|x\|_s, \quad x \in H^s(S^1).$$

**Démonstration.** Nous allons montrer que la série de Fourier

$$x = \sum_k e^{k2\pi Jt} x_k,$$

qui converge dans  $L^2$ , converge également pour la norme supremum. Ceci

---

<sup>2</sup>Rappelons qu'un autre critère pour qu'un espace métrique  $X$  soit précompact est que  $\forall \epsilon > 0$ , il existe un ensemble fini  $\{x_1, \dots, x_n\}$  tel que  $X \subset \bigcup_{k=1}^n B(x_k, \epsilon)$ .

découle de l'estimation

$$\begin{aligned} \sum_{k \neq 0} |e^{k2\pi Jt} x_k| &= \sum_{k \neq 0} |x_k| = \sum_{k \neq 0} |k|^{-s} |k|^s |x_k| \\ &\leq \left( \sum_{k \neq 0} \frac{1}{|k|^{2s}} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \sum_{k \neq 0} |k|^{2s} |x_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq c \|x\|_s \end{aligned}$$

où nous avons utilisé que  $2s > 1$ . □

Le même argument montre que, plus généralement, si  $s > \frac{1}{2} + r$  pour  $r$  entier, alors  $x \in H^s$  appartient à  $C^r(S^1)$  et

$$\sup_{\substack{0 \leq j \leq r \\ 0 \leq t \leq 1}} |D^j x(t)| \leq c \|x\|_s, \quad x \in H^s(S^1).$$

En effet, il suffit de remarquer que

$$\left( \sum_{k \neq 0} \frac{1}{|k|^{2(s-r)}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

converge pour  $s > \frac{1}{2} + r$ . Grâce à la Proposition 3.5, l'inclusion

$$j : H^{1/2} \rightarrow L^2 \tag{3.10}$$

est compacte. Son opérateur adjoint

$$j^* : L^2 \rightarrow H^{1/2} \tag{3.11}$$

est, comme d'habitude, défini par

$$(j(x), y)_{L^2} = \langle x, j^*(y) \rangle_{\frac{1}{2}} \tag{3.12}$$

pour tout  $x \in H^{1/2}$  et  $y \in L^2$ . La propriété suivante de  $j^*$  nous sera utile plus tard.

**Proposition 3.3.**

$$j^*(L^2) \subset H^1 \quad \text{et} \quad \|j^*(y)\|_1 \leq \|y\|_{L^2}.$$

*L'application  $j^*$  se factorise :  $L^2 \rightarrow H^1 \rightarrow H^{1/2}$ , donc  $j^*$  est un opérateur compact grâce à la Proposition 3.5. On pourrait également le déduire de la compacité de  $j$ .*

**Démonstration.** Par définition de l'adjoint,

$$\sum_k \langle x_k, y_k \rangle = \langle j(x), y \rangle_{L^2} = \langle x_0, j^*(y)_0 \rangle + 2\pi \sum_k |k| \langle x_k, j^*(y)_k \rangle$$

pour  $x \in H^{1/2}$  et  $y \in L^2$ . On en déduit la formule suivante pour  $j^*$

$$j^*(y) = y_0 + \sum_{k \neq 0} \frac{1}{2\pi|k|} e^{k2\pi Jt} y_k,$$

si  $y \in L^2$ . L'estimation

$$\|j^*(y)\|_1 \leq \|y\|_{L^2}$$

est maintenant évidente. □

Revenant à notre fonctionnelle  $\Phi$ , nous allons maintenant étudier

$$b(x) = \int_0^1 H(t, x(t)) dt.$$

Comme  $H$  est périodique en chacune de ses variables, on a que  $|H(t, z)| \leq C + M|z|^2$ , pour tout  $(t, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n}$ , où

$$C \equiv \min_{t \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}^2} H(t, z) \quad \text{et} \quad M \equiv \max_{t \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}^2} |\text{Hess } H(t, z)|.$$

L'application  $b$  est donc bien définie pour  $x \in L^2$  et donc aussi pour  $x \in \widehat{\Omega} \subset L^2$ . Si nous considérons  $b$  comme une fonction définie sur  $L^2$ , nous la noterons  $\hat{b}$ , de sorte qu'avec l'inclusion  $j : \widehat{\Omega} \rightarrow L^2$ , nous pouvons écrire

$$b(x) = \hat{b}(j(x)), \quad x \in \widehat{\Omega}. \quad (3.13)$$

Pour montrer que  $\hat{b} : L^2 \rightarrow \mathbb{R}$  est différentiable, partons de l'identité

$$H(t, z+\xi) = H(t, z) + \langle \text{grad } H(t, z), \xi \rangle + \int_0^1 \langle \text{grad } H(t, z+t\xi) - \text{grad } H(t, z), \xi \rangle dt \quad (3.14)$$

pour  $z, \xi \in \mathbb{R}^{2n}$ . Comme  $|\text{Hess } H(t, z)| \leq M$ , on a que le dernier terme est  $\leq M|\xi|^2$ . Supposons maintenant que  $x \in L^2$ , alors grâce à  $|\text{grad } H(t, z)| \leq M|z|$ , on a que  $\text{grad } H(t, x(t)) \in L^2$ . Donc, pour  $x$  et  $h \in L^2$ , on trouve par intégration

$$\hat{b}(x+h) = \hat{b}(x) + \int_0^1 \langle \text{grad } H(t, x(t)), h(t) \rangle dt + R(x, h).$$

De plus,  $|R(x, h)| \leq M\|h\|_{L^2}^2$ . Cette estimation montre que  $\hat{b}$  est différentiable avec une différentielle donnée en  $x$  par

$$\begin{aligned} d\hat{b}(x)(h) &= \int_0^1 \langle \text{grad } H(t, x(t)), h(t) \rangle dt = (\text{grad } H(t, x(t)), h(t))_{L^2} \\ &= (\text{grad } \hat{b}(x), h)_{L^2}. \end{aligned}$$

Pour le gradient (par rapport à  $L^2$ ), nous lisons de cette équation  $\text{grad } \hat{b}(x) = \text{grad } H(t, x(t)) \in L^2$ . Grâce à (3.12), la différentielle de  $b : \hat{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  est donnée par

$$\begin{aligned} \langle \text{grad } b(x), y \rangle = db(x)(y) &= d\hat{b}(j(x))(j(y)) \\ &= \left( \text{grad } \hat{b}(j(x)), j(y) \right)_{L^2} = \langle j^* \text{grad } \hat{b}(j(x)), y \rangle. \end{aligned}$$

Notant  $b'(x) \equiv \text{grad } b(x)$ , on a donc

$$b'(x) = j^* \text{grad } \hat{b}(j(x)) = j^* \text{grad } H(x). \quad (3.15)$$

**Lemme 3.1.** *L'application  $b : \hat{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  est différentiable. Son gradient  $b' : \hat{\Omega} \rightarrow \hat{\Omega}$  est compact. De plus,*

$$\|b'(x) - b'(y)\| \leq M\|x - y\|$$

et  $|b(x)| \leq M\|x\|_{L^2}^2$  pour tout  $x, y \in \hat{\Omega}$ .

**Démonstration.** Clairement  $x(t) \mapsto \text{grad } H(t, x(t))$  est globalement Lipschitz sur  $L^2$  et donc, envoie des ensembles bornés sur des ensembles bornés. La compacité de  $b$  suit alors de (3.15), car  $j^* : L^2 \rightarrow \hat{\Omega}$  est compact. De plus,

$$\begin{aligned} \|b'(x) - b'(y)\|_{\frac{1}{2}} &= \|j^*(\text{grad } H(t, x(t)) - \text{grad } H(t, y(t)))\|_{\frac{1}{2}} \\ &\leq \|\text{grad } H(t, x) - \text{grad } H(t, y)\|_{L^2} \leq M\|x - y\|_{L^2} \\ &\leq M\|x - y\|_{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (3.16)$$

où la dernière estimation découle de  $|H(t, z)| \leq C + M|z|^2$ , pour tout  $z \in \mathbb{R}^{2n}$ .  
□

**Remarque 3.2.** Il sera nécessaire plus tard de savoir que  $b \in C^\infty(\hat{\Omega}, \mathbb{R})$  pour  $H \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R})$ , voir Appendice 3 de [7]

Résumant notre discussion jusqu'ici, nous avons étendu  $\Phi$  de l'espace  $C^\infty(S^1, \mathbb{R}^{2n})$  des chemins lisses à l'espace de Hilbert  $\hat{\Omega} \supset C^\infty(S^1, \mathbb{R}^{2n})$  par

$$\Phi(x) = a(x) - b(x), \quad x \in \hat{\Omega}.$$

Cette fonction  $\Phi : \widehat{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  est différentiable et son gradient est donné par

$$\text{grad } \Phi(x) = x^+ - x^- - b'(x). \quad (3.17)$$

Nous sommes intéressés par les solutions classiques des équations de Hamilton

$$\dot{x}(t) = J \text{grad } H(t, x(t)) = X_H(x(t)).$$

Il est donc important de remarquer maintenant qu'un point critique de  $\Phi$  n'est pas simplement un élément de  $\widehat{\Omega}$ , qui pourrait n'être même pas une fonction continue, mais est en fait une fonction périodique et lisse, solution des équations de Hamilton  $X_H$  et ayant une période de 1. En effet, nous avons le résultat suivant :

**Lemme 3.2.** *Supposons que  $x \in \widehat{\Omega}$  soit un point critique de  $\Phi$ , c'est à dire que  $\text{grad } \Phi(x) = 0$ . Alors  $x \in C^\infty(S^1)$ . De plus,  $x$  satisfait aux équations de Hamilton*

$$\dot{x}(t) = J \text{grad } H(t, x(t)), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

de manière à ce que  $x \in \Omega$  soit une solution 1-périodique.

**Démonstration.** Représentons  $x$  et  $\text{grad } H(t, x(t)) \in L^2$  par leurs séries de Fourier dans  $L^2$

$$\begin{aligned} x &= \sum e^{k2\pi Jt} x_k \\ \text{grad } H(t, x(t)) &= \sum e^{k2\pi Jt} a_k. \end{aligned}$$

Par hypothèse,  $d\Phi(x)(v) = 0$ . Donc, en utilisant

$$\langle b'(x), v \rangle = \langle j^* \text{grad } H(t, x(t)), v \rangle = \left( \text{grad } H(t, x(t)), v(t) \right)_{L^2},$$

$\langle \text{grad } \Phi(x), v \rangle = 0$  se réécrit

$$\langle (P^+ - P^-)x, v \rangle = \int_0^1 \langle \text{grad } H(t, x(t)), v(t) \rangle dt$$

pour tout  $v \in \widehat{\Omega}$ . En choisissant les fonctions test  $v(t) = e^{k2\pi Jt} v$ , nous trouvons

$$2\pi k x_k = a_k, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (3.18)$$

et  $a_0 = 0$ . Nous avons que

$$\sum |k|^2 |x_k|^2 \leq \sum |a_k|^2 < \infty,$$

ce qui implique que  $x \in H^1$ , et donc  $x \in \widehat{\Omega}$  appartient à  $C(S^1)$  grâce à la Proposition 3.2. En conséquence  $\text{grad } H(t, x(t)) \in C(S^1)$ , et donc,

$$\xi(t) = \int_0^t J \text{grad } H(t, x(t)) dt \in C^1(\mathbb{R}).$$

En comparant les coefficients de Fourier des deux membres de cette équation et grâce à (3.18), nous trouvons que  $\xi(t) = x(t) - x(0)$ , et donc  $x$  appartient à  $C^1(S^1)$  et est solution de l'équation  $\dot{x}(t) = J \text{grad } H(t, x(t))$ . Le membre de droite de l'équation est  $C^1$ , donc  $x \in C^2$ , et en itérant cet argument, on voit que  $x \in C^\infty(S^1)$  comme affirmé.  $\square$

L'équation gradient

$$\frac{d}{ds}x = -\text{grad } \Phi(x), \quad x \in \widehat{\Omega}, \quad (3.19)$$

est globalement Lipschitz grâce au Lemme 3.1, et elle définit donc un flot unique

$$\mathbb{R} \times \widehat{\Omega} \rightarrow \widehat{\Omega} \quad : \quad (s, x) \mapsto \varphi^s(x) \equiv x \cdot s,$$

qui envoie des ensemble bornés sur des ensemble bornés. Tout ceci est bien connu grâce à la théorie des équations différentielles ordinaires. Nous allons calculer ce flot explicitement :

**Lemme 3.3.** *Le flot de  $\dot{x} = -\text{grad } \Phi(x)$  admet la représentation*

$$\begin{aligned} x \cdot s &= e^s x^- + x^0 + e^{-s} x^+ + K(s, x) \\ K(s, x) &= \int_0^s \left( e^{s-\tau} P^- + P^0 + e^{-s+\tau} P^+ \right) b'(x \cdot \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (3.20)$$

**Démonstration.** En calculant

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}K(s, x) &= (P^- + P^0 + P^+)b'(x \cdot s) - \int_0^s \left( e^{s-\tau} P^- - e^{-s+\tau} P^+ \right) b'(x \cdot \tau) d\tau \\ &= b'(x \cdot s) + (P^- - P^+)K(s, x), \end{aligned}$$

on voit que

$$\frac{d}{ds}(x \cdot s) = (P^- - P^+)x \cdot s + b'(x \cdot s).$$

Comme de plus  $x \cdot 0 = x$ , (3.20) est bien le flot satisfaisant à (3.19), passant par  $x$  en  $s = 0$ .  $\square$

### 3.3 Démonstration du Théorème 3.1

Dans cette section, nous commencerons par revoir la situation analytique et donner une idée intuitive de la situation, avant de procéder à la démonstration proprement dite. Un chemin contractile  $S^1 \rightarrow \mathbb{T}^{2n}$  est la projection d'un chemin lisse  $x : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$  représenté par sa série de Fourier

$$x(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{2\pi k J t} x_k, \quad x_k \in \mathbb{R}^{2n}. \quad (3.21)$$

Deux tels chemins  $x$  et  $y$  sur  $\mathbb{R}^{2n}$  induisent le même chemin contractile sur  $\mathbb{T}^{2n}$  ssi  $x(t) - y(t) = j \in \mathbb{Z}^{2n}$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , de sorte que  $x_k = y_k$  pour  $k \neq 0$  et  $x_0 = y_0 + j$ . En conséquence, nous pouvons identifier l'espace des chemins lisses et contractiles sur  $\mathbb{T}^{2n}$  avec l'espace

$$\mathbb{T}^{2n} \times E^\infty,$$

où  $E^\infty \equiv \{x \in C^\infty(S^1, \mathbb{R}^{2n}) \mid \int_0^1 x(t) dt = 0\}$ . Cet espace est le quotient de l'espace  $\mathbb{R}^{2n} \times E^\infty \cong C^\infty(S^1, \mathbb{R}^{2n})$  par l'action de  $\mathbb{Z}^{2n}$ . En utilisant le travail réalisé dans la section précédente, nous pouvons remplacer  $E^\infty$  par l'espace de Sobolev

$$E = \left\{ x \in H^{1/2}(S^1, \mathbb{R}^{2n}) \mid \int_0^1 x(t) dt = 0 \right\}, \quad (3.22)$$

qui possède une décomposition orthogonale  $E = E^- \oplus E^+$  en accord avec la décomposition

$$x = \sum_{k \neq 0} e^{2\pi k J t} x_k = \sum_{k < 0} + \sum_{k > 0} = x^- + x^+.$$

Dans ces notations, on voit que l'ensemble  $\hat{\Omega}$  des chemins dans  $\mathbb{R}^{2n}$ , n'est rien d'autre que  $\mathbb{R}^{2n} \times E$  et on définit l'ensemble des chemins dans  $\mathbb{T}^{2n}$  de la même manière :  $\Omega \equiv \mathbb{T}^{2n} \times E$ . Rappelons que l'action  $\Phi : \hat{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  est définie par

$$\Phi(x) = a(x) - b(x), \quad x \in \hat{\Omega} \quad (3.23)$$

avec

$$a(x) = -\frac{1}{2} \|x^-\|^2 + \frac{1}{2} \|x^+\|^2 \quad \text{et} \quad b(x) = \int_0^1 H(t, x(t)) dt.$$

Clairement,  $\Phi$  est invariante sous l'action de  $\mathbb{Z}^{2n} : \Phi(x + j) = \Phi(x), x \in \hat{\Omega}$ . Elle définit donc une fonction lisse sur l'ensemble  $\Omega = \mathbb{T}^{2n} \times E$  des chemins contractiles dans  $\mathbb{T}^{2n}$ . Rappelons que les points  $x \in \hat{\Omega}$  qui satisfont à

$$\text{grad } \Phi(x) = 0 \quad (3.24)$$



sont les points critiques de  $\Phi$  et sont des chemins lisses. Afin de motiver notre stratégie dans la recherche de points critiques, considérons d'abord une orbite bornée du flot (3.20). Par définition, une telle orbite  $x \cdot s$  satisfait à

$$\sup_{s \in \mathbb{R}} |\Phi(x \cdot s)| < \infty. \quad (3.25)$$

Pour chaque  $T > 0$ , on a

$$\Phi(x \cdot T) - \Phi(x \cdot (-T)) = - \int_{-T}^T |\text{grad } \Phi(x \cdot s)|^2 ds, \quad (3.26)$$

qui sera démontré en (3.31). Comme  $s \mapsto \Phi(x \cdot s)$  est monotone décroissante et bornée, la limite quand  $T \rightarrow +\infty$  existe grâce à (3.25), de sorte que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \|\text{grad } \Phi(x \cdot s)\|^2 ds < \infty. \quad (3.27)$$

Nous verrons que ces orbites bornées forment un ensemble compact. On peut donc leur appliquer les propriétés bien connues des flots de type gradient (Propositions 6.8 et 6.9 de [7]). En particulier l'ensemble  $\text{Cr}(\Phi)$  des points critiques de  $\Phi$  est compact et on voit que

$$x \cdot s \rightarrow \text{Cr}(\Phi) \text{ quand } s \rightarrow \pm\infty$$

pour tout orbite bornée  $x$  du flot (3.19). Nous voyons donc que toute orbite bornée vient de  $\text{Cr}(\Phi)$  et tend vers celui-ci, et est donc une orbite connectant les différents points critiques (voir Figure 3.3).

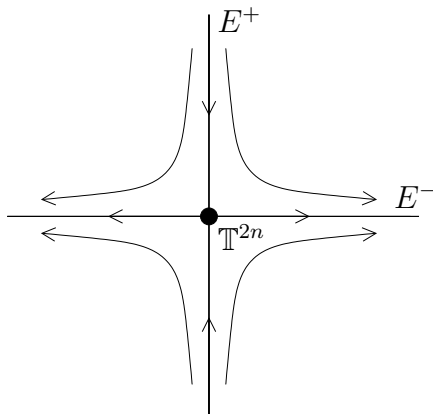


FIG. 3.2 –  $H \equiv 0$

Pour illustrer ceci, considérons la situation où le Hamiltonien est nul  $H \equiv 0$ . Dans ce cas, le flot sur  $\mathbb{T}^{2n} \times E$  est déterminé par la structure

symplectique seule et est donné explicitement par

$$x \cdot s = e^s x^- + x^0 + e^{-s} x^+,$$

où  $x = x^- + x^0 + x^+ \in \hat{\Omega}$ .

Les orbites bornées coïncident alors avec les points critiques  $x^0 \in \mathbb{T}^{2n}$  qui sont les orbites constantes. Le cas général est une perturbation compacte de cette image. L'ensemble des orbites bornées reste très petit, la plupart des solutions de (3.19) ne sont bornées ni dans le passé, ni dans le futur.

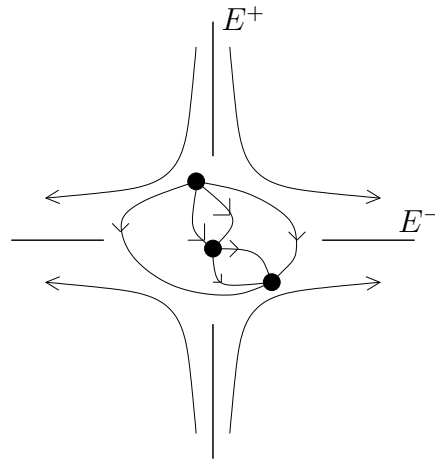


FIG. 3.3 – Déformation compacte

Notre stratégie sera maintenant d'étudier l'ensemble  $X_\infty$  des orbites bornées du flot de type gradient (3.19), i.e., les points critiques ainsi que les orbites connectant ceux-ci. Nous allons montrer que cet ensemble est compact et qu'il hérite de la topologie de  $\mathbb{T}^{2n}$ . Sur cet ensemble invariant  $X_\infty$ , il existe un flot continu de type gradient induit par le flot de type gradient (3.19), dont les points fixes sont précisément les points critiques de la fonctionnelle  $\Phi$ . Le Théorème 3.1 découlera alors de la théorie d'estimation des points fixes d'un flot continu de type gradient dans un espace compact, de Ljusternik-Schnirelman.

**Démonstration du Théorème 3.1** Définissons l'ensemble  $\hat{X}_\infty$  des solutions bornées de l'équation gradient (3.19) par

$$\hat{X}_\infty = \left\{ u \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{2n} \times E) \mid \frac{d}{ds} u(s) + \text{grad } \Phi(u(s)) = 0 \text{ pour } s \in \mathbb{R}, \sup_{s \in \mathbb{R}} |\Phi(u(s))| < \infty \right\}. \quad (3.28)$$

Cet ensemble  $\widehat{X}_\infty$  est équipé de la topologie induite par  $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{2n} \times E)$ , à savoir celle donnée par la convergence uniforme de toutes les dérivées sur les ensembles compacts de  $\mathbb{R}$ . Notons que  $\widehat{X}_\infty$  contient en particulier les solutions constantes satisfaisant à  $u(s) = u(0)$  pour tout  $s \in \mathbb{R}$  où les  $u(0)$  sont des points critiques de  $\Phi$ . Sur  $\widehat{X}_\infty$  nous avons une action naturelle de  $\mathbb{Z}^{2n}$ . En effet, comme le Hamiltonien est périodique, on en conclut que  $\Phi(u+j) = \Phi(u)$  et  $\text{grad } \Phi(u+j) = \text{grad } \Phi(u)$  pour tout  $j \in \mathbb{Z}^{2n}$ . Dans la suite, nous noterons l'espace quotient par  $X_\infty$ . Il est défini par (3.28) avec  $\mathbb{R}^{2n}$  remplacé par  $\mathbb{R}^{2n}/\mathbb{Z}^{2n} = \mathbb{T}^{2n}$ . Observons maintenant que l'équation gradient (3.19) est indépendante du temps, où le rôle du temps est joué par le paramètre  $s$ . En conséquence, si  $s \mapsto u(s)$  est une solution,  $s \mapsto u(s+\tau)$  en est aussi une pour chaque  $\tau \in \mathbb{R}$  fixé. Ce shift dans le temps induit une action continue par  $\mathbb{R}$  sur  $X_\infty$ , définie par

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \times X_\infty &\rightarrow X_\infty, (\tau, u) \mapsto \tau * u \\ (\tau * u)(s) &\equiv u(s + \tau). \end{aligned} \quad (3.29)$$

Ce flot possède une propriété très spéciale : il est de type gradient par rapport à la fonction de Liapunov continue

$$V : X_\infty \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{définie par } V(u) = \Phi(u(0)). \quad (3.30)$$

**Définition 3.4.** *Un flot  $\phi^t : M \rightarrow M$  sur une variété lisse  $M$  est dit de type gradient s'il existe une fonction continue  $V : M \rightarrow \mathbb{R}$  telle que, pour tout  $\tau > \sigma$ , elle satisfasse à*

- $V(\phi^\tau(x)) < V(\phi^\sigma(x))$  si  $x$  n'est pas un point fixe du flot,
- $V(\phi^\tau(x)) = V(\phi^\sigma(x))$  sinon.

Afin de prouver cette propriété, nous devons montrer que cette fonction  $V$  est strictement monotone décroissante le long des solutions non constantes  $\tau * u$  du flot (3.29). Si  $\tau > \sigma$ , alors

$$\begin{aligned} V(\tau * u) - V(\sigma * u) &= \Phi(u(\tau)) - \Phi(u(\sigma)) \\ &= \int_\sigma^\tau \frac{d}{dt} \Phi(u(t)) dt \\ &= \int_\sigma^\tau \text{grad } \Phi(u(t)) \cdot \frac{du}{dt}(t) dt \\ &= - \int_\sigma^\tau \|\text{grad } \Phi(u(t))\|^2 dt, \end{aligned} \quad (3.31)$$

où on a utilisé (3.28) pour passer de la troisième à la quatrième ligne. En conséquence,  $\tau \mapsto V(\tau * u)$  est monotone décroissante. Supposons maintenant

que  $V(\tau*u) = V(\sigma*u)$  pour certains  $\tau > \sigma$ . Alors  $\Phi(u(\tau)) = \Phi(u(\sigma))$  et donc, grâce à (3.31),  $\text{grad } \Phi(u(s)) = 0$  pour chaque  $\sigma \leq s \leq \tau$ . En vue de l'unicité des solutions de l'équation gradient,  $u(s) = u(0)$  pour tout  $s \in \mathbb{R}$  et donc  $\tau*u = u$  pour chaque  $\tau \in \mathbb{R}$ . En conséquence,  $\tau*u$  est une orbite constante du flot (3.29) et nous avons vérifié que  $V$  est une fonction de Liapunov pour le flot continu (3.29).

Réciproquement, si nous avons une orbite constante, i.e.,  $\tau*u = u$  pour chaque  $\tau \in \mathbb{R}$ , ce qu'on appelle un point fixe du flot (3.29), alors  $u(s) \equiv u(0)$  est une solution constante du flot de type gradient (3.19) et donc une point critique de notre fonctionnelle  $\Phi$ .

Pour l'instant, nous ne savons même pas dans quels cas  $X_\infty$  est non vide. Dans le but d'avoir un aperçu de la topologie de l'ensemble  $X_\infty$ , définissons la fonction continue

$$\hat{\rho} : C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{2n} \times E) \rightarrow \mathbb{R}^{2n} \quad (3.32)$$

associant à  $u$  la valeur moyenne du chemin  $u(0) \in \hat{\Omega}$  :

$$\hat{\rho}(u) = \int_0^1 u(0)(t) dt \in \mathbb{R}^{2n}.$$

Notons  $\rho : C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{T}^{2n} \times E) \rightarrow \mathbb{T}^{2n}$  l'application sur l'espace quotient, induite par  $\hat{\rho}$ . Il ressort, et c'est le point central de la démonstration du Théorème 3.1, que l'ensemble  $X_\infty$  hérite de la topologie de la variété  $\mathbb{T}^{2n}$  :

**Théorème 3.5.**  *$X_\infty$  est un ensemble compact et*

$$(\rho|X_\infty)^* : \check{H}^*(\mathbb{T}^{2n}) \rightarrow \check{H}^*(X_\infty) \quad (3.33)$$

*est injective. Ici et dans la suite,  $\check{H}^*$  dénotera la cohomologie d'Alexander-Spanier avec des coefficients dans  $\mathbb{Z}_2$ .*

Postposant pour un moment la preuve de ce théorème, observons d'abord que le Théorème 3.1 peut maintenant être déduit du Théorème bien connu suivant :

**Théorème 3.6.** (Ljusternik-Schnirelman) *Considérons un flot continu de type gradient sur un espace métrique compact  $X$  ; alors*

$$\#\{\text{points fixes}\} \geq \text{CL}(X) + 1.$$

Pour une démonstration, voir [7]. En se rappelant que les points critiques de  $\Phi$  sont les points fixes du flot de type gradient (3.29), on conclut du Théorème 3.6 appliqué à l'espace métrique  $X = X_\infty$ , que

$$\#\{\text{points critiques de } \Phi\} \geq \text{CL}(X_\infty) + 1.$$

Maintenant, grâce au Théorème 3.5,  $\text{CL}(X_\infty) \geq \text{CL}(\mathbb{T}^{2n})$ . Comme  $\text{CL}(\mathbb{T}^{2n}) = 2n$ , nous avons établi au moins  $2n + 1$  points critiques de  $\Phi$ . Ils correspondent aux  $2n + 1$  solutions périodiques du champ vectoriel Hamiltonien recherchées, et le Théorème 3.1 est prouvé.  $\square$

**Démonstration du Théorème 3.5.** Le reste de cette section consiste en la preuve du Théorème 3.5. Afin d'avoir un aperçu de la topologie de l'ensemble  $X_\infty$  des orbites bornées de l'équation gradient (3.19), nous allons regarder des sous variétés lisses et compactes qui approximent l'ensemble  $X_\infty$  et dont la topologie peut être estimée. La cohomologie de l'ensemble  $X_\infty$  pourra alors être déduite de la propriété de continuité de la cohomologie d'Alexander-Spanier.

Si  $T > 0$ , définissons l'ensemble  $\widehat{X}_T$  des solutions d'un problème de condition aux bords très spécial pour l'équation gradient :

$$\begin{aligned} \widehat{X}_T \equiv & \left\{ u \in C^\infty([-T, T], \mathbb{R}^{2n} \times E) \mid \right. & (3.34) \\ & \frac{d}{ds}u(s) = -\text{grad } \Phi(u(s)), \quad -T \leq s \leq T, \\ & u(-T) \in \mathbb{R}^{2n} \times E^-, \\ & \left. u(T) \in \mathbb{R}^{2n} \times E^+ \right\}. \end{aligned}$$

On a une action naturelle de  $\mathbb{Z}^{2n}$  sur  $\widehat{X}_T$ , notons par  $X_T$  le quotient. Il est défini par (3.34) avec  $\mathbb{R}^{2n}$  remplacé par  $\mathbb{T}^{2n}$ . Nous allons investiguer l'ensemble  $\widehat{X}_T$  en utilisant les méthodes standards de la théorie de Fredholm. Dans ce but, introduisons les espaces de Banach

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{B}}_T \equiv & \left\{ u \in C^1([-T, T], \mathbb{R}^{2n} \times E) \mid \right. \\ & u(-T) \in \mathbb{R}^{2n} \times E^-, \\ & \left. u(T) \in \mathbb{R}^{2n} \times E^+ \right\} & (3.35) \\ \widehat{\mathcal{E}}_T \equiv & \left\{ u \in C^0([-T, T], \mathbb{R}^{2n} \times E) \right\} \end{aligned}$$

équipés des normes habituelles  $C^1$  et  $C^0$  respectivement. Notons par  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{E}$  les quotients sous l'action de  $\mathbb{Z}^{2n}$ . Ils peuvent être identifiés avec les variétés Banachiques définies par (3.35) avec  $\mathbb{R}^{2n}$  remplacé par  $\mathbb{T}^{2n}$ . Définissons maintenant l'application non-linéaire

$$\begin{aligned} \widehat{L} : \widehat{\mathcal{B}} &\rightarrow \widehat{\mathcal{E}}, \quad u \mapsto \widehat{L}(u) & (3.36) \\ \widehat{L}(u)(s) &= \frac{d}{ds}u(s) + \text{grad } \Phi(u(s)), \quad -T \leq s \leq T. \end{aligned}$$

Alors  $\hat{L}(j+u) = \hat{L}(u)$ ,  $j \in \mathbb{Z}^{2n}$ , et nous noterons par  $L : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{E}$  l'application induite. Dans la suite, nous utiliserons l'abréviation  $\hat{L}(u) = \dot{u} + \text{grad } \Phi(u)$ . Comme les solutions d'une équation différentielle lisse sont lisses dans le temps, on peut représenter l'ensemble  $\hat{X}_T$  (respectivement  $X_T$ ) comme l'ensemble des solutions de  $\hat{L}(u) = 0$  (respectivement  $L(u) = 0$ ),

$$\hat{X}_T = \hat{L}^{-1}(0) \quad \text{et} \quad X_T = L^{-1}(0). \quad (3.37)$$

**Proposition 3.4.**  *$\hat{L}$  est une application de Fredholm non linéaire et l'index de Fredholm de l'application linéarisée est*

$$\text{index } \hat{L}'(u) = 2n, \quad u \in \hat{\mathcal{B}}.$$

**Démonstration.** De  $\hat{L}'(u) = \dot{u} + u^+ - u^- - b'(u)$ , on obtient pour l'application linéarisée en  $u \in \mathcal{B}$

$$\hat{L}'(u)h = \dot{h} + h^+ - h^- - b''(u)h, \quad (3.38)$$

et nous allons montrer que l'opérateur linéaire  $b''(u) \in \mathcal{L}(\hat{\mathcal{B}}, \hat{\mathcal{E}})$  est compact pour tout  $u \in \hat{\mathcal{B}}$ . Comme la différentielle d'une application lisse compacte est compacte, il est suffisant de vérifier que l'application  $u \mapsto b'(u) : \hat{\mathcal{B}} \rightarrow \hat{\mathcal{E}}$  est compacte, i.e., applique des ensemble bornés sur des ensembles précompacts. Fixons  $u \in \hat{\mathcal{B}}$ ; rappelons-nous ensuite que  $b'(u(s)) = j^* \text{grad } b(u(s))$ , nous pouvons estimer

$$\begin{aligned} & \|b'(u(s)) - b'(u(t))\|_{1/2} \\ &= \|j^*(\text{grad } b(u(s)) - \text{grad } b(u(t)))\|_{1/2} \\ &\leq M \|\text{grad } b(u(s)) - \text{grad } b(u(t))\|_{L^2} \\ &\leq M \|H\|_{C^2} \cdot \|u(s) - u(t)\|_{L^2} \\ &\leq C \|u(s) - u(t)\|_{1/2} \leq C \|u\|_{\hat{\mathcal{B}}} \cdot |t - s|, \end{aligned}$$

pour une constante  $C$  qui dépend seulement de la fonction Hamiltonienne  $H$ . On en conclut que  $b'$  envoie un sous-ensemble borné de  $\hat{\mathcal{B}}$  sur un sous-ensemble de  $\hat{\mathcal{E}}$  qui est équicontinu, et comme, pour n'importe quel  $s$  fixé, l'ensemble  $\{b'(u(s)) \mid u \in \hat{\mathcal{B}}\} = \{j^* \text{grad } b(u(s)) \mid u \in \hat{\mathcal{B}}\}$  est précompact, le théorème suivant implique que  $b'$  envoie des ensembles bornés sur des ensembles précompacts.

**Théorème 3.7.** (Ascoli-Arzelà) *Soient  $X$  et  $Y$  des espaces métriques totalement bornés et soit  $F \subset \mathcal{C}(X, Y)$  une famille équicontinues de fonctions de  $X$  dans  $Y$ . Alors  $F$  est totalement bornée pour la topologie induite par la convergence uniforme dans  $\mathcal{C}(X, Y)$ .*

Grâce au point (ii) du Théorème 3.2, ni la nature ni l'index des opérateurs de Fredholm ne sont altérés par la somme avec un opérateur compact, il suffit donc de prouver que l'opérateur linéaire

$$L_0 : \hat{\mathcal{B}} \rightarrow \hat{\mathcal{E}}, u \mapsto \dot{u} + u^+ + u^- \quad (3.39)$$

est Fredholm et d'index égal à  $2n$ . On voit que son noyau  $\ker(L_0) = \{u \in \hat{\mathcal{B}} \mid u(s) = x^0 \in \mathbb{R}^{2n}\}$  consiste en des fonctions constantes prenant leur valeur dans  $\mathbb{R}^{2n} \times \{0\}$ , donc  $\dim \ker(L_0) = 2n$ . Il suffit donc de montrer que  $L_0$  est surjectif. Pour  $g \in \hat{\mathcal{E}}$ , on définit la fonction  $u$  par

$$u(s) = \int_{-T}^s \left\{ e^{-s+\tau} g^+(\tau) + g^0(\tau) + e^{s-\tau} g^-(\tau) \right\} d\tau - \int_{-T}^T e^{s-\tau} g^-(\tau) d\tau.$$

Alors  $u$  satisfait aux conditions de bords, i.e.,  $u \in \hat{\mathcal{B}}$ , et de plus  $L_0(u) = g$  :

$$\begin{aligned} \dot{u}(s) &= \int_{-T}^s \left\{ -e^{-s+\tau} g^+(\tau) + e^{s-\tau} g^-(\tau) \right\} d\tau - \int_{-T}^T e^{s-\tau} g^-(\tau) d\tau + g(s) \\ u^+ &= \int_{-T}^s e^{-s+\tau} g^+(\tau) d\tau \\ -u^- &= -\int_{-T}^s e^{s-\tau} g^-(\tau) d\tau + \int_{-T}^T e^{s-\tau} g^-(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

□

**Proposition 3.5.**  $\hat{L} : \hat{\mathcal{B}} \rightarrow \hat{\mathcal{E}}$  est une application propre<sup>3</sup> modulo l'action de  $\mathbb{Z}^{2n}$ , i.e., si  $u_n$  est une suite satisfaisant  $\hat{L}(u_n) \rightarrow y$ , alors il existe une suite  $j_n \in \mathbb{Z}^{2n}$  telle que  $u_n + j_n$  soit précompacte dans  $\hat{\mathcal{B}}$ .

**Démonstration.** Rappelons-nous que  $\hat{L} = L_0 + b'$  et posons  $\hat{L}(u_n) = y_n$ . Alors  $L_0(u_n) = y_n - b'(u_n)$ . Comme  $\dim \ker(L_0) < \infty$ , il existe une décomposition  $\hat{\mathcal{B}} = \hat{\mathcal{B}}^0 \oplus \hat{\mathcal{B}}^1$ , avec  $\hat{\mathcal{B}}^0 = \ker(L_0)$ , et  $L_0|_{\hat{\mathcal{B}}^1}$  est un isomorphisme d'espaces de Banach. Posons maintenant  $u_n = u_n^0 + u_n^1 \in \hat{\mathcal{B}}^0 \oplus \hat{\mathcal{B}}^1$ . Comme  $b'(u_n)$  et donc  $y_n - b'(u_n)$  est bornée dans  $\hat{\mathcal{E}}$ , nous concluons que  $u_n^1$  est bornée dans  $\hat{\mathcal{B}}$ . Définissons une suite  $j_n \in \mathbb{Z}^{2n}$  telle que  $u_n^0 + j_n$  soit bornée dans  $\mathbb{R}^{2n}$ . Alors, par la compacité de  $b'$ , la suite

$$y_n - b'(u_n) = y_n - b'(u_n + j_n)$$

<sup>3</sup>Une fonction continue  $f : X \rightarrow Y$  entre deux espaces topologiques est dite propre ssi la préimage de tout ensemble compact dans  $Y$  est compacte dans  $X$ .

est précompacte dans  $\hat{\mathcal{E}}$  de sorte que  $u_n^1$  est précompact dans  $\hat{\mathcal{B}}$ . Ainsi, après avoir choisi une sous-suite, nous concluons que  $u_n + j_n \rightarrow u$  dans  $\hat{\mathcal{B}}$  comme annoncé.  $\square$

Passant à  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{E}$ , nous concluons des Propositions 3.4 et 3.5 que l'application  $L : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{E}$  est une application propre de Fredholm d'index égal à  $2n$ . De même, l'application

$$(L, \rho) : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{E} \times \mathbb{T}^{2n} \quad (3.40)$$

définie par  $u \mapsto (L(u), \rho(u))$  est une application propre de Fredholm d'index nul. Cette classe d'application possède un degré spécial, le degré de Smale mod 2, noté par

$$\deg_2\left((L, \rho), (y, m)\right) \quad (3.41)$$

pour tout point  $(y, m) \in \mathcal{E} \times \mathbb{T}^{2n}$ . Ce degré compte mod 2 le nombre de préimages sous une application lisse et propre de Fredholm d'index nul et est défini comme suit. Supposons d'abord que  $x \equiv (y, m)$  est une valeur régulière de  $F \equiv (L, \rho)$ . Si  $u$  est solution de  $F(u) = x$ , la dérivée  $F'(u)$  est une application surjective, et comme son index est nul, elle est bijective. La fonction  $F$  est donc localement inversible. Comme elle est propre, il s'ensuit qu'il n'y a qu'un nombre fini de solutions  $u$ , et le degré est défini comme le nombre de ces solutions mod 2

$$\#\{u \in \mathcal{B} \mid (L, \rho)(u) = (y, m)\} \bmod 2. \quad (3.42)$$

Si  $(y, m)$  n'est pas une valeur régulière, son degré est défini en prenant une valeur régulière proche de  $(y, m)$  en utilisant de Théorème de Sard-Smale. On peut montrer que c'est bien défini. Le degré de Smale mod 2 possède les mêmes propriétés utiles que le degré de Brouwer. En particulier, il est invariant sous des homotopies propres dans la classe des applications considérées, voir l'Appendice 7 de [7] pour plus de détails sur le degré de Brouwer.

**Proposition 3.6.**

$$\deg_2\left((L, \rho), (y, m)\right) = 1 \text{ pour tout } (y, m).$$

**Démonstration.** Considérons l'homotopie lisse d'opérateurs de Fredholm  $\Psi : [0, 1] \times \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{E} \times \mathbb{T}^{2n}$  définie par

$$\Psi_s(u) = \left(\dot{u} + u^+ - u^- - sb'(u), \rho(u)\right). \quad (3.43)$$

Comme les propriétés de compacité prouvées plus tôt dépendent seulement de la norme  $C^2$  de la fonction Hamiltonienne, nous voyons que  $\Psi$  est une homotopie propre. Ainsi le degré par rapport à un point  $(y, m)$  est indépendant



de  $s$  et donc

$$\deg_2\left((L, \rho), (y, m)\right) = \deg_2\left(\Psi_0, (y, m)\right),$$

où  $\Psi_0(u) = (\dot{u} + u^+ - u^-, \rho(u))$ . De manière similaire, on peut homotoper le point  $(y, m)$  à  $(0, m)$  et trouver que le degré est égal à

$$\deg_2\left(\Psi_0, (0, m)\right). \quad (3.44)$$

Nous affirmons que le nombre de solutions  $u$  de  $\Psi_0(u) = (0, m)$  est égal à 1. En effet, si  $u \in \mathcal{B}$  est solution de

$$\dot{u} + u^+ - u^- = 0, \quad \rho(u) = m$$

$$u(-T) \in \mathbb{T}^{2n} \times E^-, u(+T) \in \mathbb{T}^{2n} \times E^+$$

alors nécessairement  $u(s) = m \in \mathbb{T}^{2n}$  est l'unique solution.

En conséquence,  $\deg_2(\Psi_0, (0, m)) = 1$  car  $(0, m)$  est une valeur régulière de  $\Psi_0$ . Pour le voir, observons que l'application linéarisée en  $u(s) = m$  est l'opérateur linéaire

$$h \mapsto \left(\dot{h} + h^+ - h^-, \int_0^1 h(0)(t) dt\right) \quad (3.45)$$

entre les espaces tangents correspondants. C'est clairement un isomorphisme de sorte que  $(0, m)$  est une valeur régulière, ce qui termine la démonstration.  $\square$

Jusqu'à présent, nous savons du Théorème 3.3 et du fait que  $L$  est propre, que l'ensemble  $X_T = L^{-1}(0) \subset \mathcal{B}$  est une variété lisse compacte et de dimension  $2n$ , peut-être vide si 0 n'est pas une valeur régulière. Considérons maintenant l'application continue  $\rho : X_T \rightarrow \mathbb{T}^{2n}$ ,  $u \mapsto \rho(u)$  induite par l'application  $\hat{\rho}$  définie dans (3.32).

**Proposition 3.7.** *L'application  $\rho : X_T \rightarrow \mathbb{T}^{2n}$  induit une application injective en cohomologie :*

$$\rho^* : \check{H}^*(\mathbb{T}^{2n}) \rightarrow \check{H}^*(X_T).$$

*En particulier, l'ensemble  $X_T$  est non vide.*

**Démonstration.** Fixons un voisinage ouvert  $U$  de  $X_T$  dans  $\mathcal{B}$ . Si  $y \in \mathcal{E}$  est suffisamment proche de 0, alors  $L^{-1}(y) \subset U$  car  $L$  est une application continue. Grâce au Théorème de Sard-Smale, nous pouvons supposer que  $y$  est une valeur régulière de  $L$ . Il va falloir montrer que

$$\left(\rho|_{L^{-1}(y)}\right)^* : \check{H}^*(\mathbb{T}^{2n}) \rightarrow \check{H}^*(L^{-1}(y)) \quad (3.46)$$

$$\begin{array}{ccc}
U & \xrightarrow{\rho|_U} & \mathbb{T}^{2n} \\
j \uparrow & \nearrow \rho|_{L^{-1}(y)} & \\
L^{-1}(y) & & 
\end{array} \quad ,$$

est injectif. Postposant la preuve de ceci, on conclut de la commutativité du diagramme ci-dessous, où  $j$  désigne l'inclusion, que  $(\rho|_U)^*$  est également injectif. Ceci vaut pour n'importe quel voisinage ouvert  $U$  de l'ensemble compact  $X_T$ . Ainsi, en utilisant la propriété de continuité de la cohomologie d'Alexander-Spanier (en particulier le Théorème 13 dans l'Appendice 8 de [7])

$$\check{H}^*(X_T) = \lim \text{dir. } \check{H}^*(U), \quad (3.47)$$

où la limite directe est prise sur tous les voisinages  $U$  de  $X_T$ . Nous obtenons que  $(\rho|_{X_T})^*$  est bien injectif comme annoncé dans la proposition. Il reste à prouver l'injectivité de (3.46).

Comme  $y$  est une valeur régulière de  $L$ , l'application  $\rho \equiv \rho|_{L^{-1}(y)} : L^{-1}(y) \rightarrow \mathbb{T}^{2n}$  est une application entre deux variétés compactes de dimension  $2n$ . Nous allons montrer que

$$\text{deg}_2(\rho) = 1. \quad (3.48)$$

Prenons une valeur régulière  $m \in \mathbb{T}^{2n}$  de  $\rho$ . Nous affirmons que  $(y, m)$  est une valeur régulière de  $(L, \rho)$ . En effet, si  $(L, \rho)(u) = (y, m)$  alors  $L'(u) : \hat{\mathcal{B}} \rightarrow \hat{\mathcal{E}}$  est surjectif car  $y$  est, par hypothèse, une valeur régulière de  $L$ . Observons que  $\ker L'(u) = T(L^{-1}(y))$ . Comme par hypothèse,  $m$  est régulière pour  $\rho$ , l'application linéaire  $\rho'(u) : T(L^{-1}(y)) \rightarrow T(\mathbb{T}^{2n})$  est une bijection. En conséquence, l'application linéaire  $(L'(u), \rho'(u)) : \hat{\mathcal{B}} \rightarrow \hat{\mathcal{E}} \times \mathbb{R}^{2n}$  entre les espaces tangents correspondants est une bijection, de sorte que  $(y, m)$  est une valeur régulière comme annoncé. De plus, par la Proposition 3.6, nous avons

$$\begin{aligned}
1 &= \#\{(L, \rho)^{-1}(y, m)\} \pmod{2} \\
&= \#\{(\rho|_{L^{-1}(y)})^{-1}(m)\} \pmod{2}.
\end{aligned}$$

Comme  $m$  est régulière, il s'ensuit que  $\text{deg}_2(\rho) = 1$  comme affirmé en (3.48).

Abrégeant la variété compacte  $L^{-1}(y)$  par  $M$ , nous notons par  $o_M$  et  $o_T$  les classes fondamentales de  $M$  et  $\mathbb{T}^{2n}$ , respectivement, pour  $\mathbb{Z}_2$ . En vue de (3.48), nous concluons de la définition homologique du degré pour  $\mathbb{Z}_2$  (voir l'Appendice 7 de [7])

$$\rho_*(o_M) = o_T. \quad (3.49)$$

Notons que sur les variétés lisses compactes les théories usuelles de cohomologies (telles que la singulière, ou celle d'Alexander-Spanier) sont naturellement isomorphes. Nous pouvons donc considérer la cohomologie singulière à la place de celle d'Alexander-Spanier. Ainsi, par la dualité de Poincaré, nous avons les isomorphismes

$$\begin{aligned} H^i(M) &\xrightarrow{\cap_{o_M}} H_{2n-i}(M) & : \alpha \mapsto \alpha \cap o_M, \\ H^i(\mathbb{T}^{2n}) &\xrightarrow{\cap_{o_T}} H_{2n-i}(\mathbb{T}^{2n}) & : \beta \mapsto \beta \cap o_T. \end{aligned}$$

Prenant  $\alpha \in H^i(\mathbb{T}^{2n})$ , nous devons montrer que  $\rho^*(\alpha) = 0$  implique  $\alpha = 0$ . Dans ce but, considérons la composition d'applications

$$H^i(\mathbb{T}^{2n}) \xrightarrow{\rho^*} H^i(M) \xrightarrow{\cap_{o_M}} H_{2n-i}(M) \xrightarrow{\rho_*} H_{2n-i}(\mathbb{T}^{2n}) \xrightarrow{(\cap_{o_T})^{-1}} H^i(\mathbb{T}^{2n}).$$

En utilisant la naturalité du produit cap et en utilisant (3.49), nous calculons

$$\begin{aligned} (\cap_{o_T})^{-1} \rho_* \{(\rho^* \alpha) \cap o_M\} &= \\ (\cap_{o_T})^{-1} \{\alpha \cap \rho_*(o_M)\} &= \\ (\cap_{o_T})^{-1} \{\alpha \cap o_T\} &= \alpha. \end{aligned}$$

En conséquence, si  $\rho^* \alpha = 0$ , alors  $\alpha = 0$  ce qui prouve que  $\rho^*$  est injective.  $\square$

Retournons maintenant à l'ensemble  $X_\infty$  des solutions bornées et montrons que c'est un ensemble compact, qui peut être approximé par  $X_T$ , pour  $T$  grand.

**Proposition 3.8.** *L'ensemble  $X_\infty$  est un ensemble compact.*

**Démonstration.** Si  $u \in X_\infty$  alors  $u(s) \rightarrow \text{Cr}(\Phi)$  quand  $s \rightarrow \pm\infty$ . Comme  $\sup\{|b(u)|, u \in \hat{\Omega}\} < \infty$ , il suit de la monotonie de  $\Phi(u(s))$  qu'il existe une constante  $C > 0$  satisfaisant

$$-C \leq \Phi(u(s)) \leq C \tag{3.50}$$

pour tout  $u \in X_\infty$  et tout  $s \in \mathbb{R}$ . En conséquence, l'ensemble  $X_\infty$  est fermé. De la formule (3.20) nous concluons, pour chaque  $T > 0$ ,

$$u(0)^+ = e^{-T} u(-T)^+ + P^+ \int_{-T}^0 e^s b'(u(s)) ds. \tag{3.51}$$

Comme  $u(s) \rightarrow \text{Cr}(\Phi)$  quand  $|s| \rightarrow \infty$ , l'ensemble  $u(\mathbb{R})$  est borné, et nous concluons donc, que quand  $T \rightarrow \infty$ ,

$$u(0)^+ = P^+ j^* \int_{-\infty}^0 e^s \text{grad } \hat{b}(u(s)) ds. \tag{3.52}$$

Il y a une formule similaire pour  $u(0)^-$  et nous trouvons donc un ensemble compact  $K \subset \mathbb{T}^{2n} \times E$  tel que  $u(0) \in K$  pour tout  $u \in X_\infty$ . En conséquence, l'ensemble  $\{u(0) | u \in X_\infty\}$  est compact. Comme dans la topologie  $C^\infty$ , les solutions  $u$  dépendent continûment de leurs conditions initiales, nous concluons que  $X_\infty$  est compact.  $\square$

Si  $u \in X_T$ , alors  $u$  est par définition une solution de l'équation gradient pour  $|s| \leq T$ . Il possède donc une continuation unique jusqu'à une solution  $u(s)$  pour tout temps  $s \in \mathbb{R}$ , grâce à la continuité de Lipschitz globale de grad  $\Phi$ . Ceci définit une inclusion  $j : X_T \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{T}^{2n} \times E)$  qui nous permet de considérer  $X_T$  comme un sous-ensemble de  $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{T}^{2n} \times E)$  dans ce qui suit.

**Proposition 3.9.** *Si  $U$  est un voisinage ouvert de  $X_\infty$ , alors*

$$X_T \subset U$$

pour  $T$  suffisamment grand.

**Démonstration.** Comme  $b$  est borné sur  $\hat{\Omega}$ , il existe une constante  $C > 0$  telle que

$$\Phi|_{E^-} \leq C \quad \text{et} \quad \Phi|_{E^+} \geq -C. \quad (3.53)$$

En conséquence, si  $u \in X_T$ , comme  $u$  est monotone décroissante (car solution de l'équation gradient négative (3.19)), on a

$$-C \leq \Phi(u(s)) \leq C, \quad (3.54)$$

pour tout  $u \in X_T$ ,  $|s| \leq T$  et  $T > 0$ . Nous concluons également qu'il existe une constante  $M > 0$  telle que

$$\|u(-T)\| + \|u(T)\| \leq M \quad (3.55)$$

pour tout  $u \in X_T$  et  $T > 0$ . Afin de finir la démonstration de la proposition, nous argumentons indirectement et nous allons supposer qu'il existe une suite  $T_n \rightarrow \infty$  et une suite  $u_n \in X_{T_n}$  satisfaisant  $u_n \notin U$ . Nous allons construire une sous-suite de  $u_n(0)$  qui converge vers un point  $x \in \mathbb{T}^{2n} \times E$  par lequel passe une orbite bornée  $u \in X_\infty$ . En effet, de (3.55) et de (3.51), nous tirons que  $\text{dist}(u_n(0)^+, K^+) \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$ , pour un ensemble compact  $K^+$ , comme dans la preuve de la Proposition 3.8. De même pour  $u_n(0)^-$ ; nous pouvons donc prendre une sous-suite  $u_n(0) \rightarrow x \in \mathbb{T}^{2n} \times E$  grâce au Lemme élémentaire suivant.

**Lemme 3.4.** *Soit  $X$  un espace métrique complet et  $K \subset X$  un sous-ensemble compact. Si  $u_n$  est une suite telle que  $\text{dist}(u_n, K) \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$ , alors  $u_n$  possède une sous-suite convergente.*

En vue de (3.54), nous avons  $-C \leq \Phi(u_n(s)) \leq C$ , pour  $|s| \leq T_n$  pour tout  $u$  où la constante  $C$  est indépendante de  $n$ . On a donc pour la solution  $u(s)$  passant par  $x = u(0)$  que  $-C \leq \Phi(u(s)) \leq C$  pour chaque  $s \in \mathbb{R}$ , ainsi  $u \in X_\infty$ . En conséquence,  $u_n \in U$  pour  $n$  suffisamment grand en vue de la topologie de  $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{T}^{2n} \times E)$  et de la dépendance continue des solutions en leurs conditions initiales. Cette contradiction prouve la proposition.  $\square$

**Fin de la démonstration du Théorème 3.5.** Afin de prouver l'injectivité de  $(\rho|X_\infty)^*$ , nous prenons n'importe quel voisinage ouvert  $U$  de  $X_\infty$ . Par la Proposition 3.8, nous avons que  $X_T \subset U$ . Par la Proposition 3.7, l'application  $(\rho|U)^* : \check{H}(\mathbb{T}^{2n}) \rightarrow \check{H}^*(U)$  est injective. Comme cette injectivité est vérifiée pour n'importe quel voisinage ouvert de l'ensemble compact  $X_\infty$ , nous concluons, grâce à la continuité de la cohomologie d'Alexander-Spanier (en particulier le Théorème 14 dans l'Appendice 8 de [7]), que  $(\rho|X_\infty)^* : \check{H}^*(\mathbb{T}^{2n}) \rightarrow \check{H}^*(X_\infty)$  est injective. Ceci achève la preuve du Théorème 3.5.  $\square$

# Chapitre 4

## Mouvements périodiques dans un champ magnétique

### 4.1 Énoncé du problème et résultat

Nous allons utiliser les outils des chapitres précédents pour montrer l'existence d'orbites périodiques pour une particule de charge  $e = 1$  et de masse  $m = 1$  en mouvement sur le tore de métrique Riemannienne  $G$  donnée,  $(\mathbb{T}_1, G)$ , soumise à un champ magnétique  $B$  (perpendiculaire à la surface du tore) suffisamment intense. Ce problème fut posé par Vladimir Arnold dans [1] et résolu par Mark Levi dans [10].

Pour prouver ce résultat, nous allons le remplacer par le problème plus général suivant : étudier le mouvement d'une particule chargée dans le plan de revêtement du tore en présence d'un champ magnétique perpendiculaire au plan et sous l'influence d'une force conservative. Dans ce qui suit,  $(x, y)$  sont les coordonnées standards sur  $\mathbb{R}^2$ , ce que l'on notera souvent par  $z = x + iy$ . Dans ces notations, ce problème plus général est :

$$\ddot{z} + iB(z)\dot{z} + \text{grad } V(z) = 0, \quad z = x + iy, \quad (4.1)$$

à savoir l'équation de mouvement pour une particule chargée sur un plan plat et sous l'influence d'un potentiel  $V(z)$ . On voit facilement que le terme  $-iB\dot{z} = -iB(\dot{x} + i\dot{y}) = B\dot{y} - iB\dot{x}$  est égal à  $(v \times B) = (\dot{x}, \dot{y}, 0) \times Be_z = (B\dot{y}, -B\dot{x}, 0)$ , donc ce terme représente bien la force de Lorentz. Dans ce qui suit, nous allons supposer que la force  $B(x, y)$  du champ magnétique et le potentiel  $V(x, y)$  sont lisses et périodiques pour un certain réseau du plan de revêtement :

$$B(z + n_1e_1 + n_2e_2) = B(z) \quad \text{et} \quad V(z + n_1e_1 + n_2e_2) = V(z)$$

où  $\{e_1, e_2\}$  est une base de  $\mathbb{R}^2$  qui sera spécifiée bientôt,  $z = (x, y)$  et  $n_i \in \mathbb{Z}$ .  
 Dans la suite, nous noterons l'énergie

$$\frac{1}{2}|\dot{z}|^2 + V(z) \quad (4.2)$$

par  $E$ . Notons que comme le champ magnétique est perpendiculaire au déplacement,  $E$  est préservée par le flot. Nous allons prouver le résultat suivant :

**Théorème 4.1.** *Supposons que la valeur de l'énergie  $E$ , le champ magnétique  $B(z)$  et le potentiel  $V(z)$  satisfassent à*

$$B(z) > \frac{|\text{grad } V(z)|}{\sqrt{2(E - V(z))}} \quad \forall z \in \mathbb{R}^2. \quad (4.3)$$

*Alors il existe au moins trois orbites périodiques distinctes (et qui ne sont pas congruentes entre elles), solutions de (4.1) d'énergie  $E$ .*

**Remarque 4.1.** Dans [10], Levi suppose la borne

$$\min_{\mathbb{R}^2} B(z) > \max_{\mathbb{R}^2} \frac{|\text{grad } V(z)|}{\sqrt{2(E - V(z))}}$$

Or la borne (4.3) est suffisante pour montrer le théorème.

**Remarque 4.2.** La condition (4.3) implique que la force de Lorentz  $iB\dot{z}$ , toujours perpendiculaire à la vitesse  $\dot{z}$ , soit supérieure à la force conservative  $\text{grad } V(z)$  :

$$B(z)|\dot{z}| > |\text{grad } V(z)|. \quad (4.4)$$

En effet, cette dernière équation est équivalente à (4.3) grâce à (4.2).

Nous allons maintenant montrer pourquoi le Théorème 4.1 implique que le problème d'une particule sur un tore de métrique Riemannienne arbitraire avec champ magnétique possède au moins 3 orbites périodiques qui sont contractiles. Plutôt que d'utiliser le principe variationnel (1.4) utilisé dans [10], nous allons préférer travailler directement avec les équations du mouvement pour un tel système. Rappelons que dans des coordonnées globales  $q^1, q^2$  de la variété Riemannienne  $(\mathbb{R}^2, G)$ , ces équations sont

$$\ddot{q}^k(t) + \Gamma_{ij}^k(q) \dot{q}^i(t) \dot{q}^j(t) = G^{kr}(q) \left( \frac{\partial A_i}{\partial q^r}(q) \dot{q}^i(t) - \frac{\partial A_r}{\partial q^s}(q) \dot{q}^s(t) \right). \quad (4.5)$$

Dans le but de montrer le lien entre ces trajectoires et les solutions de (4.1), nous allons transposer l'équation de (4.5) sur un tore possédant une métrique plus agréable. Énonçons un théorème bien connu qui permet cette simplification du problème (voir l'Appendice de [10] pour une démonstration) :

**Théorème 4.2.** (Théorème d'uniformisation) *Pour toute métrique Riemannienne  $G$  sur le tore  $\mathbb{T}_1 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ , il existe :*

- (i) *deux nombres réels (les moduli)  $a$  et  $b$  qui définissent le tore  $\mathbb{T}_2 = \mathbb{R}^2 \bmod me_1 + ne_2$  avec  $e_1 = (1, 0)$  et  $e_2 = (a, b)$ ,  $b \neq 0$ ,*
- (ii) *une fonction positive  $\lambda(z) > 0$ ,*
- (iii) *un difféomorphisme  $F : \mathbb{T}_2 \rightarrow \mathbb{T}_1$ ,  $z \mapsto q = F(z)$ , tel que*

$$F^*G = \lambda\delta,$$

où  $\delta$  est la métrique plate sur  $\mathbb{T}_2$ .

Grâce à ce théorème, nous avons que le difféomorphisme  $F$  transforme la métrique Riemannienne sur  $\mathbb{T}_1$  en une métrique conforme<sup>1</sup> à la métrique plate sur le tore  $\mathbb{T}_2 = \mathbb{R}^2 \bmod (n_1e_1 + n_2e_2)$  avec les bases de moduli  $e_1 = (1, 0)$  et  $e_2 = (a, b)$ . Donc  $\lambda(z)$  est périodique pour le réseau généré par  $e_1$  et  $e_2$ . On note que la fonction uniformisante  $F^{-1}$  applique le réseau carré  $\{n_1, n_2\}$  sur le réseau  $\{n_1e_1 + n_2e_2\}$  :  $F(z + n_1e_1 + n_2e_2) = F(z) + (n_1, n_2)$ .

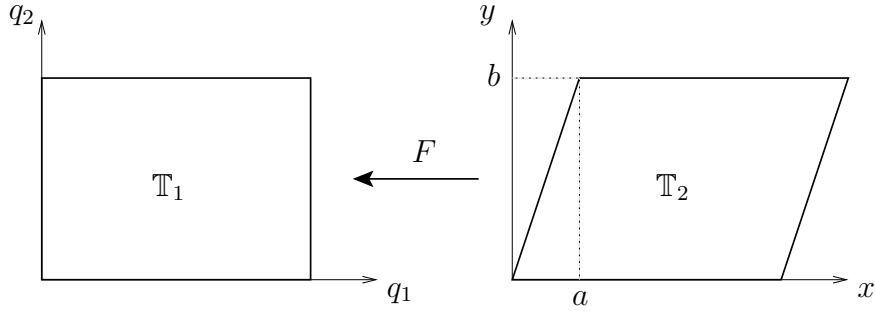


FIG. 4.1 – Uniformisation

**Lemme 4.1.**  *$F$  induit une bijection entre les trajectoires  $q(t)$  sur  $(\mathbb{R}^2, G)$  solutions de*

$$\ddot{q}^k(t) + \Gamma_{ij}^k(q) \dot{q}^i(t) \dot{q}^j(t) = G^{kr}(q) \left( \frac{\partial A_i}{\partial q^r}(q) \dot{q}^i(t) - \frac{\partial A_r}{\partial q^s}(q) \dot{q}^s(t) \right), \quad (4.6)$$

*et les trajectoires  $z(t)$  sur  $(\mathbb{R}^2, \lambda\delta)$ , solutions de*

$$\ddot{z}^k(t) + \tilde{\Gamma}_{ij}^k(z) \dot{z}^i(t) \dot{z}^j(t) = \frac{\delta^{kr}}{\lambda} \left( \frac{\partial \tilde{A}_i}{\partial z^r}(z) \dot{z}^i(t) - \frac{\partial \tilde{A}_r}{\partial z^s}(z) \dot{z}^s(t) \right), \quad (4.7)$$

<sup>1</sup>Deux métriques  $h$  et  $g$  sur une variété Riemannienne  $M$  sont dites conformes s'il existe une fonction positive  $f$  telle que  $g = fh$ .



où  $\tilde{A}$  est défini par  $dF(\tilde{A}) = A$  et où les  $\tilde{\Gamma}_{ij}^k$  sont les symboles de Christoffel pour la métrique  $\lambda\delta$ .

**Démonstration.** Il faut simplement vérifier que si  $z(t)$  satisfait à (4.6), alors  $F(z(t))$  satisfait à (4.7), et réciproquement. On voit facilement que le résultat découle de l'égalité

$$\nabla_{dF(\dot{z})}^{\lambda\delta} dF(\dot{z}) = dF(\nabla_{\dot{z}}^G \dot{z}). \quad (4.8)$$

En composantes cette égalité devient

$$\begin{aligned} (\nabla_{dF(\dot{z})}^{\lambda\delta} dF(\dot{z}))^\rho &= \frac{d^2 q^\rho}{ds^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\rho \frac{dq^\alpha}{ds} \frac{dq^\beta}{ds} \\ &= \frac{\partial q^\rho}{\partial z^\gamma} \left[ \frac{d^2 z^\gamma}{ds^2} + \left( \frac{\partial^2 q^\sigma}{\partial z^\mu \partial z^\nu} \frac{\partial z^\gamma}{\partial q^\sigma} + \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma \frac{\partial q^\alpha}{\partial z^\mu} \frac{\partial q^\beta}{\partial z^\nu} \frac{\partial z^\gamma}{\partial q^\sigma} \right) \frac{dz^\mu}{ds} \frac{dz^\nu}{ds} \right] \\ &= \frac{\partial q^\rho}{\partial z^\gamma} \left[ \frac{d^2 z^\gamma}{ds^2} + \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\gamma \frac{dz^\mu}{ds} \frac{dz^\nu}{ds} \right] \\ &= (dF(\nabla_{\dot{z}}^G \dot{z}))^\rho, \end{aligned}$$

où nous avons utilisé  $F^*G = \lambda\delta$  ainsi que la loi de transformation bien connue des symboles de Christoffel.  $\square$

Nous allons maintenant utiliser un artifice basé sur les équations<sup>2</sup> :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\lambda(z)\dot{z}^k(t)}{|\dot{z}|} \right) + \frac{\partial \tilde{A}_k}{\partial z^s}(z)\dot{z}^s(t) = \frac{|\dot{z}(t)|}{2\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial z^k}(z) + \frac{\partial \tilde{A}_i}{\partial z^k}(z)\dot{z}^i(t). \quad (4.9)$$

On voit que ces équations sont indépendantes de la paramétrisation du temps, i.e., si le chemin lisse  $z(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  est solution de (4.9), alors  $z(t(s)) : \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}^2$  l'est également, quelque soit  $t(s)$ . Nous allons maintenant nous restreindre aux solutions de (4.7) dont la paramétrisation du temps est donnée par  $|\dot{z}|^2 = \lambda(z)\dot{x}(t)^2 + \lambda(z)\dot{y}(t)^2 = 1$ . On peut relier ces solutions à celles de (4.1) grâce au système (4.9). En particulier, nous avons le résultat suivant :

**Proposition 4.1.** *Soit  $z(t)$  une solution de (4.9).*

- (i) *Si  $z(s)$  est paramétrisé tel que  $|\dot{z}(s)|^2 = 1$ , alors (4.9) devient (4.7) et  $z(s)$  est solution de (4.7).*
- (ii) *Si maintenant  $z(\tau)$  est paramétrisé tel que  $|\dot{z}(\tau)| = \lambda(z)$ , alors (4.9) devient (4.1) avec  $V(z) = -\lambda(z)/2$ . En particulier, la conservation de l'énergie  $|\dot{z}|^2/2 + V(z) = E$  avec  $E = 0$  équivaut à la paramétrisation  $\tau$ .*

---

<sup>2</sup>Elles proviennent de l'action  $\mathcal{L}_2 \equiv \int_I \left( \dot{z}^k(t)\dot{z}_k(t) + \tilde{A}_k(z)\dot{z}^k(t) \right) dt$  sur  $(\mathbb{R}^2, \lambda\delta)$ ; ce sont les équations d'Euler-Lagrange de  $\mathcal{L}_2$ .

On voit donc qu'il existe autant de trajectoires solution de (4.7) telles que  $|\dot{z}|^2 = 1$ , que de solutions de (4.1) pour une énergie  $E = 0$ .

**Démonstration.** (i) Afin d'écrire explicitement le système (4.7) dans ces coordonnées  $z$ , on calcule les différents  $\tilde{\Gamma}_{ij}^k$  :

$$\tilde{\Gamma}_{11}^1 = \tilde{\Gamma}_{21}^2 = \tilde{\Gamma}_{12}^2 = -\tilde{\Gamma}_{22}^1 = \frac{\partial_x \lambda}{2\lambda},$$

$$\tilde{\Gamma}_{22}^2 = \tilde{\Gamma}_{21}^1 = \tilde{\Gamma}_{21}^1 = -\tilde{\Gamma}_{11}^2 = \frac{\partial_y \lambda}{2\lambda}.$$

Grâce à ce calcul la première des équations de (4.7) devient

$$\lambda \ddot{x} + \dot{x} \dot{y} \partial_y \lambda + \frac{(\dot{x}^2 - \dot{y}^2)}{2} \partial_x \lambda = \frac{\partial \tilde{A}_i}{\partial x} \dot{z}^i - \frac{\partial \tilde{A}_1}{\partial z^s} \dot{x},$$

et en utilisant  $\lambda(z) \dot{x}(t)^2 + \lambda(z) \dot{y}(t)^2 = 1$  dans le membre de gauche, on a

$$\frac{d}{ds}(\lambda \dot{x}) - \frac{\partial_x \lambda}{2\lambda} = \frac{\partial \tilde{A}_i}{\partial x} \dot{z}^i - \frac{\partial \tilde{A}_1}{\partial z^s} \dot{x},$$

ce qui correspond bien à la première équation de (4.9) avec  $|\dot{z}| = 1$ . De même pour la seconde équation.

(ii) Avec cette paramétrisation du temps, (4.9) devient

$$\ddot{z}^k(t) + \frac{\partial \tilde{A}_k}{\partial z^s}(z) \dot{z}^s(t) - \frac{\partial \tilde{A}_i}{\partial z^k}(z) \dot{z}^i(t) - \frac{1}{2} \frac{\partial \lambda}{\partial z^k}(z) = 0. \quad (4.10)$$

Simplifiant un peu cette expression et en la réécrivant sous forme vectorielle

$$\begin{pmatrix} \ddot{z}^1(t) \\ \ddot{z}^2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{A}_2}{\partial z^1}(z) - \frac{\partial \tilde{A}_1}{\partial z^2}(z) \\ \frac{\partial \tilde{A}_2}{\partial z^1}(z) - \frac{\partial \tilde{A}_1}{\partial z^2}(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\dot{z}^2(t) \\ \dot{z}^1(t) \end{pmatrix} - \text{grad} \frac{\lambda(z)}{2} = 0, \quad (4.11)$$

on remarque que cette équation n'est rien d'autre que (4.1) avec

$$B = \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{A}_2}{\partial z^1}(z) - \frac{\partial \tilde{A}_1}{\partial z^2}(z) \\ \frac{\partial \tilde{A}_2}{\partial z^1}(z) - \frac{\partial \tilde{A}_1}{\partial z^2}(z) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad V(z) = -\frac{\lambda(z)}{2}. \quad (4.12)$$

□

En conséquence du Théorème 4.1 et de la Proposition 4.12, nous avons le résultat recherché :

**Corollaire 4.1.** *Les équations (4.7) sur le tore  $\mathbb{T}_2 = \mathbb{R}^2 \bmod n_1 e_1 + n_2 e_2$  possèdent au minimum trois solutions contractiles qui sont périodiques, distinctes, si*

$$\frac{|\lambda(z)| \left| \frac{\partial \tilde{A}^2}{\partial z^1}(z) - \frac{\partial \tilde{A}^1}{\partial z^2}(z) \right|}{|\text{grad } \lambda(z)|} > \frac{1}{2}, \quad (4.13)$$

**Remarque 4.3.** De même, grâce au Lemme 4.1, le problème original (4.5) possède au minimum trois solutions contractiles qui sont périodiques, distinctes, s'il satisfait à une condition du type (4.13), qui est plus compliqué à expliciter à cause de la métrique  $G$ .

Il nous reste donc à montrer le Théorème 4.1. Nous allons en fait montrer qu'il existe au moins 3 orbites périodiques et contractiles sur le tore plat  $\mathbb{T}_2$  plutôt que sur son revêtement  $\mathbb{R}^2$ , mais grâce à la discussion faite dans l'introduction, ces problèmes sont équivalents. Le reste de ce chapitre consistera à construire un bon symplectomorphisme Hamiltonien  $\psi$  pour la mesure de Lebesgue, afin d'utiliser le Théorème de Conley-Zehnder.

## 4.2 Démonstration du Théorème 4.1

### 4.2.1 Plan de la démonstration

(i) Nous allons définir une application de Poincaré comme suit : si on considère maintenant uniquement une surface d'énergie  $E^3$ , pour une particule partant d'un point  $z$  quelconque du tore  $0 \times \mathbb{T}_2$ , on appelle  $\varphi(z)$  sa prochaine intersection avec cette surface  $0 \times \mathbb{T}_2$ . Nous montrerons que cette application  $\varphi$  est bien définie grâce à la condition (4.3).

(ii) Nous montrerons que cette application  $\varphi$  préserve une certaine mesure  $\rho(x, y)d\lambda$ , où  $d\lambda = dx \wedge dy$ , et que  $\varphi$  fixe le centre de masse du tore pour cette mesure. Nous verrons ensuite que  $\varphi$  est également symplectiquement isotope à l'identité.

(iii) Enfin, nous utiliserons un Théorème dû à Moser pour construire une symplectomorphisme Hamiltonien  $\psi$  conjugué à  $\varphi$  sur  $(\mathbb{T}_1, dq^1 \wedge dq^2)$ . Nous montrerons que  $\psi$  préserve le centre de masse de  $\mathbb{T}_1$  pour  $dq^1 \wedge dq^2$ . Grâce au Corollaire 2.1 nous pourrions conclure que  $\psi \in \text{Ham}(\mathbb{T}_1, dq^1 \wedge dq^2)$ .

Pour montrer le Théorème 4.1, il ne restera plus qu'à utiliser le Théorème de Conley-Zehnder avec  $\psi$ . De plus, comme  $\psi = h \circ \varphi \circ h^{-1}$ , ces deux applications ont autant de points fixes. Il en résultera que  $\varphi$  possède bien au moins trois points fixes et le Théorème 4.1 sera prouvé.

---

<sup>3</sup>Cette surface est topologiquement un 3-tore :  $S^1 \times \mathbb{T}_2$ ; on choisit  $x, y$  et  $\theta = \arg \dot{z}$  comme coordonnées. On a donc une vitesse suivant  $x$  ssi  $\theta = 0$ .

**Remarque 4.4.** Levi utilise un argument physique à la place du théorème de Moser. Même si cet argument a l'avantage d'être plus intuitif que le nôtre, nous trouvons plus approprié d'utiliser une méthode plus directe et plus rigoureuse.

**Remarque 4.5.** Dans [10], Levi ne fait aucune allusion à la nécessité d'une isotopie symplectique, où d'action triviale sur l'homologie. Il faut pourtant bien démontrer l'un de deux avant de conclure que  $\varphi$  est Hamiltonien (voir Section 1.2).

## 4.2.2 L'angle comme nouveau paramètre pour le flot

Dans cette section, nous allons montrer d'une part que l'application de Poincaré  $\varphi$  est bien définie, et d'autre part que  $\varphi$  est symplectique pour une mesure  $\rho d\lambda$ .

Nous introduisons les coordonnées polaires  $r$  et  $\theta$  dans l'espace des vitesses grâce à  $\dot{z} = r e^{i\theta}$ . Ainsi, de la conservation de l'énergie nous obtenons la vitesse

$$r = \sqrt{2(E - V(z))} \equiv v(z) \quad (4.14)$$

comme une fonction de la position. En prenant la dérivée  $\frac{d}{dt}$  de l'équation  $\dot{z}(t) = v(z(t))e^{i\theta(t)}$  et en substituant dans l'équation (4.1), nous obtenons les équations du mouvement sur  $S^1 \times \mathbb{T}_2$

$$\begin{cases} \dot{z} = v(z)e^{i\theta} \\ \dot{\theta} = \omega(z, \theta), \end{cases} \quad (4.15)$$

où

$$\omega(z, \theta) \equiv -B + \frac{V_x \sin \theta - V_y \cos \theta}{v}. \quad (4.16)$$

L'hypothèse (4.4) implique  $\omega < 0$ , on peut supposer sans nuire à la généralité que

$$-\omega(z, \theta) \geq c > 0, \quad (4.17)$$

pour une constante  $c > 0$ . En conséquence, les applications  $\varphi_{\theta_0}^{\theta_1}$ , qui associent aux points de  $\theta_0 \times \mathbb{T}_2$  des points de  $\theta_1 \times \mathbb{T}_2$  grâce au flot (4.15), sont bien définies pour n'importe quelle paire  $\theta_0 \leq \theta_1$ . En choisissant  $\theta$  comme nouveau paramètre le long des trajectoires, nous réécrivons les équations (4.15) comme une équation pour  $z(\theta)$  sur  $\mathbb{T}_2$  :

$$\frac{dz}{d\theta} = \frac{v(z)}{\omega(z, \theta)} e^{i\theta}. \quad (4.18)$$

**Lemme 4.2.** *Le flot (4.15) préserve  $dx \wedge dy \wedge d\theta$ .*

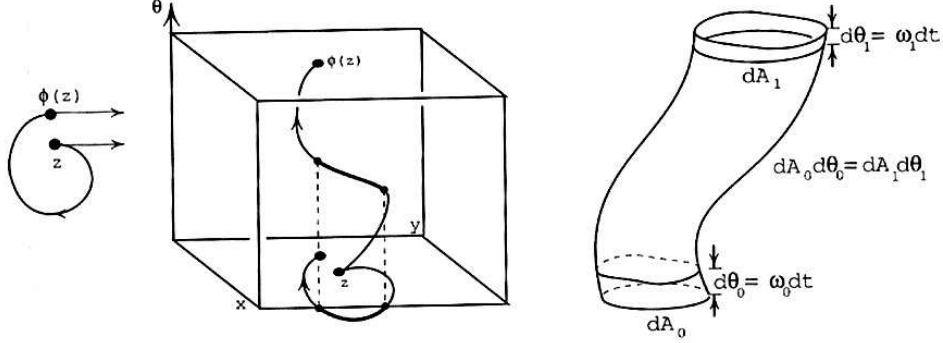


FIG. 4.2 – La mesure invariante  $\rho d\lambda$  et l'application de Poincaré

**Démonstration.** Commençons par introduire des notations :  $\phi \equiv \varphi_{t_0}^t$ , où  $\varphi_{t_0}^t$  est le flot associé à (4.15) entre  $t_0$  et  $t$ ;  $\mathcal{D} \subset S^1 \times \mathbb{T}_2$  pour un ouvert quelconque au temps  $t = t_0$ ,  $\mathcal{D}_t = \phi(\mathcal{D})$  et  $X = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{\theta})$ .

$$\int_{\mathcal{D}} \frac{d}{dt} (\phi^*)^{-1} (dx \wedge dy \wedge d\theta) = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} (\phi^*)^{-1} (dx \wedge dy \wedge d\theta) \quad (4.19)$$

$$= \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}_t} dx dy d\theta \quad (4.20)$$

$$= \int_{\mathcal{D}_t} dx dy d\theta \operatorname{div} X \quad (4.21)$$

où le passage de (4.20) à (4.21) est justifié dans [4], équation (6.53). On calcule facilement que

$$\operatorname{div} X = \frac{\partial v(z)}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial v(z)}{\partial y} \sin \theta + \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{V_x \sin \theta - V_y \cos \theta}{v} = 0,$$

ce qui montre que

$$\int_{\mathcal{D}} \frac{d}{dt} (\phi^*)^{-1} (dx \wedge dy \wedge d\theta) = 0. \quad (4.22)$$

Comme l'intégrande est continue et comme (4.22) est vrai pour tout  $\mathcal{D}$ , on a que  $\frac{d}{dt} (\phi^*)^{-1} (dx \wedge dy \wedge d\theta) = 0$  pour tout  $t$ .  $\square$

Montrons maintenant que les équations réduites (4.18) préservent la mesure  $\omega(z, \theta) d\lambda$ , où  $z = (x, y)$  et  $d\lambda = dx dy$  sur  $\mathbb{T}_2$ . Regardons un petit 2-disque  $D$  dans  $\theta_0 \times \mathbb{T}_2$  et considérons le tube balayé par  $D$  sous le flot  $\varphi_{\theta_0}^{\theta_1}$ , voir Fig. 4.2. Les volumes de Lebesgue (i.e. par rapport à  $dx \wedge dy \wedge d\theta$ ) des "tubes infinitésimaux" balayés par  $\varphi_{\theta_0}^{\theta_0+d\theta_0}$  et  $\varphi_{\theta_1}^{\theta_1+d\theta_1}$  sont égaux grâce au

Lemme 4.2. Grâce à la deuxième équation dans (4.15), ces volumes sont  $dA_0\omega_0dt = dA_1\omega_1dt$ , où  $dA$  est l'aire de Lebesgue de la base du tube, ce qui donne bien  $\omega_0dA_0 = \omega_1dA_1$ . On peut obtenir cette égalité de manière plus formelle en utilisant le théorème de la divergence : notons  $T$  le tube de trajectoires,  $D_1$  et  $D_0$  ses bords supérieurs et inférieurs respectivement tels que  $D_1 = \varphi_{\theta_0}^{\theta_1}D_0$ . On obtient

$$0 = \iiint_T \operatorname{div} X dx dy d\theta = \iint_{\partial T} X \cdot dS = \iint_{D_1} \omega(z, \theta_1) d\lambda - \iint_{D_0} \omega(z, \theta_0) d\lambda$$

Le terme d'intégration sur la surface latérale est nul car  $X$  est tangent à cette surface, et pour calculer les deux autres termes, il suffit de remarquer que les vecteurs normaux à  $D_0$  et  $D_1$  sont proportionnels à  $(0, 0, 1)$  (car  $\theta$  est constant sur ces bords). Nous en concluons que l'application de Poincaré  $\varphi \equiv \varphi_0^{2\pi}$  préserve la mesure  $\omega(z, 0)d\lambda$  et donc la mesure normée :

$$\rho(z)d\lambda \equiv \frac{\omega(z, 0)}{[\omega(z, 0)]}d\lambda, \quad (4.23)$$

où  $[\omega(z, 0)] \equiv \int_{\mathbb{T}_2} \omega(z, 0)d\lambda$ . Plus généralement, pour des tranches  $\theta = \alpha$  et  $\theta = \beta$  quelconques, nous avons conservation de la mesure entre les tranches (si on définit  $\rho(z, \gamma)d\lambda = \frac{\omega(z, \gamma)}{[\omega(z, \gamma)]}d\lambda$ ) :  $\iint_D \rho(z, \alpha)d\lambda = \iint_{\varphi_\alpha^\beta D} \rho(z, \beta)d\lambda$ , ou infinitésimalement

$$\rho(z, \alpha) = \rho(\varphi_\alpha^\beta z, \beta) \det d\varphi_\alpha^\beta(z). \quad (4.24)$$

Ceci montre que  $\varphi \equiv \varphi_0^{2\pi}$  est un symplectomorphisme de  $(\mathbb{T}_2, \rho d\lambda)$  car

$$\varphi^*(\rho(z)d\lambda) = \det d\varphi \rho(\varphi(z))d\lambda = \rho(z)d\lambda$$

où on obtient la dernière égalité grâce à (4.24).

**Remarque 4.6.** Montrons que la valeur moyenne  $[\omega(z, \theta)]$  est égale à  $-[B]$  est alors indépendante de  $\theta$ .

En effet, la valeur moyenne des quotients  $V_x/v$  et  $V_y/v$  définissant  $\omega$  (voir (4.16)) est nulle car ceux-ci sont proportionnels aux dérivées selon  $x$  et  $y$  respectivement, de la fonction périodique  $\sqrt{E - V}$ .

Notre but final est de montrer que  $\varphi : (\mathbb{T}_2, \rho d\lambda) \rightarrow (\mathbb{T}_2, \rho d\lambda)$  est conjugué à un difféomorphisme Hamiltonien  $\psi : (\mathbb{T}_1, \rho dq^1 \wedge dq^2) \rightarrow (\mathbb{T}_1, \rho dq^1 \wedge dq^2)$ . La première étape est :

### 4.2.3 Le centre de masse est fixé par $\varphi$ pour la mesure $\rho(z, 0)d\lambda$

Rappelons que  $\varphi_\alpha^\beta z$  est la solution de (4.18) avec  $\varphi_\alpha^\alpha = \text{id}$ . Considérons la position du centre de masse évoluant avec le flot :

$$Z(\theta) = \iint_{\varphi_0^\theta Q} z \rho(z, \theta) d\lambda,$$

où  $Q$  est le domaine fondamental du réseau, c'est-à-dire  $Q \equiv \{ue_1 + ve_2 : 0 \leq u < 1, 0 \leq v < 1\}$ . Nous voulons montrer que l'application de Poincaré  $\varphi$  préserve  $Z$ , c'est-à-dire

$$Z(2\pi) = Z(0). \quad (4.25)$$

Afin de calculer  $Z'(\theta)$ , remplaçons  $z$  par  $\varphi_0^\theta(w)$ , ce qui donne

$$Z(\theta) = \iint_Q \varphi_0^\theta w (\rho(\varphi_0^\theta w, \theta) \det[d\varphi_0^\theta(w)]) d\lambda.$$

Grâce à (4.24), l'expression entre parenthèses est indépendante de  $\theta$ . Si nous dérivons par rapport à  $\theta$ , utilisant (4.18) et en remplaçant ensuite  $\varphi_0^\theta(w)$  par  $z$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} Z'(\theta) &= \iint_Q \left( \frac{d}{d\theta} \varphi_0^\theta w \right) (\dots) d\lambda \\ &= e^{i\theta} \iint_{\varphi_0^\theta Q} \frac{v(z)}{\omega(z, \theta)} \rho(z, \theta) d\lambda \\ &= -\frac{e^{i\theta}}{[B]} \iint_{\varphi_0^\theta Q} v(z) d\lambda \\ &= -\frac{e^{i\theta}}{[B]} \iint_Q v(z) d\lambda \end{aligned}$$

Pour passer de la première ligne à la seconde, nous avons utilisé (4.23) ainsi que la Remarque 4.6. En intégrant, nous obtenons (4.25) car  $Z(2\pi) - Z(0) = \int_0^{2\pi} Z'(\theta) d\theta = -\frac{1}{[B]} \iint_Q v(z) d\lambda \cdot \int_0^{2\pi} e^{i\theta} d\theta = 0$ .

### 4.2.4 Construction de l'isotopie symplectique pour $\varphi$

**Proposition 4.2.** *Le symplectomorphisme  $\varphi : (\mathbb{T}_2, \rho d\lambda) \rightarrow (\mathbb{T}_2, \rho d\lambda)$  est isotope à l'identité par un chemin de symplectomorphismes.*

**Démonstration.** Rappelons-nous que  $\varphi(z_0) \equiv z(2\pi, z_0)$ , où  $z(\theta, z_0)$  satisfait à

$$\begin{cases} \frac{dz}{d\theta} = \frac{v(z)}{\omega(z, \theta)} e^{i\theta} \\ z(\theta)|_{\theta=0} = z_0 \end{cases}, \quad (4.26)$$

où  $v(z)$  et  $\omega(z, \theta)$  sont définis dans (4.14) et (4.16). Nous avons vu dans la Section 1.2.2 que si

$$B(z)|\dot{z}| > |\text{grad } V(z)|, \quad (4.27)$$

alors  $\varphi$  est symplectique. Notre but ici sera de modifier de façon lisse le système (4.26) en transformant de manière lisse  $E, V(z)$  et  $B(z)$  grâce à un paramètre  $s$ , de telle sorte que  $\varphi_1 = \varphi$  et  $\varphi_0 = \text{id}$ , où  $\varphi_s(z_0) \equiv z(2\pi, z_0, s)$ , avec  $z(\theta, z_0, s)$  solution du système modifié

$$\begin{cases} \frac{dz}{d\theta} = \frac{v(z, s)}{\omega(z, \theta, s)} e^{i\theta} \\ z(\theta, s)|_{\theta=0} = z_0 \end{cases}. \quad (4.28)$$

**Théorème 4.3.** Soit  $f : \Omega \times U \rightarrow \mathbb{R}^2$  lisse, où  $\Omega$  est un ouvert de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$  et  $U$  un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^m$ . Notons  $f$  par  $f(t, y, \lambda)$  où  $(t, y) \in \Omega$  et  $\lambda \in U$ . Soit  $y(t; t_0, y_0, \lambda)$  la solution de l'équation  $y' = f(t, y, \lambda)$  passant par le point  $(t_0, y_0)$ . Alors  $y$  est une fonction de lisse de  $(t; t_0, y_0, \lambda)$ .

Grâce à ce théorème, l'application  $\varphi_s : [0, 1] \times \mathbb{T}_2 \rightarrow \mathbb{T}_2$  sera lisse. Les seules contraintes sur les modifications de  $B(z)$  en  $B(z, s)$ ,  $E$  en  $E(s)$  et  $V(z)$  en  $V(z, s)$ , sont :

(i)  $\varphi_1 = \varphi$  et  $\varphi_0 = \text{id}$ ,

(ii)  $B(z, s)|\dot{z}| < |\text{grad } V(z, s)|$  soit respecté pour chaque  $s$ .

Pour satisfaire à (i), il suffit que  $V(z, 1) = V(z)$ ,  $E(1) = E$  et  $B(z, 1) = B(z)$  d'une part, et d'autre part que  $V(z, 0) = 0$ ,  $E(0) = C$  et  $B(z, 0) = K$  où les constantes  $C$  et  $K$  seront spécifiées plus tard. En effet, dans ce cas l'équation dans (4.28) pour  $s = 0$  devient, grâce à (4.14) et (4.16)

$$\frac{dz}{d\theta} = -\frac{\sqrt{2C}}{K} e^{i\theta}, \quad \text{donc} \quad z(\theta, z_0, 0) = i\frac{\sqrt{2C}}{K} e^{i\theta} - i\frac{\sqrt{2C}}{K} + z_0$$

et on a bien que  $z(2\pi, z_0, 0) = z_0 \Leftrightarrow \varphi_0(z_0) = z_0$ , ce qui montre que  $\varphi_0 = \text{id}$ .

Afin que (ii) soit respectée, nous allons faire ces modifications en 3 étapes. Rappelons-nous d'abord que comme  $|\dot{z}| = v(z) = \sqrt{2(E - V(z))}$ , (4.27) se réécrit

$$B(z, s) > \frac{|\text{grad } V(z, s)|}{\sqrt{2(E - V(z))}}.$$



Partant du système initial pour  $s = 1$ , nous allons commencer par augmenter  $E$  jusqu'à

$$C \equiv \max \left( \max_{z \in \mathbb{T}_2} |V(z)| + 1, E \right).$$

Après ceci, nous allons augmenter  $B(z)$  jusqu'au champ magnétique constant

$$K \equiv \max_{\mathbb{T}_2} |\text{grad } V(z)| + \max_{\mathbb{T}_2} B(z).$$

Nous pouvons maintenant enfin baisser linéairement  $V(z)$  jusqu'à 0 car

$$K > \frac{s |\text{grad } V(z)|}{\sqrt{2(C - sV(z))}}$$

est toujours respectée. □

#### 4.2.5 Passage à la variété symplectique $(\mathbb{T}_1, dq^1 \wedge dq^2)$

Nous ne pouvons pas appliquer le Théorème de Conley-Zehnder directement au symplectomorphisme Hamiltonien  $\varphi$ , car il préserve la mesure  $\rho d\lambda \neq d\lambda$ . C'est pourquoi nous allons définir un difféomorphisme  $\psi$ , conjugué à  $\varphi$  par un symplectomorphisme, de  $(\mathbb{T}_1, dq^1 \wedge dq^2)$ . Comme  $\psi$  et  $\varphi$  sont conjugués, nous montrerons que  $\psi$  est également un symplectomorphisme Hamiltonien, mais pour la mesure de Lebesgue cette fois. La clef de cette démonstration est un fameux théorème dû à Moser, dont la preuve se trouve dans [7] :

**Théorème 4.4.** (Moser) *Soit  $M$  une variété de dimension  $m$  compacte, connexe, orientée et sans bords. Si  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux formes volumes sur  $M$  de même volumes totaux, i.e.*

$$\int_M \alpha = \int_M \beta \tag{4.29}$$

*alors il existe un difféomorphisme  $u$  de  $M$  satisfaisant  $u^* \beta = \alpha$ .*

**Démonstration.** Nous allons déformer la forme volume  $\alpha$  en  $\beta$  grâce à

$$\alpha_t \equiv (1 - t)\alpha + t\beta, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Ces formes  $\alpha_t$  sont des formes volumes car localement  $\alpha$  et  $\beta$  sont représentées par  $a(x)dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$  et  $\beta = b(x)dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$  avec des fonctions toujours différentes de zéro  $a$  et  $b$ , qui, grâce à l'hypothèse (4.29), ont le même signe. Nous allons construire une famille  $\varphi^t$  de difféomorphismes satisfaisant

$$(\varphi^t)^* \alpha_t = \alpha, \quad \varphi^0 = \text{id} \tag{4.30}$$

pour  $0 \leq t \leq 1$ , de manière à ce que le difféomorphisme  $u \equiv \varphi^1$  résolve notre problème. Comme  $M$  est compacte, connexe et orientée, nous concluons de  $\int_M(\beta - \alpha) = 0$  que

$$\beta - \alpha = d\gamma \tag{4.31}$$

pour une  $(m - 1)$  – forme  $\gamma$  sur  $M$ . C’est un cas spécial du théorème de de Rham. Comme  $\alpha_t$  est une forme volume, nous trouvons un unique champ vectoriel  $X_t$  sur  $M$  dépendant du temps solutionnant l’équation linéaire

$$\iota(X_t)\alpha_t = -\gamma$$

pour  $0 \leq t \leq 1$ . Notons par  $\varphi^t$  le flot de ce champ vectoriel  $X_t$  satisfaisant  $\varphi^0 = \text{id}$ . Comme  $M$  est compacte sans bords, ce flot existe pour tout  $t$ . Comme  $d\alpha_t = 0$  pour toute forme volume, nous trouvons, en utilisant la formule de Cartan,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\varphi^t)^* \alpha_t &= (\varphi^t)^* \left( \mathcal{L}_{X_t} \alpha_t + \frac{d}{dt} \alpha_t \right) \\ &= (\varphi^t)^* (d(\iota(X_t)\alpha_t) + \beta - \alpha), \end{aligned}$$

qui est nul car  $d(\iota(X_t)\alpha_t) + \beta - \alpha = d(\iota(X_t)\alpha_t + \gamma) = 0$  par notre choix de champ vectoriel  $X_t$ . Ceci implique que (4.30) est respectée et la preuve est terminée.  $\square$

En nous rappelant la Remarque 2.1, on voit qu’en dimension 2, les formes volumes et les formes symplectiques coïncident. On ne peut pas utiliser ce théorème directement sur  $(\mathbb{T}_2, d\lambda)$  car le volume de cette variété vaut  $b$ , tandis que le volume de  $(\mathbb{T}_2, \rho d\lambda)$  vaut 1 grâce à (4.23). Nous allons donc procéder en plusieurs étapes. Commençons par considérer la variété  $(\mathbb{T}_1, dq^1 \wedge dq^2)$ , elle a bien un volume égal à 1. Grâce à un difféomorphisme  $F$  quelconque entre  $\mathbb{T}_1$  et  $\mathbb{T}_2$ , nous pouvons définir  $(\mathbb{T}_2, \omega) = (F^{-1}\mathbb{T}_1, F^*dq^1 \wedge dq^2)$ . Le volume de cette variété vaut également 1. Nous pouvons maintenant appliquer le Théorème 4.4 avec  $M = \mathbb{T}_2$ ,  $\alpha = \rho d\lambda$  et  $\beta = \omega$ . Définissons enfin le symplectomorphisme  $\psi$  de  $(\mathbb{T}_1, dq^1 \wedge dq^2)$  comme  $\psi = h \circ \varphi \circ h^{-1}$ , où  $h = F \circ u$ .

Comme la conjugaison d’une isotopie symplectique par un symplectomorphisme reste une isotopie symplectique, il ne reste qu’à montrer que la propriété de préserver le centre de masse est également conservée par conjugaison.

#### 4.2.6 L’application $\psi = h \circ \varphi \circ h^{-1}$ fixe le centre de masse de $(\mathbb{T}_1, dq^1 \wedge dq^2)$

Considérons le revêtement  $(\mathbb{R}^2, dw^1 \wedge dw^2)$  pour  $(\mathbb{T}_1, dq^1 \wedge dq^2)$  et le revêtement  $(\mathbb{R}^2, b\rho(w^1, bw^2) dw^1 \wedge dw^2)$  pour  $(\mathbb{T}_2, \rho d\lambda)$ , où les coordonnées  $w^1, w^2$  sont

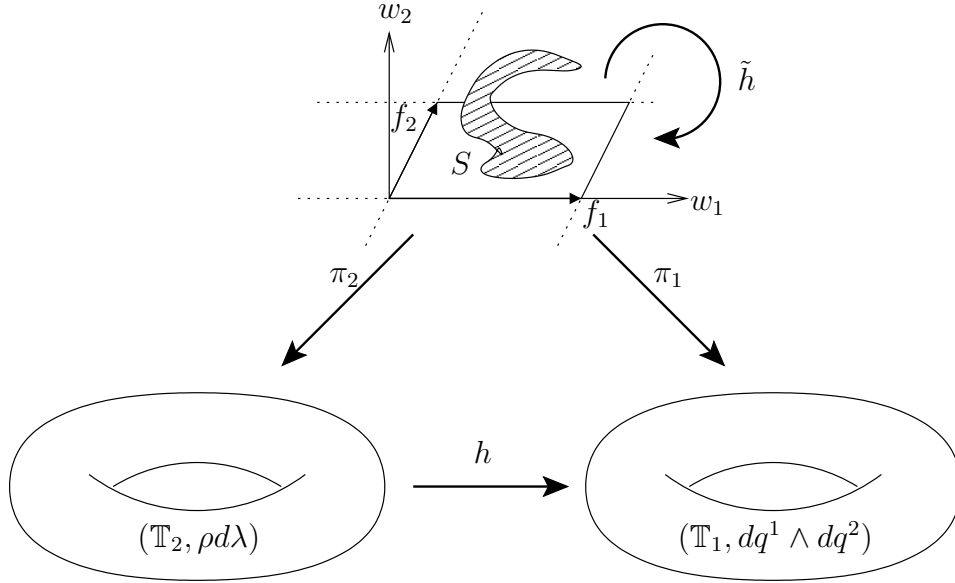


FIG. 4.3 – Plan de revêtement  $\mathbb{R}^2$  muni des coordonnées  $w^1, w^2$

reliées à  $q^1, q^2$  par

$$q^1 = w^1 \quad \text{et} \quad q^2 = aw^1 + w^2,$$

et à  $x, y$  par

$$x = w^1 \quad \text{et} \quad y = bw^2.$$

Notons  $\tilde{\rho}(w^1, w^2) \equiv b\rho(w^1, bw^2)$ ,  $\tilde{\psi}$ ,  $\tilde{\varphi}$  et  $\tilde{h}$  les relèvements de  $\psi$ ,  $\varphi$  et  $h$ , respectivement, où  $h$  et  $\psi$  sont les symplectomorphismes introduits dans la section précédente et  $\varphi$  est l'application de Poincaré définie plus tôt. Définissons également

$$P \equiv \{uf_1 + vf_2 : 0 \leq u < 1, 0 \leq v < 1\}, \quad \text{où } f_1 = (1, 0) \text{ et } f_2 = (a, 1),$$

et  $Q$  est le domaine défini dans la Section 3.2.3. Pour un ensemble mesurable  $S \subset \mathbb{R}^2$ , notons

$$[S] = \iint_S w dw^1 dw^2, \quad [S]_{\tilde{\rho}} = \iint_S w \tilde{\rho}(w) dw^1 dw^2, \quad \delta(S) = [S] - [\tilde{h}^{-1}S]_{\tilde{\rho}}.$$

Nous aimerions prouver que dans les coordonnées  $q^1, q^2$ , le centre de masse d'un domaine fondamental  $I^2 \equiv [0, 1[ \times [0, 1[$  de  $(\mathbb{T}_1, dq^1 \wedge dq^2)$  est préservé par  $\psi$ . On voit facilement que c'est équivalent à montrer cette conservation dans les coordonnées  $w^1, w^2$ , i.e.,

$$[P] = [\tilde{\psi}P]. \quad (4.32)$$

En effet on a que

$$\begin{aligned}
& \iint_{I^2} q dq^1 dq^2 - \iint_{\psi I^2} q dq^1 dq^2 \\
&= \iint_P \begin{pmatrix} w^1 \\ aw^1 + w^2 \end{pmatrix} dw^1 dw^2 - \iint_{\tilde{\psi}P} \begin{pmatrix} w^1 \\ aw^1 + w^2 \end{pmatrix} dw^1 dw^2 \\
&= \iint_P \begin{pmatrix} w^1 \\ 0 \end{pmatrix} dw^1 dw^2 - \iint_{\tilde{\psi}P} \begin{pmatrix} w^1 \\ 0 \end{pmatrix} dw^1 dw^2 \\
&+ a \left( \iint_P \begin{pmatrix} 0 \\ w^1 \end{pmatrix} dw^1 dw^2 - \iint_{\tilde{\psi}P} \begin{pmatrix} 0 \\ w^1 \end{pmatrix} dw^1 dw^2 \right) \\
&+ \iint_P \begin{pmatrix} 0 \\ w^2 \end{pmatrix} dw^1 dw^2 - \iint_{\tilde{\psi}P} \begin{pmatrix} 0 \\ w^2 \end{pmatrix} dw^1 dw^2
\end{aligned}$$

et les trois termes sont nuls ssi (4.32) est vraie. Dans le but de montrer (4.32), commençons par considérer la position relative des centres de masse  $[P]$  sur  $(\mathbb{T}_1, dq^1 \wedge dq^2)$  et  $[\tilde{h}^{-1}P]_{\tilde{\rho}}$  de  $(\mathbb{T}_2, \rho d\lambda)$  sur  $\mathbb{R}^2$  :

$$\delta(P) = [P] - [\tilde{h}^{-1}P]_{\tilde{\rho}}. \quad (4.33)$$

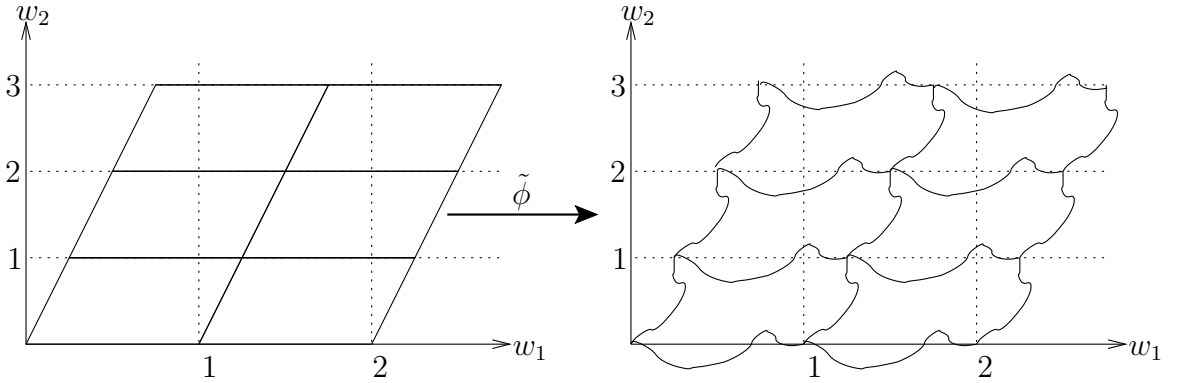


FIG. 4.4 – Relèvement  $\tilde{\phi}$  d'un difféomorphisme du tore  $\phi$ , avec  $\tilde{\phi}(0) = 0$ .

**Lemme 4.3.**

$$\delta(P) = \delta(\tilde{\psi}(P)). \quad (4.34)$$

**Démonstration.** La démonstration utilisera la propriété  $\tilde{h} \circ \tau_\nu = \tau_\nu \circ \tilde{h}$ , où  $\tau_\nu$  est la translation par  $\nu = n_1 f_1 + n_2 f_2$  dans le plan,  $n \equiv (n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2$ . Comme  $\tilde{h}$  est le relèvement d'un difféomorphisme du tore, on se convainc

aisément de cette propriété grâce à la figure 4.4. On en déduit, pour tout ensemble  $S$  congruant à  $P$  selon des translations  $\tau_\nu$ ,  $\delta(\tau_\nu S) = \delta(S)$  :

$$\begin{aligned} \delta(\tau_\nu S) &= \iint_{\tau_\nu S} w \, dw^1 dw^2 - \iint_{\tilde{h}^{-1}\tau_\nu S} w \tilde{\rho}(w) \, dw^1 dw^2 \\ &= \iint_S (w + \nu) \, dw^1 dw^2 - \iint_{\tilde{h}^{-1}S} (w + \nu) \tilde{\rho}(w) \, dw^1 dw^2 \quad (4.35) \\ &= \iint_S w \, dw^1 dw^2 - \iint_{\tilde{h}^{-1}S} w \tilde{\rho}(w) \, dw^1 dw^2 = \delta(S), \end{aligned}$$

où la compensation des deux termes avec  $\nu$  dans (4.35) est due à

- (i)  $\tilde{h}^{-1}S$  est congruant à  $S$  modulo translations suivant  $e_1$  et  $e_2$  (voir Figure 4.4),
- (ii)  $\tilde{\rho}(w)$  est périodique suivant ces translations et
- (iii)  $\iint_P \tilde{\rho}(w) \, dw^1 dw^2 = 1$ .

Définissons maintenant  $P_\nu = \tau_\nu P$ . Nous avons

$$\tilde{\psi}P = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}^2} \tilde{\psi}(P) \cap P_\nu. \quad (4.36)$$

Comme l'union est disjointe, nous obtenons

$$\delta(\tilde{\psi}P) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} \delta(\tilde{\psi}P \cap P_\nu) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} \delta\left((\tau_{-\nu}\tilde{\psi}P) \cap P\right) = \delta(P).$$

Nous avons utilisé  $\delta(\tau_\nu S) = \delta(S)$  lors de la seconde étape, et le fait que  $P$  est l'union disjointe des ensemble  $(\tau_\nu\tilde{\psi}P) \cap P$  lors de la dernière.  $\square$

Finalement, réécrivons (4.34) comme

$$[P] - [\tilde{\psi}P] = [\tilde{h}^{-1}P]_{\tilde{\rho}} - [\tilde{h}^{-1}\tilde{\psi}P]_{\tilde{\rho}}$$

et vérifions que le membre de droite est nul, afin de montrer (4.32). Grâce à  $\tilde{h}^{-1} \circ \tilde{\psi} = \tilde{\varphi} \circ \tilde{h}^{-1}$ , le membre de droite devient

$$[\tilde{h}^{-1}P]_{\tilde{\rho}} - [\tilde{\varphi}\tilde{h}^{-1}P]_{\tilde{\rho}}. \quad (4.37)$$

Observons que les ensembles  $\tilde{h}^{-1}P$  et  $P$  sont congruents modulo  $\tau_\nu$  dès lors que  $\tilde{h}$  est le lift du difféomorphisme du tore  $h$ , voir Figures 4.3 et 4.4. Acceptant le lemme ci-dessous, (4.37) ne change pas si nous remplaçons  $\tilde{h}^{-1}P$  par un ensemble congruent  $P$ ; (4.37) devient

$$[P]_{\tilde{\rho}} - [\tilde{\varphi}P]_{\tilde{\rho}} = 0,$$

où la dernière égalité provient de la préservation du centre de masse (4.25) et de

$$\begin{aligned}
[P]_{\tilde{\rho}} - [\tilde{\varphi}P]_{\tilde{\rho}} &= \iint_P \tilde{\rho}(w) dw^1 dw^2 - \iint_{\tilde{\varphi}(P)} \tilde{\rho}(w) dw^1 dw^2 \\
&= \iint_P b\rho(w^1, w^2) dw^1 dw^2 - \iint_{\tilde{\varphi}(P)} b\rho(w^1, w^2) dw^1 dw^2 \\
&= \iint_Q \rho(z) d\lambda - \iint_{\varphi(Q)} \rho(z) d\lambda.
\end{aligned}$$

(4.32) est démontré, si ce n'est qu'il nous reste à prouver le lemme suivant :

**Lemme 4.4.** *Si un ensemble mesurable  $S \subset \mathbb{R}^2$  est congruent au parallélogramme fondamental  $P$  modulo  $\tau_\nu$ ,  $\nu = n_1 f_1 + n_2 f_2$  avec  $n \equiv (n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2$ , alors pour un relèvement  $\tilde{\phi}$  quelconque d'un difféomorphisme du tore  $\phi$ , nous avons*

$$[S]_{\tilde{\rho}} - [\tilde{\phi}S]_{\tilde{\rho}} = [P]_{\tilde{\rho}} - [\tilde{\phi}P]_{\tilde{\rho}}. \quad (4.38)$$

**Démonstration.** Pour  $n \in \mathbb{Z}^2$ , définissons  $S_\nu = S \cap P_\nu$ , et observons que  $S = \bigcup S_\nu$  (car  $P$  est le domaine fondamental) et que cette union est disjointe. En nous rappelant que  $\tau^{-\nu}w = w - \nu$ , nous obtenons

$$[S]_{\tilde{\rho}} = \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} [S_\nu]_{\tilde{\rho}} = \left[ \bigcup_{n \in \mathbb{Z}^2} \tau_{-\nu} S_\nu \right]_{\tilde{\rho}} + \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} \nu \iint_{\tau_{-\nu} S_\nu} \tilde{\rho} dw^1 dw^2 \quad (4.39)$$

De même, nous avons

$$[\tilde{\phi}S]_{\tilde{\rho}} = \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} [\tilde{\phi}S_\nu]_{\tilde{\rho}} = \left[ \bigcup_{n \in \mathbb{Z}^2} \tau_{-\nu} \tilde{\phi} S_\nu \right]_{\tilde{\rho}} + \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} \nu \iint_{\tau_{-\nu} \tilde{\phi} S_\nu} \tilde{\rho} dw^1 dw^2 \quad (4.40)$$

En substituant  $\bigcup \tau_{-\nu} S_\nu = P$  et  $\bigcup \tau_{-\nu} \tilde{\phi}(S_\nu) = \tilde{\phi}(\bigcup \tau_{-\nu} S_\nu) = \tilde{\phi}(P)$  dans (4.39) et (4.40), ces équations deviennent

$$[P]_{\tilde{\rho}} + \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} \nu \iint_{\tau_{-\nu} S_\nu} \tilde{\rho} dw^1 dw^2 \quad (4.41)$$

$$[\tilde{\phi}(P)]_{\tilde{\rho}} + \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} \nu \iint_{\tau_{-\nu} \tilde{\phi} S_\nu} \tilde{\rho} dw^1 dw^2. \quad (4.42)$$

Observons également que les derniers termes de (4.42) et (4.41) coïncident car  $\tau_\nu \circ \tilde{\phi} = \tilde{\phi} \circ \tau_\nu$  (voir le lemme 4.3) et car  $\tilde{\phi}$  préserve la mesure  $\tilde{\rho} dw^1 dw^2$ . Soustrayant (4.42) à (4.41), nous obtenons (4.38) et le lemme est démontré.  $\square$

# Annexe A

## Cas d'une infinité d'orbites périodiques

Dans [9], Patrice Le Calvez a prouvé par des méthodes très différentes, qui sont purement topologiques et ne s'appliquent qu'en dimension 2 :

**Théorème A.1.** (Le Calvez) *Tout difféomorphisme Hamiltonien de  $(\mathbb{T}^2, \omega)$  a une infinité de points fixes.*

Remplaçant le Théorème de Conley-Zehender par ce théorème-ci, et répétant l'argument d'Arnold et Levi ci-dessus, nous trouvons :

**Corollaire A.1.** *Toute particule chargée sur un tore, soumise à un champ magnétique perpendiculaire à celui-ci, possède une infinité d'orbites périodiques si le potentiel vecteur  $\tilde{A}(z)$  et le facteur conforme  $\lambda(z)$  satisfont à*

$$\frac{\left| \frac{\partial \tilde{A}^2}{\partial z^1}(z) - \frac{\partial \tilde{A}^1}{\partial z^2}(z) \right|}{|\text{grad } \lambda(z)|} > \sqrt{2}. \quad (\text{A.1})$$

# Remerciements

Je remercie mon promoteur, Felix Schlenk, pour tout le temps qu'il m'a consacré et pour l'aide précieuse qu'il m'a apportée durant l'élaboration de ce mémoire. En particulier, je le remercie pour avoir corrigé ma grammaire française assez limitée.

Je remercie aussi tous ceux qui m'ont soutenu tout au long de cette année pour la réalisation de ce travail.



# Bibliographie

- [1] V. Arnold. On some problems in symplectic topology. *Topology and geometry, Rohlin Seminar*, 1-5. Lect. Notes Math., **1346**. Springer-Verlag, Berlin (1988).
- [2] M. do Carmo. *Riemannian geometry*. Mathematics : Theory and Applications. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1992.
- [3] C. Conley and E. Zehnder. The Birkhoff-Lewis fixed point theorem and a conjecture of V. I. Arnold. *Invent. Math.* **73** (1983), no. 1, 33–49.
- [4] P. Gaspard. *Compléments de mécanique analytique*. Notes de cours. Université Libre de Bruxelles.
- [5] V. Ginzburg. On closed trajectories of a charge in a magnetic field. An application of symplectic geometry. *Contact and symplectic geometry (Cambridge, 1994)*, 131-148. Publications of the Newton institute, 8. Cambridge University, Cambridge, 1996.
- [6] A. Hatcher. Algebraic topology. *Cambridge University Press*, Cambridge, 2002.
- [7] H. Hofer and E. Zehnder. *Symplectic Invariants and Hamiltonian Dynamics*. Birkhäuser 1994.
- [8] P. Godin, J-P. Gossez et L. Lemaire. *Calcul Différentiel et Intégral II*. Notes de cours. Université Libre de Bruxelles.
- [9] P. Le Calvez. Dynamique des homéomorphismes du plan au voisinage d'un point fixe. *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.* 4<sup>e</sup> série, **36**, 2003, 139-171.
- [10] M. Levi. On a problem by Arnold on periodic motions in magnetic fields. Dedicated to the memory of Jürgen K. Moser. *Comm. Pure Appl. Math.* **56** (2003), 1165–1177.
- [11] D. McDuff and D. Salamon. *Introduction to symplectic topology. Second edition. Oxford Mathematical Monographs*. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1998.
- [12] D. McDuff and D. Salamon. *J-holomorphic curves and symplectic topology*. American Mathematical Society Colloquium Publications, **52**. American Mathematical Society, Providence, RI, 2004.

- [13] J. Milnor. *Morse theory*. Annals of Mathematics Studies, No.51 Princeton University Press, Princeton, N.J. 1963
- [14] C. de Mol. *Physique Mathématique*. Notes de cours. Université Libre de Bruxelles.
- [15] E. Spanier. Tautness for Alexander-Spanier cohomology. *Pacific J. Math.* **75** (1978), no. 2, 561–563.