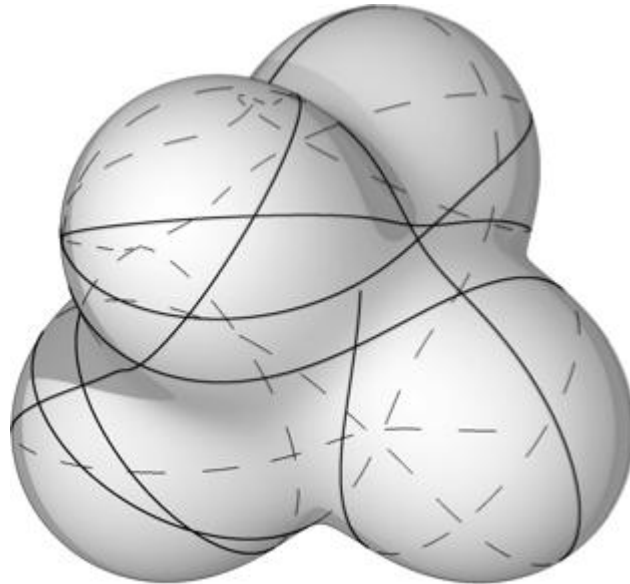


UNIVERSITE LIBRE DE BRUXELLES
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques



Une infinité de géodésiques joignent deux points d'une variété compacte simplement connexe

Sur la Théorie de Morse et un Théorème de Gromov

Mémoire présenté par Jean Lourtie en vue
de l'obtention du grade de licencié en sciences mathématiques

Promoteur : Félix Schlenk

Année académique 2006-2007

Introduction

Dans ce mémoire nous abordons l'étude de la Théorie de Morse ainsi que la démonstration d'un théorème de Gromov. Ce théorème appliqué à la Théorie de Morse nous fait découvrir un fait intéressant : sur une variété riemannienne M compacte sans bord on trouve, donné deux points générique $p, q \in M$, une infinité de géodésiques de p à q . Plus précisément : Soit $\Omega(M, p, q)$ l'espace des chemins lisses de p à q , et soit $\#(L; p, q)$ le nombre de géodésiques de p à q de longueur $\leq L$. Si la suite des sommes

$$\sum_{j=0}^k \dim H_j(\Omega(M, p, q))$$

croît de manière exponentielle, c'est-à-dire : Il existe des constantes $a, c_1 > 0$ telles que

$$\sum_{j=0}^k \dim H_j(\Omega(M, p, q)) \geq a e^{c_1 k}, \quad (1)$$

alors il existe des constantes $b, c_2 > 0$ telles que

$$\#(L; p, q) \geq b e^{c_2 L}. \quad (2)$$

L'idée de Gromov est de montrer que (1) implique

$$\sum_{j=0}^{\infty} \dim H_j(\Omega^L(M, p, q)) \geq b e^{c_1 k}, \quad (3)$$

où $\Omega^L(M, p, q)$ est le sous-ensemble des chemins de $\Omega(M, p, q)$ de longueur $\leq L$. L'estimation (3) et la théorie de Morse impliqueront (5.2).

Nous présentons dans le premier chapitre quelques éléments de géométrie différentielle, donnant un aperçu rapide des résultats importants à maîtriser pour aborder la suite des sujets développés dans ces pages. Nous abordons également, et ce de façon très brève, quelques idées et quelques définitions traitant d'homotopie et d'homologie.

C'est dans le deuxième chapitre qu'est réellement présentée l'idée maîtresse de la Théorie de Morse. La première section expose les notions indispensables à une approche efficace de cette théorie. La Théorie de Morse, présentée dans la deuxième section, s'intéresse aux variétés lisses et à leurs décompositions en cellules. Voici en quelques mots le cheminement suivi. Pour certaines fonctions bien choisies, définies sur une variété et à valeurs dans les

réels, on rencontre des *points critiques*, qui sont des points où la fonction stagne quelle que soit la direction dans laquelle on se déplace sur la variété. C'est grâce à ces points que l'on peut décomposer la variété en plusieurs cellules. Un exemple simple qui permettra de comprendre ce concept est le suivant. Considérons la sphère et la fonction donnant la hauteur en un point de celle-ci. Un premier point critique est celui situé au point le plus bas de la sphère car en ce point, quand on lui attache un plan dit tangent, ce plan est à l'horizontal donnant une approximation de ce qu'est la sphère en ce point. La fonction hauteur est alors quasi-stagnante à la base de cette sphère. Un deuxième et dernier point critique est le sommet où l'on peut aussi poser un plan tangent. Nous voilà donc avec deux points critiques. On peut s'apercevoir qu'ils ne sont pas de même nature car, au bas de la sphère, quelles que soient les directions dans lesquelles on évolue, on monte tout doucement alors que quand on se trouve en haut, on ne peut faire que descendre. C'est en mettant le doigt sur cette distinction que l'on peut associer à chaque point critique, ce qu'on appelle une cellule. Les cellules sont, pour faire simple, des disques plein d'un rayon unitaire dans toutes les dimensions. En dimension zéro, la cellule est un point. En dimension un, c'est un segment de droite "flexible" de deux unités. La deuxième dimension la fait devenir un disque plein d'un rayon d'une unité. En dimension trois, c'est une boule, et ainsi de suite. On associera à chaque point critique une cellule d'une certaine dimension donnée par le nombre de directions suivant lesquelles on peut "descendre" sur la variété. Au bas de la sphère, on ne peut que monter, et ce dans les deux directions linéairement indépendantes. On associe dès lors à ce point une cellule de dimension zéro. Au sommet de la sphère, on descend dans les *deux* directions linéairement indépendantes, et à ce point sera associée une cellule de dimension *deux* ou, un disque "flexible". Le ballon de baudruche gonflé et noué représente bien ces deux cellules, le noeud étant la cellule de dimension zéro et le reste du ballon étant le disque flexible dont tout le bord a été collé sur le noeud. La Théorie de Morse décide de ne retenir que les cellules et la manière dont elles sont accrochées. En quelque sorte, on ne garde que le squelette de la variété et on estime disposer de suffisamment d'informations pour pouvoir traiter ces variétés, rien qu'en gardant leur squelette.

Après une introduction détaillée des points importants de la Théorie de Morse, le troisième chapitre nous aide à nous familiariser avec quelques outils qui nous seront indispensables dans le chapitre quatre. Il s'agit des notions de dérivées covariantes, qui sont des dérivées de champs de vecteurs sur une variété, dans la direction d'un champ de vecteurs donné. Ces dérivées covariantes nous montrent tout de suite que les formules de dérivations dépendent du type de variété sur laquelle on dérive, ou plus précisément de la métrique définie sur cette variété, qu'elle soit induite par l'espace de plongement ou non. Sont établis dans la première section du chapitre trois, les définitions de connexion sur une variété mais aussi de dérivée covariante d'un champ de vecteurs le long d'une courbe. Ces outils de calcul nous prépareront à traiter des courbes particulières : les géodésiques. On définit une géodésique comme étant une courbe sans accélération. Plus loin, avec les

outils qu'on se donne, tels que l'énergie d'un chemin ainsi qu'une fonctionnelle associée à cette énergie, on découvre qu'une géodésique est aussi, dans un espace restreint, le chemin le plus court d'un point à un autre, mais ceci fera l'objet du chapitre quatre. La troisième section du chapitre trois introduit le tenseur de courbure en terme de connexion et fait le lien avec le tenseur de courbure, aussi appelé tenseur de Riemann, présenté dans [2]. Encore une fois, nous serons informés, via le tenseur, que les dérivées covariantes tiennent compte de la courbure de la variété. On verra d'ailleurs que dans le cas d'un plan ou d'une hypersurface plane, donc dans un espace sans courbure tel que \mathbb{R}^n , les formules de dérivations reprennent leur forme classique.

Dans le chapitre quatre, alors qu'on s'intéresse aux géodésiques, on y définit parallèlement l'espace des chemins sur une variété. Les géodésiques sont des éléments de cet espace. Lorsqu'on aura compris qu'en fait, les géodésiques sont des points critiques de cet espace des chemins, on présente alors la notion de champ de Jacobi. Un champ de Jacobi est un cas particulier de variation autour d'une géodésique donnée, qui permet de passer d'une géodésique à une autre. Ce concept de champ de Jacobi est utile car il introduit à la notion de points conjugués le long d'une géodésique. Notre but étant de pouvoir ramener l'espace des chemins à sa décomposition en cellules, il est indispensable de savoir comment vont s'agencer les cellules de cet espace des chemins et de quelle dimension elles seront. Les points conjugués jouent un rôle déterminant dans cette discussion : c'est leur nombre qui déterminera la dimension de la cellule de la décomposition cellulaire, la géodésique étant le point critique de la fonction énergie définie sur l'espace des chemins. Le Théorème de l'Indice, dû à Morse, synthétise cette idée en fin de chapitre.

L'espace des chemins est aussi une variété, plus coriace à traiter car de dimension infinie. L'idée fructueuse présentée dans [5] et reprise dans le chapitre cinq consiste à faire une approximation de cet espace où l'on a limité la longueur de ces chemins. On obtient alors un nouvel espace de dimension finie que l'on peut décomposer en cellules, grâce à la Théorie de Morse. Le Théorème Fondamental de la Théorie de Morse annonce, de manière similaire au théorème 4 du chapitre deux, la manière dont l'espace des chemins se décompose en cellules. C'est alors qu'est énoncé le Théorème de Gromov qui met en relation une variété compacte simplement connexe (c'est une variété en un seul tenant et sans trou) et la longueur des chemins qui parcourent l'entièreté de la variété. Dans la démonstration du Théorème de Gromov, tirée de [6], la décomposition en cellule joue un rôle important, car elle permet de faire glisser par homotopie n'importe quel chemin dans une cellule choisie, permettant d'obtenir une borne supérieure pour la longueur de ce chemin, et cette borne reste valable pour tous les chemins glissés dans une cellule de même dimension. On cherche à regrouper ces chemins dont la longueur est limitée pour en faire un cycle de chemins, c'est-à-dire un chemin continu de chemins où le dernier coïncide avec le premier. Ce regroupement de chemins pourrait servir de cycle représentant d'un des groupes d'homologie de l'espace des chemins. Un cycle représentant est un cycle de chemins dont tous les chemins sont homotopes aux autres chemins des autres cycles. Le

Théorème de Gromov stipule que n'importe quel cycle de chemins, peut être représenté par un seul cycle, dont les chemins qui le composent sont limités en longueur. De manière plus générale, il relie l'indice du groupe d'homologie et la longueur des chemins joignant deux points. Un exemple, la sphère, permet de visualiser quelques éléments de cette démonstration et enfin, on montre qu'il y a une infinité de géodésiques sur la variété du Théorème de Gromov.

Chapitre 1

Géométrie différentielle, homotopie et homologie

Dans ce chapitre, nous présentons succinctement les notions de base de la géométrie différentielle, incontournables pour la compréhension des chapitres suivants. Seront abordées également quelques notions intuitives d'homotopie et d'homologie.

1.1 Notions de géométrie différentielle

Avant d'introduire les concepts de base de la Théorie de Morse, établissons quelques éléments de géométrie différentielle. Dans la suite, pour désigner une variété différentiable de classe C^∞ nous utiliserons le mot lisse. Il en sera de même pour les applications. L'espace tangent d'une variété lisse M à un point p sera noté T_pM . Si $f : M \rightarrow N$ est une application lisse avec $f(p) = q$, alors l'application linéaire induite d'espaces tangents sera notée $df : T_pM \rightarrow T_qN$ ou $f_* : T_pM \rightarrow T_qN$.

Il est d'usage, lorsqu'on parle d'une variété lisse M de dimension n , de considérer un atlas lisse de cartes locales permettant de décrire la variété. Ceci consiste à définir une famille finie d'application lisse $\varphi_i : U_i \rightarrow V_i$ avec U_i un ouvert de M et $V_i \in \mathbb{R}^n$ telles que

- a) $\cup_{i \in I} U_i = M$,
- b) l'ensemble V_i est un ouvert de \mathbb{R}^n pour tout $i \in I$ et $\varphi_i : U_i \rightarrow V_i$ est une bijection,
- c) l'ensemble $\varphi_i(U_i \cup U_j)$ est un ouvert de \mathbb{R}^n pour tout $i, j \in I$,
- d) l'application $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j)$ est lisse pour tout $i, j \in I$.

Dans la suite, nous ne parlerons plus de cartes locales pour ne retenir que la variété et nous définirons alors un système de coordonnées locales (u^1, \dots, u^n) autour d'un point $p \in U_k$ sur celle-ci tel que $\varphi_k(u^1, \dots, u^n) = (x_1, \dots, x_n)$ pour un certain $k \in I$ et avec (x_1, \dots, x_n) des coordonnées dans \mathbb{R}^n .

Définition 1. Soient M et N deux variétés lisses. Soit $f : M \rightarrow N$ une application de classe C^k , $k \geq 1$.

- a) f est une immersion en p si et seulement si $df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ est injective.
- b) f est une immersion si et seulement si f est une immersion en tout point $p \in M$
- c) f est une submersion en p si et seulement si $df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ est surjective ($\dim M \geq \dim N$).
- d) f est une submersion si et seulement si f est une submersion en tout point $p \in M$
- e) f est un plongement si et seulement si f est une immersion injective et $f : M \rightarrow f(M)$ est un homéomorphisme.

Afin de fixer les idées, voici une manière simple de définir l'espace tangent d'une variété en un point.

Définition 2. Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, M une variété lisse avec $p \in M$. Soient $c : I \rightarrow M$ et $d : I \rightarrow M$ deux courbes sur M . Si $\vec{X}_p \in T_p M$ est un vecteur tangent à M en p tel que $\dot{c}(0) = \vec{X}_p$ et $\dot{d}(0) = \vec{X}_p$ alors c est équivalent en p à d et on désigne par $[c]$ cette classe d'équivalence.

Définissons à présent l'espace tangent à M en p :

$$T_p M = \{[c] \mid c : I \rightarrow M \text{ est lisse et } c(0) = p\}.$$

Les définitions qui suivent vont nous permettre d'aboutir aux notions d'opérateur différentiel ponctuel et global ainsi qu'à la notion de dérivée de Lie sur une variété lisse. Pour commencer, voici la définition d'un ensemble particulier de fonctions lisses et l'ensemble des dérivations ponctuelles qui lui est associé.

Définition 3. Soient U et V deux ouverts de la variété lisse M . Si $f \in C^\infty(U, \mathbb{R})$ et $g \in C^\infty(V, \mathbb{R})$ alors f est équivalente en p à g si et seulement si il existe un ouvert $W \subset U \cup V$, $p \in W$ tel que $f|_W = g|_W$ et on désigne par $[f]$ cette classe d'équivalence.

Définissons alors l'espace de germes de fonctions lisses :

$$\mathcal{F}_p M = \{[f] \in C^\infty(U, \mathbb{R}) \mid U \subset M, p \in U\}.$$

Définition 4. $d : \mathcal{F}_p M \rightarrow \mathbb{R}$ est une dérivation ponctuelle en p si et seulement si

- a) $d(\alpha f + \beta g) = \alpha d(f) + \beta d(g)$ pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
- b) $d(fg) = f(p)d(g) + g(p)d(f)$.

Désignons par \mathcal{D}_p l'espace des dérivations ponctuelles en p .

Nous construisons maintenant la notion de dérivation ponctuelle sur une variété M .

Définition 5. On appelle dérivation sur M en p l'application définie par

$$\delta : T_p M \rightarrow \mathcal{D}_p, \quad [c] \mapsto \delta_{[c]},$$

et

$$\delta_{[c]} : \mathcal{F}_p M \rightarrow \mathbb{R}, \quad f \mapsto \delta_{[c]}(f) = \frac{d}{dt} f(c(t))|_{t=0} = df_p([c]).$$

Remarque 1. Une définition plus exacte de $\delta_{[c]}(f)$ considérant les cartes locales peut être établie de la manière suivante. Si $\dim M = n$ et si (U, φ) est une carte locale de M avec $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $U \subset M$ un ouvert, alors

$$\begin{aligned} \delta_{[c]}(f) &= \frac{d}{dt} f(c(t))|_{t=0} = \frac{d}{dt} (f \circ \varphi^{-1})(\varphi(c(t)))|_{t=0} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i}(\varphi(p)) \cdot \frac{d}{dt} \varphi_i(c(t))|_{t=0} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p f \cdot v_i, \end{aligned}$$

où $v_i \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur tangent à la courbe $\varphi \circ c$.

On voit maintenant que $\delta : T_p M \rightarrow \mathcal{D}_p$ est un isomorphisme d'espace vectoriel et donc que $T_p M \cong \mathcal{D}_p$. En effet, avec un système de coordonnées locales (x_1, \dots, x_n) , on peut exprimer un vecteur \vec{v} de $T_p M$ dans sa base locale comme ceci :

$$\vec{v} = \sum v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p$$

et l'opérateur dérivée ponctuelle s'écrit :

$$\delta_{[c]} = \sum v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p.$$

Enfin, définissant les champs de vecteurs sur une variété et l'espace des dérivations globales sur cette variété, nous arrivons à la notion de dérivée de Lie.

Définition 6. Soit M une variété lisse. Un champ de vecteurs \vec{X} sur M est la donnée d'un vecteur tangent $\vec{X}_p \in T_p M$ pour tout $p \in U$ tel que pour toute carte locale (U, φ) :

$$\vec{X}_p = \sum_{i=1}^n v_i(p) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p,$$

avec $v_i \in C^\infty(U, \mathbb{R})$. On désigne par $X^\infty(M)$ l'espace des champs de vecteurs tangents lisses sur M .

Remarque 2. Si on note $df_p(\vec{X}_p)$ la dérivée directionnelle de f au point p dans la direction du vecteur \vec{X}_p alors

$$df_p(\vec{X}_p) = \vec{X}_p(f) = \delta_{[c]}(f).$$

Définition 7. On appelle dérivée globale sur M l'application définie par

$$\delta : C^\infty(M, \mathbb{R}) \longrightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$$

telle que

- a) $\delta(\alpha f + \beta g) = \alpha \delta(f) + \beta \delta(g)$ pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
- b) $\delta(fg) = f\delta(g) + g\delta(f)$
- c) $\delta(\alpha) = 0$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$

On désigne par $\mathcal{D}C^\infty(M)$ l'espace des dérivations globales sur M

Définition 8. On appelle dérivée de Lie dans la direction \vec{X} l'application

$$L : X^\infty(M) \rightarrow \mathcal{D}C^\infty(M), \vec{X} \mapsto L_{\vec{X}}$$

avec

$$L_{\vec{X}} : C^\infty(M, \mathbb{R}) \longrightarrow C^\infty(M, \mathbb{R}),$$

$$f \mapsto L_{\vec{X}}f = \vec{X}(f) = \delta(f) \text{ et } L_{\vec{X}}f(p) = \vec{X}_p(f) = \delta_{[c]}(f)$$

Comme précédemment, on voit maintenant que $L : X^\infty(M) \rightarrow \mathcal{D}C^\infty(M)$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels car à chaque champ de vecteur \vec{X} de $X^\infty(M)$ on peut associer la dérivation globale d'une fonction $f \in C^\infty(M)$.

Intuitivement, cette dernière notion de dérivée est une généralisation des opérateurs différentiels de \mathbb{R}^n . On peut, avec la dérivée de Lie, dériver des fonctions lisses définies sur des variétés dans les directions souhaitées tant que ces directions sont données par des champs de vecteurs lisses.

Après ces quelques considérations analytiques sur nos outils de géométrie, il est encore nécessaire de préciser certaines notions d'homotopie et d'homologie, comme annoncé plus haut.

1.2 Homotopie et homologie

L'idée maîtresse de l'homotopie est d'étudier les propriétés d'espaces topologiques X grâce aux groupes fondamentaux qui à chaque espace topologique associe un groupe.

Définition 9. Si X est un espace topologique, un chemin dans X est une application continue $c : [0, 1] \rightarrow X$. L'origine est $c(0)$ et l'extrémité est $c(1)$. Si $c(0) = c(1) = x$ alors le chemin est un lacet centré en x de X .

Définition 10. Deux chemins c et d dans X , de même origine x et extrémité y , sont homotopes s'il existe une application continue $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ telle que

$$\begin{aligned} H(t, 0) &= c(t), \\ H(t, 1) &= d(t), \\ H(0, s) &= x, \\ H(1, s) &= y. \end{aligned}$$

On dira que c est homotope à d , et on note $c \sim d$, si on peut passer de c à d par une "famille continue de chemins". C'est une relation d'équivalence.

Définition 11. Le premier groupe fondamental $\Pi_1(X, x)$ de X en x est l'ensemble de tous les lacets de X centrés en x quotienté par la relation d'équivalence "être homotope à". Les éléments de ce groupe sont des classes d'homotopies de lacets.

Définition 12. Soient $f, g : X \rightarrow Y$ deux applications continues d'espaces topologiques. On dit qu'elles sont homotopes s'il existe une application continue $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ telle que $H(x, 0) = f(x)$ et $H(x, 1) = g(x)$. On dit que f est une équivalence d'homotopie s'il existe une application continue $h : Y \rightarrow X$ telle que $f \circ h$ est homotope à id_Y et $h \circ f$ est homotope à id_X . Enfin, les espaces X et Y ont même type d'homotopie s'il existe une équivalence d'homotopie $f : X \rightarrow Y$.

Définition 13. Un espace X est simplement connexe si et seulement si il y a une unique classe d'homotopie de chemins joignant n'importe quelle paire de points de X .

Pour calculer le premier groupe fondamental d'un espace topologique, il existe plusieurs outils tels que les équivalences d'homotopies, les revêtements ou encore le Théorème de Van Kampen. Nous n'aborderons pas les détails de la construction de ces outils ni même leurs utilisations, nous nous contenterons de nous approprier les résultats qui nous seront utiles pour la suite. Un premier résultat pertinent est que $\Pi_1(S^n) = 0$ pour tout $n \geq 2$ et que $\Pi_1(S^1) \simeq \mathbb{Z}$.

Pour comprendre ce que cela signifie, il est intéressant de présenter la notion de cellule.

Définition 14. Soit

$$e^k = \{x \in \mathbb{R}^k : \|x\| \leq 1\} = B_k(0, 1)$$

une k -cellule qui consiste en tous les vecteurs de l'espace euclidien de longueur $l \leq 1$. Le bord de cette cellule

$$\dot{e}^k = \{x \in \mathbb{R}^k : \|x\| = 1\}$$

sera noté S^{k-1} .

Le cercle S^1 , est constitué d'une 1-cellule dont les extrémités sont identifiées. Si on s'intéresse à $\Pi_1(X)$, on va construire des 1-surfaces tracées sur l'espace topologique X . Ces 1-surfaces sont des lacets. Il y a plusieurs façons de construire un lacet en x dans S^1 . Notons 0 le fait de construire un lacet constant, c'est-à-dire un lacet qui reste en x , et par n un lacet qui, partant de x , fait n tours (dans le même sens) de S^1 avant de revenir en x . Si le lacet fait n tours dans l'autre sens, alors on le note $-n$. On voit alors que toutes les possibilités de lacets dans S^1 sont reprises dans \mathbb{Z} , d'où $\Pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$.

Il est possible de s'intéresser à des espaces topologiques constitués de plusieurs cellules, mais pour cela nous avons besoin de la définition suivante.

Définition 15. Soit Y un espace topologique. Si $g : S^{k-1} \rightarrow Y$ est une application continue, alors

$$Y \cup_g e^k$$

(Y avec une k -cellule attachée par g) est obtenue en prenant premièrement la somme topologique (union disjointe) de Y et e^k et en identifiant ensuite chaque $x \in S^{k-1}$ avec $g(x) \in Y$.

Lorsqu'on attache plusieurs cellules de cette manière, c'est-à-dire en collant les bords d'une cellule sur une autre cellule, quelles que soient leurs dimensions, on forme ce qu'on appelle un *CW-complexe*. Un CW-complexe est une généralisation d'un complexe simplicite qui lui, est formé de simplexes et non de cellules. Ce qui est intéressant avec les CW-complexes, c'est que pour n'importe quel espace X , il y a un CW-complexe Y qui lui est isomorphe. Enfin, lorsque l'on ne considère que les cellules jusqu'à une certaine dimension n , cellules formant un espace Y , on parle du n -squelette du CW-complexe Y .

En fait, si X est un CW-complexe, $\Pi_1(X)$ ne dépend seulement que du 2-squelette de X , et d'une manière plus générale, $\Pi_n(X)$ ne dépend que du $(n + 1)$ -squelette de X .

Les groupes fondamentaux d'indices supérieurs ont le désavantage d'être difficilement calculables. Par exemple, le calcul de $\Pi_i(S^n)$ pour $i > n$ pose beaucoup de problèmes. Un remède proposé est de s'intéresser au groupe d'homologie d'espaces topologiques. Comme pour $\Pi_n(X)$, le groupe d'homologie $H_n(X)$ pour un CW-complexe X dépend seulement du $(n + 1)$ -squelette de X . Pour les sphères, les groupes d'homologie $H_i(S^n)$ sont isomorphes aux groupes d'homotopies $\Pi_i(S^n)$ dans la mesure où $1 \leq i \leq n$, mais les groupes d'homologies ont l'avantage que $H_i(S^n) = 0$ pour $i > n$.

Définissons de manière très brève la construction du n -ième groupe d'homologie.

Définition 16. Soit X un CW-complexe. Désignons par $C_n(X)$ le groupe abélien ayant pour base les n -cellules de X .

Il existe entre ces groupes des homomorphismes $\partial_n : C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X)$ qu'on appelle des applications de bord. Ces applications envoient une n -cellule sur son bord qui est constitués généralement de $(n - 1)$ -cellules. On peut former avec ces groupes et ces applications ce qu'on appelle un complexe de chaîne

$$\dots \rightarrow C_{n+1} \rightarrow C_n \rightarrow C_{n-1} \rightarrow \dots$$

avec, entre chaque groupe, une application de bord.

Définition 17. Le n -ième groupe d'homologie est défini par

$$H_n(X) = \ker \partial_n / \text{Im} \partial_{n+1}.$$

Exemple. Dans cet exemple, le cercle S^1 est notre CW-complexe X , il est constitué d'une 1-cellule aux extrémités identifiées. Alors $C_2(S^1) = 0$, $C_1(S^1)$ est le groupe abélien qui a comme base la 1-cellule. Faire la somme de n fois cet élément de base (puisque c'est un groupe, il y a une loi de composition) revient à parcourir n fois le cercle dans un même sens. Prendre l'élément nul, c'est-à-dire prendre zéro fois l'élément de base revient à rester sur place sur le cerlce. Enfin, $C_0(S^1) = 0 = \{*\}$. L'application $\partial_2 : C_2 \rightarrow C_1$ envoie zéro sur zéro car c'est un homomorphisme et donc $\text{Im} \partial_2 = 0$. L'application $\partial_1 : C_1 \rightarrow C_0$ envoie tout sur zéro et donc son noyau est de groupe abélien ayant comme base la 1-cellule. On voit alors que

$$H_1(S^1) = \frac{\ker \partial_1}{\text{Im} \partial_2} = C_1(S^1)/0 = C_1(S^1),$$

ce qui signifie que le premier groupe d'homologie de S^1 est $C_1(S^1)$. L'élément de base est donc une 1-cellule aux extrémités identifiées dont on peut faire la somme. On voit alors que le groupe généré par cet élément est représenté par \mathbb{Z} puisqu'on peut rester sur place, faire n tours dans un sens ou n tours dans l'autre sens sur le cercle. Donc

$$H_1(S^1) = \Pi_1(S^1).$$

On prend pour élément de ce groupe non pas un lacet en un point fixe de S^1 mais une classe d'équivalence $[\alpha]$ de lacets homotopes avec $\alpha : [0, 1] \rightarrow S^1$.

D'une manière générale, on sait que

$$\Pi_i(S^n) = H_i(S^n), \quad \text{si } 1 \leq i < n,$$

$$\Pi_i(S^n) = H_i(S^n) = \mathbb{Z}, \quad \text{si } i = n,$$

et

$$H_i(S^n) = 0, \quad \text{si } i > n.$$

Chapitre 2

Théorie de Morse

Nous procédons, dans ce chapitre, à la définition de plusieurs concepts de base de la Théorie de Morse, à savoir les notions de points critiques, valeurs critiques ou encore fonctionnelle bilinéaire d'une fonction de Morse. Ensuite nous abordons l'idée centrale de la Théorie de Morse basée sur la décomposition des variétés en cellules, grâce à leurs multiples points critiques.

2.1 Définitions

Définition 18. Soit f une fonction lisse à valeurs réelles sur une variété M . Un point $p \in M$ est appelé point critique de f si l'application induite $df : T_p M \rightarrow T_{f(p)} \mathbb{R}$ est identiquement nulle, donc si f n'est pas une submersion en p . Le nombre réel $f(p)$ est appelé valeur critique de f .

Si on choisit un système de coordonnées locales (x^1, \dots, x^n) dans un voisinage U de p cela signifie que

$$\frac{\partial f}{\partial x^1} = \dots = \frac{\partial f}{\partial x^n} = 0.$$

Soit $M^a = \{x \in M \mid f(x) \leq a\} = f^{-1}(]-\infty, a])$.

Théorème 1. Si a n'est pas une valeur critique de f alors M^a est une variété lisse avec frontière. La frontière $f^{-1}(a)$ est une sous-variété lisse de M si pour tout $p \in f^{-1}(a)$, f est une submersion en p .

Définition 19. Un point critique est appelé non-dégénéré si et seulement si la matrice

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} (p) \right)$$

est non-singulière.

Définition 20. Une fonction de Morse définie sur une variété est une fonction différentiable au moins de classe C^2 , dont les points critiques sont non-dégénérés.

Définition 21. Si p est un point critique de f on peut définir une fonctionnelle bilinéaire symétrique $f_{**} : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$, appelée le Hessian de f en p . Si $\vec{v}, \vec{w} \in T_p M$ alors on peut les étendre en des champs de vecteurs $\vec{V}, \vec{W} \in X^\infty(M)$ et la fonctionnelle est donnée par

$$f_{**}(\vec{v}, \vec{w}) = \vec{V}_p(\vec{W}(f))$$

où $\vec{V}_p = \vec{v}$ et $\vec{W}(f)$ est la dérivée directionnelle de f dans la direction \vec{W} .

Cette fonctionnelle est symétrique car

$$\vec{V}_p(\vec{W}(f)) - \vec{W}_p(\vec{V}(f)) = [\vec{V}, \vec{W}]_p(f) = 0$$

où $[\vec{V}, \vec{W}]$ est le crochet de Lie de \vec{V} et \vec{W} , et où $[\vec{V}, \vec{W}]_p(f) = 0$ puisque f a p comme point critique.

Si (x_1, \dots, x_n) est un système de coordonnées local avec $\vec{v} = \sum v_i \frac{\partial}{\partial x_i}|_p$ et $\vec{w} = \sum w_j \frac{\partial}{\partial x_j}|_p$, on peut prendre comme extension $\vec{W} = \sum w_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ où w_j est une fonction constante. Alors

$$f_{**}(\vec{v}, \vec{w}) = \vec{V}_p(\vec{W}(f)) = \vec{v} \left(\sum w_j \frac{\partial(f)}{\partial x_j} \right) = \sum_{i,j} v_i w_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p),$$

et la matrice $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p) \right)$ représente la fonctionnelle f_{**} par rapport à la base $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}|_p \right)$.

On peut maintenant parler d'indice et de nullité de la fonctionnelle f_{**} .

Définition 22. L'indice d'une fonctionnelle bilinéaire H , sur un espace vectoriel V , est défini comme étant la dimension maximale d'un sous-espace de V sur lequel H est définie négative; la nullité est la dimension de l'espace des zéros de H , à savoir, le sous-espace des $v \in V$ tel que $H(v, w) = 0$ pour tout $w \in V$.

Le point p est un point critique non-dégénéré si et seulement si la nullité de f_{**} sur $T_p M$ vaut zéro. Quand on parlera de l'indice de f en p , on parlera en fait de l'indice de f_{**} sur $T_p M$. Le Lemme de Morse montre que le comportement de f en p peut être complètement décrit par cet indice. Avant d'établir ce lemme, prouvons d'abord le lemme suivant.

Lemme 1. Soit f une fonction lisse dans un voisinage convexe $V \subset \mathbb{R}^n$, $0 \in V$, avec $f(0) = 0$. Alors

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum x_i g_i(x_1, \dots, x_n)$$

pour certaines fonctions lisses g définies dans V , avec $g_i(0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(0)$.

Démonstration.

$$f(x_1, \dots, x_n) = \int_0^1 \frac{df(tx_1, \dots, tx_n)}{dt} dt = \int_0^1 \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx_1, \dots, tx_n) \cdot x_i dt.$$

D'où, on pose

$$g_i(x_1, \dots, x_n) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx_1, \dots, tx_n) \cdot dt.$$

■

Lemme 2 (Lemme de Morse). Soit p un point critique non-dégénéré de f . Alors il existe un système de coordonnées local (y^1, \dots, y^n) dans un voisinage U de p avec $y^i(p) = 0$ pour tout i et tel que l'identité

$$f(y^1, \dots, y^n) = f(p) - (y^1)^2 - \dots - (y^\lambda)^2 + (y^{\lambda+1})^2 + \dots + (y^n)^2$$

soit vraie sur U avec λ l'indice de f en p .

Démonstration. Montrons d'abord que s'il existe une telle expression pour f , alors λ doit être l'indice de f en p . Pour n'importe quel système de coordonnées (z^1, \dots, z^n) , si

$$f(q) = f(p) - (z^1(q))^2 - \dots - (z^\lambda(q))^2 + (z^{\lambda+1}(q))^2 + \dots + (z^n(q))^2$$

nous avons

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial z^i \partial z^j}(p) &= -2 & \text{si } i = j \leq \lambda &, \\ &= 2 & \text{si } i = j > \lambda &, \\ &= 0 & \text{sinon} &, \end{aligned}$$

qui montre que la matrice qui représente f_{**} par rapport à la base $(\frac{\partial}{\partial x_1}|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}|_p)$ est

$$\begin{pmatrix} -2 & & & & & & & & & & \\ & \cdot & & & & & & & & & \\ & & \cdot & & & & & & & & \\ & & & \cdot & & & & & & & \\ & & & & -2 & & & & & & \\ & & & & & 2 & & & & & \\ & & & & & & \cdot & & & & \\ & & & & & & & \cdot & & & \\ & & & & & & & & \cdot & & \\ & & & & & & & & & \cdot & \\ & & & & & & & & & & 2 \end{pmatrix}$$

Il y a donc bien un sous-espace de $T_p M$ de dimension λ où f_{**} est définie négative, et un sous-espace V de dimension $n - \lambda$ où f_{**} est définie positive. S'il y avait un sous-espace de $T_p M$ de dimension plus grande que λ sur lequel f_{**} était définie négative alors ce sous-espace aurait une intersection avec V , ce qui est impossible. Donc λ est l'indice de f_{**} .

Nous allons montrer maintenant qu'un tel système de coordonnées (y^1, \dots, y^n) existe. Il est toujours possible de changer de système de coordonnées de façon à obtenir $y^{-1}(0) = p$ et on peut dès lors supposer que p est l'origine de \mathbb{R}^n et que $f(p) = f(0) (= f \circ y^{-1}(0))$. Par le lemme 1 on peut écrire

$$f(x_1, \dots, x_n) = f(0) + \sum_j x_j g_j(x_1, \dots, x_n)$$

pour (x_1, \dots, x_n) dans un voisinage de 0. Puisque 0 est supposé être un point critique :

$$g_j(0) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(0) = 0.$$

Donc, en appliquant le lemme 1 aux g_j on obtient

$$g_j(x_1, \dots, x_n) = \sum_i x_i \tilde{h}_{ij}(x_1, \dots, x_n)$$

pour une certaine fonction lisse h_{ij} . Dès lors

$$f(x_1, \dots, x_n) = f(0) + \sum_{i,j} x_i x_j h_{ij}(x_1, \dots, x_n).$$

On peut supposer que $h_{ij} = h_{ji}$ puisque qu'on peut écrire $2\tilde{h}_{ij} = (h_{ij} + h_{ji})$, et dans ce cas on a $\tilde{h}_{ij} = \tilde{h}_{ji}$ et $f = f(0) + \sum x_i x_j \tilde{h}_{ij}$. De plus, la matrice $\tilde{h}_{ij}(0)$ est égale à

$$\left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} (0) \right)$$

et est donc non-singulière.

Montrons qu'il est possible d'écrire f dans un nouveau système de coordonnées (y^1, \dots, y^n) tel que

$$f(y^1, \dots, y^n) = f(0) \pm (y^1)^2 + \sum_{i,j=2}^n y^i y^j H_{ij}(y^1, \dots, y^n)$$

avec $H_{ij}(y^1, \dots, y^n)$ symétrique et non-singulière en 0. Moyennant une transformation linéaire sur les colonnes de (h_{ij}) , on peut supposer que $\tilde{h}_{11} \neq 0$. Définissons

$$g(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{\sqrt{|\tilde{h}_{11}(x_1, \dots, x_n)|}}$$

et le changement de coordonnées

$$y(x_1, \dots, x_n) = \left(x_1 g(x_1, \dots, x_n) - \sum_{j=2}^n x_j \frac{\tilde{h}_{j1}(x_1, \dots, x_n)}{\tilde{h}_{11}(x_1, \dots, x_n)}, x_2, \dots, x_n \right) = (y^1, \dots, y^n).$$

On peut alors écrire

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n) &= f(0) + (x_1 g - \sum_{j=2}^n x_j \frac{\tilde{h}_{j1}}{\tilde{h}_{11}})^2 h_{11} + 2 \sum_{i=2}^n (x_1 g - \sum_{j=2}^n x_j \frac{\tilde{h}_{j1}}{\tilde{h}_{11}}) x_i h_{1i} + \sum_{i,j=2}^n x_i x_j h_{ij} \\ &= f(0) + x_1^2 g^2 h_{11} - 2x_1 g \sum_{j=2}^n x_j \frac{h_{j1}}{h_{11}} h_{11} + \sum_{i,j=2}^n x_i x_j \frac{h_{j1} h_{i1}}{h_{11}^2} h_{11} \\ &+ 2 \sum_{j=2}^n x_1 g x_j h_{1j} - 2 \sum_{i,j=2}^n x_i x_j \frac{h_{j1} h_{i1}}{h_{11}} + \sum_{i,j=2}^n x_i x_j h_{ij} \end{aligned}$$

et en simplifiant, on obtient

$$f(x_1, \dots, x_n) = f(0) \pm x_1^2 + \sum_{i,j=2}^n x_i x_j \left(h_{ij} - \frac{h_{i1} h_{j1}}{h_{11}} \right)$$

car $g^2 = \frac{1}{|h_{11}|}$. Il suffit alors de répéter ce processus pour les x_j suivants. ■

Corollaire 1. *Un point critique non-dégénéré est isolé.*

Définissons à présent la notion de groupes de difféomorphismes à un paramètre.

Définition 23. *Un groupe de difféomorphisme à un paramètre d'une variété M est une application lisse*

$$\varphi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$$

telle que

- a) pour chaque $t \in \mathbb{R}$, l'application $\varphi_t : M \rightarrow M$ définie par $\varphi_t(q) = \varphi(t, q)$ est un difféomorphisme de M sur elle-même.
- b) pour tout $t, s \in \mathbb{R}$ on a $\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s$. En particulier $\varphi_0 = id_M$.

Avec un groupe de difféomorphisme à un paramètre, on peut décrire un champ de vecteurs X sur une variété M de la manière suivante. Pour toute fonction lisse à valeurs réelles f ,

$$X_p(f) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\varphi_h(p)) - f(p)}{h}.$$

On dit que ce champ de vecteurs X génère le groupe φ .

Lemme 3. *Un champ de vecteurs lisse sur une variété M qui s'annule à l'extérieur d'un ensemble compact $K \subset M$ génère un unique groupe de difféomorphisme à 1 paramètre de M .*

Démonstration. Pour n'importe quelle courbe c tracée sur M , on définit le vecteur vitesse

$$\frac{dc}{dt} \in T_{c(t)}M$$

par

$$\frac{dc}{dt}(f) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c(t+h)) - f(c(t))}{h}.$$

Soit φ un groupe de difféomorphisme à 1 paramètre généré par le champ de vecteurs X . Alors pour chaque q dans M la courbe qui à t associe $\varphi_t(q)$ satisfait l'équation

$$\frac{d\varphi_t(q)}{dt} = X_{\varphi_t(q)},$$

avec comme condition initiale $\varphi_0(q) = q$. De par la définition précédente

$$\begin{aligned} X_{\varphi_t(q)}(f) &= \frac{d\varphi_t(q)}{dt}(f) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\varphi_{t+h}(q)) - f(\varphi_t(q))}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\varphi_h(p)) - f(p)}{h} \\ &= X_p(f), \end{aligned}$$

où $p = \varphi_t(q)$. Mais on sait que cette équation différentielle a localement une unique solution qui dépend des conditions initiales. Donc pour chaque point de M , il existe un voisinage U et un $\varepsilon > 0$ tels que

$$\frac{d\varphi_t(q)}{dt} = X_{\varphi_t(q)}, \quad \varphi_0(q) = q$$

a une unique solution pour $q \in U$, $|t| < \varepsilon$.

Comme l'ensemble K est compact, il existe un recouvrement fini par de tels voisinages U . Si on prend $\varepsilon_0 > 0$ comme le plus petit des ε associés à chacun des voisinages U , et que l'on pose $\varphi_t(q) = q$ pour $q \notin K$, cette équation différentielle a une unique solution $\varphi_t(q)$ pour tout $|t| < \varepsilon_0$ et tout $q \in M$. On sait également par un résultat du cours sur les équations différentielles ordinaires que cette solution est lisse comme fonction des deux variables q et t . De plus, si $|t|, |s|, |t + s| < \varepsilon_0$, $\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s$. Maintenant si $|t| \geq \varepsilon_0$, il suffit de considérer t comme un multiple de $\varepsilon_0/2$ plus un reste r tel que $r < \varepsilon_0/2$. On a alors

$$t = k(\varepsilon_0/2) + r$$

avec $k \geq 0$ et on pose

$$\varphi_t = \varphi_{\varepsilon_0/2} \circ \dots \circ \varphi_{\varepsilon_0/2} \circ \varphi_r$$

où la transformation $\varphi_{\varepsilon_0/2}$ est appliquée k fois. Si $k < 0$, on remplace $\varphi_{\varepsilon_0/2}$ par $\varphi_{-\varepsilon_0/2}$ que l'on applique $-k$ fois. D'où, la transformation φ_t est définie pour tout t . ■

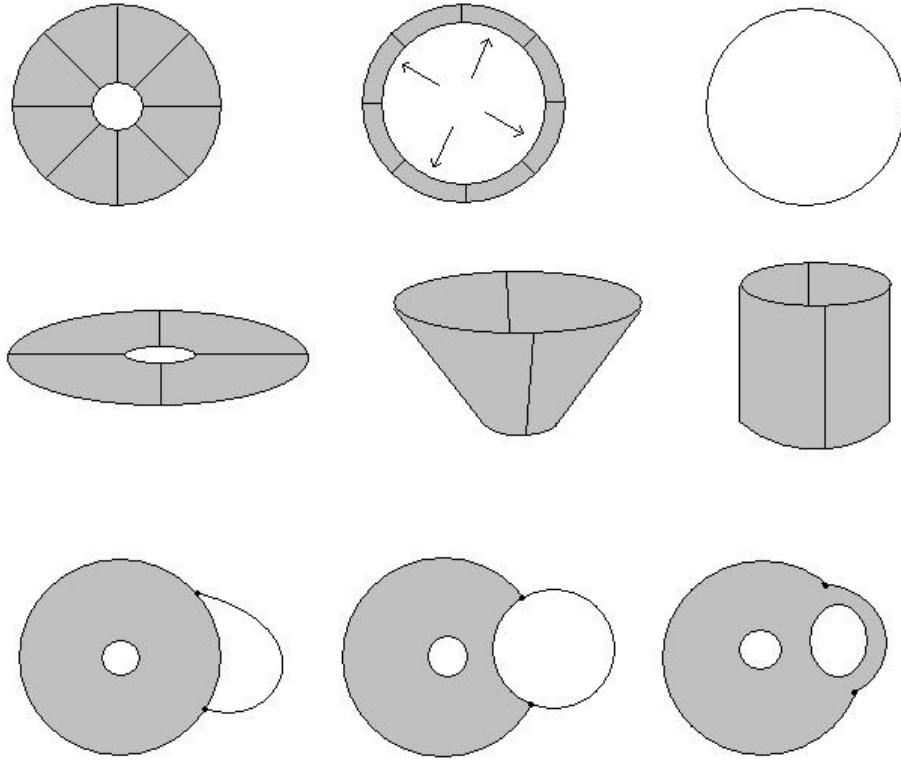
2.2 Type d'homotopie en terme de valeurs critiques

Dans cette section, on parle de type d'homotopie. On sait que quand on dit qu'un chemin est homotope à un autre, cela signifie que le chemin initial est continuellement déformable en l'autre chemin. On entend par continuellement déformable le fait de ne devoir briser, casser, ni couper le chemin en aucun moment de sa déformation du chemin initial au chemin final.

Sur nos variétés, on garde la même idée d'homotopie, c'est-à-dire que deux variétés seront du même type d'homotopie si on passe de l'une à l'autre par simple déformation, sans déchirure. Par exemple, un CD est du même type d'homotopie qu'un cercle ou un cylindre. En effet, à partir du CD, pour obtenir le cercle, il suffit de pousser les points du CD vers l'extérieur jusqu'à son bord et l'on obtient le cercle désiré. Pour obtenir le cylindre on peut par exemple relever le bord du CD et élargir le trou central, si celui-ci est déformable, il ne sera pas nécessaire de le déchirer ou de le trouser pour parvenir au cylindre.

Par contre, notre CD n'est pas du même type d'homotopie qu'un disque plein, car pour passer du CD au disque, on rebouche le trou central, et pour passer du disque au CD, on doit le trouser pour obtenir un CD. Enfin, on peut considérer qu'un CD auquel on aurait attaché une 1-cellule (= une courbe dont les deux extrémités peuvent être collées) soit sur le bord du trou central, soit sur le bord extérieur du CD, est du même type d'homotopie qu'un CD qui n'aurait pas un trou central mais deux trous.

Nous commençons par établir quelques résultats pour aboutir, en fin de section, au *Théorème de Morse* qui met en relation les types d'homotopie d'une variété et ses points critiques.

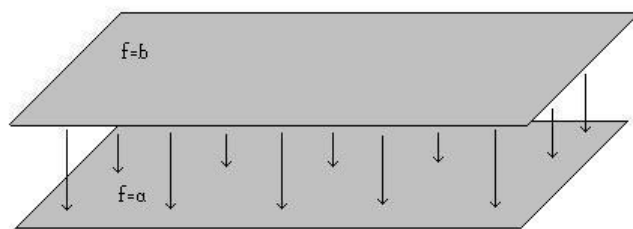


Comme précédemment, si f est une fonction sur M à valeurs réelles,

$$M^a = f^{-1}[-\infty, a] = \{p \in M : f(p) \leq a\}.$$

Théorème 2. Soit $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ et soient $a < b$ deux réels. Si $f^{-1}[a, b] = \{p \in M : a \leq f(p) \leq b\}$ est compact et ne contient aucun point critique de f , alors M^a est difféomorphe à M^b . De plus, on dit que M^a est une rétraction de M^b de telle manière que l'inclusion $M^a \hookrightarrow M^b$ soit une équivalence d'homotopie. Autrement dit, M^a est du même type d'homotopie que M^b .

L'idée de cette preuve est d'étirer M^a pour arriver à M^b et ce le long du champ de vecteur ∇f . Ce champ de vecteur, appelé gradient de f , est orthogonal aux hypersurfaces $f = \text{constante}$.



Démonstration. On choisit une métrique riemannienne sur M et on définit un produit scalaire $\langle X, Y \rangle$ entre deux vecteurs tangents. On définit le gradient de f comme le champ

de vecteur ∇f sur M qui satisfait l'identité

$$\langle X, \nabla f \rangle = X(f)$$

pour n'importe quel champ de vecteurs X . Si $c : \mathbb{R} \rightarrow M$ est une courbe sur M avec comme vecteur vitesse $\frac{dc}{dt}$, on a l'identité

$$\left\langle \frac{dc}{dt}, \nabla f \right\rangle = \frac{d(f \circ c)}{dt}.$$

Par définition d'un point critique de f , le champ de vecteurs ∇f s'annule précisément aux points critiques de f .

Introduisons à présent une fonction $\rho : M \rightarrow \mathbb{R}$, lisse et qui vaut $1/\langle \nabla f, \nabla f \rangle$ sur l'ensemble compact $f^{-1}[a, b]$ et qui est nulle en dehors d'un voisinage ouvert de cet ensemble $f^{-1}[a, b]$. Dès lors, si on définit le champ de vecteurs X par

$$X_q = \rho(q)(\nabla f)_q,$$

on voit qu'il satisfait les conditions du lemme 3 et qu'il génère alors un groupe de difféomorphismes à 1 paramètre

$$\varphi_t : M \rightarrow M.$$

Pour un $q \in M$ fixé, on considère la fonction $t \mapsto f(\varphi_t(q))$. Si $\varphi_t(q)$ se trouve dans l'ensemble $f^{-1}[a, b]$, alors

$$\frac{d}{dt}(f \circ \varphi_t(q)) = \left\langle \frac{d(\varphi_t(q))}{dt}, \nabla f \right\rangle = \langle X, \nabla f \rangle = \langle \rho \cdot \nabla f, \nabla f \rangle = 1.$$

Donc la correspondance

$$t \mapsto f(\varphi_t(q))$$

est linéaire avec dérivée +1 pour autant que $f(\varphi_t(q))$ soit entre a et b .

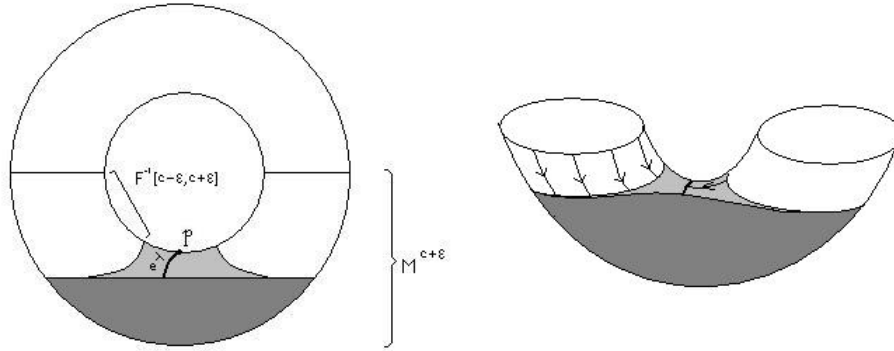
Considérons maintenant le difféomorphisme $\varphi_{b-a} : M \rightarrow M$. On voit que ce difféomorphisme mène M^a sur M^b .

Enfin si on définit la famille à un paramètre d'applications $r_t : M^b \rightarrow M^b$ par

$$\begin{aligned} r_t(q) &= q && \text{si } f(q) \leq a \\ &= \varphi_{t(a-f(q))}(q) && \text{si } a \leq f(q) \leq b. \end{aligned}$$

on voit que r_0 est l'identité et r_1 est la rétraction de M^b sur M^a . Donc M^a est une rétraction de M^b . ■

Théorème 3. *Soit $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction lisse, et soit p un point critique non-dégénéré d'indice λ . Si on pose $f(p) = c$, qu'on suppose que $f^{-1}[c-\varepsilon, c+\varepsilon]$ est compact et ne contient aucun point critique de f autre que p , pour un certain $\varepsilon > 0$, alors l'ensemble $M^{c+\varepsilon}$ a le type d'homotopie de $M^{c-\varepsilon}$ auquel on a attaché une λ -cellule.*



L'idée de preuve de ce théorème est représentée dans le dessin ci-dessous, pour le cas particulier de la fonction hauteur sur un tore. Nous allons introduire une nouvelle fonction $F : M \rightarrow \mathbb{R}$ qui coïncide avec la fonction hauteur f sauf dans un petit voisinage autour du point critique p où $F < f$. Cela signifie que pour une certaine valeur $a \in \mathbb{R}$ les courbes de niveau dessinées sur le tore par $f^{-1}(a)$ et $F^{-1}(a)$ coïncideront sauf à des endroits proches de p où les courbes $F^{-1}(a)$ seront un peu plus hautes que les courbes $f^{-1}(a)$. Si on veut, aux abords du point p , la partie de tore $F^{-1}] - \infty, t]$ englutira plus rapidement le tore que la partie $f^{-1}] - \infty, t]$, lorsque t augmente, pour créer à un certain moment une sorte de anse (en gris clair), qu'on notera H , autour de p .

Si $M^{c-\epsilon} = f^{-1}] - \infty, c - \epsilon]$, alors $F^{-1}] - \infty, c - \epsilon]$ est l'union de $M^{c-\epsilon}$ et de la anse en question.

Ensuite on pourra écraser la anse H sur une cellule $e^\lambda \subset H$ et montrer que $M^{c-\epsilon} \cup e^\lambda$ est une rétraction de $M^{c-\epsilon} \cup H$.

Enfin, nous verrons en appliquant le théorème 2 à la fonction F et à la région $F^{-1}[c - \epsilon, c + \epsilon]$, que $M^{c-\epsilon} \cup H$ est une rétraction de $M^{c+\epsilon}$.

Démonstration. Choisissons un système de coordonnées locales (u^1, \dots, u^n) dans un voisinage U de p tel que l'identité

$$f = c - (u^1)^2 - \dots - (u^\lambda)^2 + (u^{\lambda+1})^2 + \dots + (u^n)^2$$

soit vraie dans U . Le point critique a donc comme coordonnées

$$u^1(p) = \dots = u^n(p) = 0.$$

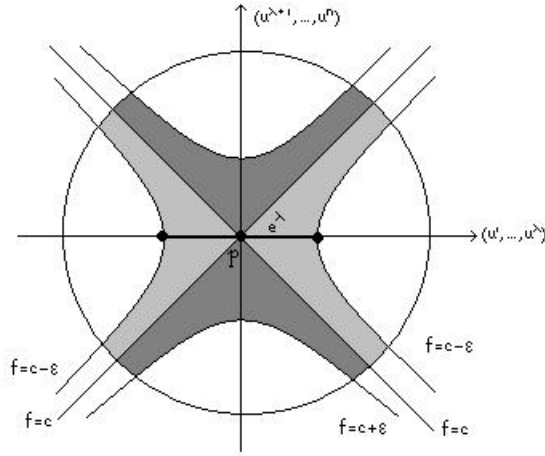
Choisissons $\epsilon > 0$ assez petit tel que

- la région $f^{-1}[c - \epsilon, c + \epsilon]$ soit compacte et ne contienne aucun point critique autre que p ,
- l'image de U dans une carte locale de \mathbb{R}^n par le difféomorphisme

$$(u^1, \dots, u^n) : U \rightarrow \mathbb{R}^n$$

contienne la boule fermée

$$B_n[u(p), 2\epsilon] = \left\{ (u^1, \dots, u^n) : \sum (u^i)^2 \leq 2\epsilon \right\}.$$



Définissons maintenant e^λ comme étant le lieu des points dans U tel que

$$(u^1)^2 + \dots + (u^\lambda)^2 \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad u^{\lambda+1} = \dots = u^n = 0.$$

Le dessin suivant schématise cette situation.

Les axes de coordonnées représentent respectivement les plans $u^{\lambda+1} = \dots = u^n$ et $u^1 = \dots = u^\lambda$. Le cercle est la frontière de la boule de rayon $\sqrt{2\varepsilon}$. Les hyperboles représentent les hypersurfaces $f^{-1}(c - \varepsilon)$ et $f^{-1}(c + \varepsilon)$. La ligne horizontale qui passe en p est la cellule e^λ .

On voit que $M^{c-\varepsilon} \cap e^\lambda$ est précisément le bord \dot{e}^λ et donc que e^λ est attachée à $M^{c-\varepsilon}$. On doit prouver que $M^{c-\varepsilon} \cup e^\lambda$ est une rétraction de $M^{c+\varepsilon}$.

Construisons la fonction $F : M \rightarrow \mathbb{R}$ de la manière suivante. Soit

$$\mu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

une fonction lisse qui satisfait les conditions

- a) $\mu(0) > \varepsilon$
- b) $\mu(r) = 0$ pour $r \geq 2\varepsilon$
- c) $-1 < \mu'(r) \leq 0$ pour tout r ,

où $\mu'(r) = \frac{d\mu}{dr}$. On décide que F coïncide avec f en dehors du voisinage U et

$$F = f - \mu((u^1)^2 + \dots + (u^\lambda)^2 + 2(u^{\lambda+1})^2 + \dots + 2(u^n)^2)$$

à l'intérieur de U . Si on définit les deux fonctions

$$\xi, \eta : U \rightarrow \mathbb{R}^+$$

par

$$\begin{aligned} \xi &= (u^1)^2 + \dots + (u^\lambda)^2 \\ \eta &= (u^{\lambda+1})^2 + \dots + (u^n)^2 \end{aligned}$$

alors $f = c - \xi + \eta$ et

$$F = c - \xi(q) + \eta(q) - \mu(\xi(q) + 2\eta(q))$$

pour tout $q \in U$.

Affirmation 1. La région $F^{-1}] - \infty, c + \varepsilon]$ coïncide avec la région $M^{c+\varepsilon} = f^{-1}] - \infty, c + \varepsilon]$.

Preuve. En dehors de l'ellipsoïde $\xi + 2\eta \leq 2\varepsilon$ les deux fonctions f et F coïncident. A l'intérieur nous avons

$$F \leq f = c - \xi + \eta \leq c + \frac{1}{2}\xi + \eta \leq c + \varepsilon.$$

Affirmation 2. Les points critiques de F sont les mêmes que ceux de f .

Preuve. Remarquons que

$$\frac{\partial F}{\partial \xi} = -1 - \mu'(\xi + 2\eta) < 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial \eta} = 1 - 2\mu'(\xi + 2\eta) \geq 1.$$

Dès lors

$$dF = \frac{\partial F}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial F}{\partial \eta} d\eta = 0$$

si et seulement si $d\eta = d\xi = 0$ et donc seulement si on est à l'origine. Il s'ensuit que F n'a aucun autre point critique que p .

Affirmation 3. La région $F^{-1}] - \infty, c - \varepsilon]$ est une rétraction de $M^{c+\varepsilon}$.

Preuve. Par l'Affirmation 1 et le fait que $F \leq f$ on voit que

$$F^{-1}[c - \varepsilon, c + \varepsilon] \subset f^{-1}[c - \varepsilon, c + \varepsilon].$$

Du coup, cette région est compacte. Elle ne peut donc contenir aucun autre point critique que p . Mais

$$F(p) = c - \mu(0) < c - \varepsilon.$$

Donc $F^{-1}[c - \varepsilon, c + \varepsilon]$ ne contient pas de point critique. Le théorème 2 permet de conclure.

On désignera par $M^{c-\varepsilon} \cup H$ la région $F^{-1}] - \infty, c - \varepsilon]$, où H est la fermeture de $F^{-1}] - \infty, c - \varepsilon] - M^{c-\varepsilon}$. On sait également que

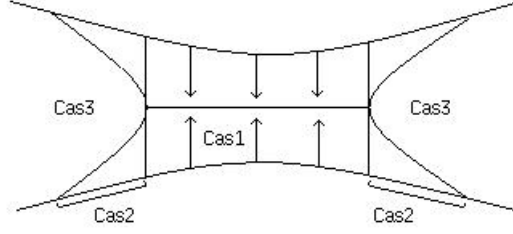
$$e^\lambda = \{q \in M : \xi(q) \leq \varepsilon \text{ et } \eta(q) = 0\}$$

et on voit que $e^\lambda \subset H$. En effet, puisque $\frac{\partial F}{\partial \xi} < 0$, on a $F(q) \leq F(p) < c - \varepsilon$ et $f(q) \geq c - \varepsilon$ pour tout $q \in e^\lambda$.

Affirmation 4. $M^{c-\varepsilon} \cup e^\lambda$ est une rétraction de $M^{c-\varepsilon} \cup H$.

Preuve. Nous allons distinguer trois cas afin de construire cette rétraction $r_t : M^{c-\varepsilon} \cup H \rightarrow M^{c-\varepsilon} \cup H$. Le dessin schématise cette situation.

En dehors de U , la rétraction est l'identité. Pour l'intérieur de U , voici les trois cas.



Cas 1. A l'intérieur de la région $\xi \leq \varepsilon$,

$$r_t(\xi, \eta) = (\xi, t\eta)$$

pour $0 \leq t \leq 1$ et donc r_1 est l'identité alors que r_0 envoie toute la région sur e^λ .

Cas 2. Dans la région $\varepsilon \leq \xi \leq \eta + \varepsilon$,

$$r_t(\xi, \eta) = (\xi, s_t\eta)$$

avec

$$s_t = t + (1 - t)((\xi - \varepsilon)/\eta)^{1/2}.$$

On a alors que r_1 est encore l'identité et r_0 envoie la région entière sur l'hypersurface $f^{-1}(c - \varepsilon)$.

Cas 3. Cette région est simplement $M^{c-\varepsilon}$ et r_t est l'identité pour tout t .

Donc $M^{c-\varepsilon} \cup e^\lambda$ est bien une rétraction de $M^{c-\varepsilon} \cup H$ et comme $F^{-1}] - \infty, c - \varepsilon]$ est une rétraction de $M^{c+\varepsilon}$, le théorème est démontré. ■

Remarque 3. Si on suppose qu'il existe k points critiques non-dégénérés dans $f^{-1}(c)$, d'indices $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, une démonstration similaire montre que $M^{c+\varepsilon}$ a le même type d'homotopie que $M^{c-\varepsilon} \cup e^{\lambda_1} \cup \dots \cup e^{\lambda_k}$.

Avant d'énoncer le théorème important de cette section, nous avons besoin de prouver deux résultats.

Lemme 4 (Whitehead). Soient $\varphi_0, \varphi_1 : \dot{e}^\lambda \rightarrow X$ deux applications homotopes, alors l'identité sur X s'étend à une équivalence d'homotopie $k : X \cup_{\varphi_0} e^\lambda \rightarrow X \cup_{\varphi_1} e^\lambda$. De plus, il existe un $l : X \cup_{\varphi_1} e^\lambda \rightarrow X \cup_{\varphi_0} e^\lambda$ tel que $k \circ l \simeq id$ et $l \circ k \simeq id$.

Démonstration. On définit k avec les formules suivantes :

$$\begin{aligned} k(x) &= x && \text{pour } x \in X, \\ k(tu) &= 2tu && \text{pour } 0 \leq t \leq 1/2, \quad u \in \dot{e}^\lambda, \\ k(tu) &= \varphi_{2-2t}(u) && \text{pour } 1/2 \leq t \leq 1, \quad u \in \dot{e}^\lambda. \end{aligned}$$

Ici, u est le vecteur unité de \dot{e}^λ et φ_t est l'homotopie entre φ_0 et φ_1 . Donc en fait, k nous fait passer d'une façon d'attacher la cellule e^λ sur X à une autre façon d'attacher e^λ sur X . Si cela se fait de manière continue, alors on dit que les deux espaces $X \cup_{\varphi_0} e^\lambda$

et $X \cup_{\varphi_1} e^\lambda$ sont de même type d'homotopie ou équivalents. L'application l fait le chemin inverse entre $X \cup_{\varphi_1} e^\lambda$ et $X \cup_{\varphi_0} e^\lambda$ et donc $k \circ l$ et $l \circ k$ sont homotopes respectivement à $id_{X \cup_{\varphi_0} e^\lambda}$ et à $id_{X \cup_{\varphi_1} e^\lambda}$. Donc k est bien une équivalence d'homotopie. ■

Lemme 5. Soit $\varphi : \dot{e}^\lambda \rightarrow X$ une application. Alors toute équivalence d'homotopie $f : X \rightarrow Y$ s'étend à une équivalence d'homotopie $F : X \cup_\varphi e^\lambda \rightarrow Y \cup_{f\varphi} e^\lambda$.

Démonstration. On définit

$$F|_X = f \text{ et } F|_{e^\lambda} = id.$$

Soit $g : Y \rightarrow X$ l'inverse d'homotopie de f et on définit

$$F|_X = f \text{ et } F|_{e^\lambda} = id$$

pour

$$G : Y \cup_{f\varphi} e^\lambda \rightarrow X \cup_{g\varphi} e^\lambda.$$

Par définition $g \circ f \simeq id$ implique que $g \circ f \circ \varphi \simeq \varphi$. Le Lemme de Whitehead implique qu'il existe une équivalence d'homotopie $k : X \cup_{g\varphi} e^\lambda \rightarrow X \cup_\varphi e^\lambda$. On aimerait que

$$k \circ G \circ F : X \cup_\varphi e^\lambda \rightarrow X \cup_\varphi e^\lambda$$

soit homotope à l'identité.

Soit h_t l'homotopie entre $g \circ f$ et l'identité, on a

$$\begin{aligned} k \circ G \circ F(x) &= g \circ f(x) && \text{pour } x \in X, \\ k \circ G \circ F(tu) &= 2tu && \text{pour } 0 \leq t \leq 1/2, \quad u \in \dot{e}^\lambda, \\ k \circ G \circ F(tu) &= h_{2-2t} \cdot \varphi(u) && \text{pour } 1/2 \leq t \leq 1, \quad u \in \dot{e}^\lambda. \end{aligned}$$

On prend comme homotopie

$$\phi_\tau : X \cup_\varphi e^\lambda \rightarrow X \cup_\varphi e^\lambda$$

que l'on définit par

$$\begin{aligned} \phi_\tau(x) &= h_\tau(x) && \text{pour } x \in X, \\ \phi_\tau(tu) &= \frac{2}{1+\tau}tu && \text{pour } 0 \leq t \leq \tau + 1/2, \quad u \in \dot{e}^\lambda, \\ \phi_\tau(tu) &= h_{2-2t+\tau}\varphi(u) && \text{pour } \tau + 1/2 \leq t \leq 1, \quad u \in \dot{e}^\lambda. \end{aligned}$$

Cela prouve que $k \circ G$ est inverse à gauche de F .

Affirmation. Si F possède un inverse d'homotopie à gauche L et un à droite R alors F est une équivalence d'homotopie et R (ou L) est son inverse.

Preuve. Les relations

$$LF \simeq id, \quad FR \simeq id,$$

impliquent que

$$L \simeq L(FR) = (LF)R \simeq R,$$

et donc que

$$RF \simeq LF \simeq id.$$

Maintenant, la relation

$$fGF \simeq id$$

implique que F a un inverse à gauche et de la même manière on peut prouver que G possède aussi un inverse à gauche.

Donc puisque $k(GF) \simeq id$ et que k possède un inverse à gauche, on a que $(GF)k \simeq id$. De même, puisque $G(Fk) \simeq id$ et que G possède un inverse à gauche, on voit que $(Fk)G \simeq id$. Et enfin, puisque $F(kG) \simeq id$ et que F possède un inverse à gauche, cela implique que F est une équivalence d'homotopie. ■

Nous pouvons à présent énoncer et démontrer le *Théorème de Morse*.

Théorème 4 (Théorème de Morse). *Si f est une fonction différentiable sur M sans point critique dégénéré et si chaque M^a est compact, alors M a le type d'homotopie d'un CW-complexe, avec une cellule de dimension λ pour chaque point critique d'indice λ . En d'autres termes, le nombre de cellules de dimension λ est égal au nombre de points critiques d'indice λ .*

Démonstration. Soient $c_1 < c_2 < c_3 < \dots$ les valeurs critiques de $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. La suite $(c_i)_{i \in \mathbb{N}}$ n'a pas de point d'accumulation puisque chaque M^a est compact. Quand $a < c_1$, M^a est vide (et c'est un CW-complexe). Supposons que $a \neq c_1, c_2, c_3, \dots$ et que M^a a le type d'homotopie d'un CW-complexe. Soit c le plus petit $c_i > a$. Par les théorèmes 2, 3 et la remarque 3, $M^{c+\varepsilon}$ a le type d'homotopie de $M^{c-\varepsilon} \cup_{\varphi_1} e^{\lambda_1} \cup \dots \cup_{\varphi_{j(c)}} e^{\lambda_{j(c)}}$ pour certaines applications $\varphi_1, \dots, \varphi_{j(c)}$ lorsque ε est assez petit, et il y a une équivalence d'homotopie $h : M^{c-\varepsilon} \rightarrow M^a$. Or on a une équivalence d'homotopie $h' : M^a \rightarrow K$ où K est un CW-complexe. Du coup chaque application $h' \circ h \circ \varphi_j$ est homotope à l'application

$$\psi_j : \dot{e}^{\lambda_j} \rightarrow (\lambda_j - 1)\text{-squelette de } K.$$

Dès lors, $K \cup_{\psi_1} e^{\lambda_1} \cup \dots \cup_{\psi_{j(c)}} e^{\lambda_{j(c)}}$ est un CW-complexe et, de par les lemmes 4 et 5, a le type d'homotopie de $M^{c+\varepsilon}$.

Par induction on prouve que chaque M^a a le type d'homotopie d'un CW-complexe et la démonstration est complète si M est compact. ■

Chapitre 3

Géométrie riemannienne

3.1 Dérivée covariante

L'objet de cette section est de se rappeler des concepts de dérivée covariante d'un champ de vecteurs sur une variété M ainsi que d'un champ de vecteurs le long d'une courbe c . Comme d'habitude, nous considérerons des champ de vecteurs tangents à la variété, c'est-à-dire contenu dans l'espace des plans tangents TM de ces variétés et donc des champs de vecteurs tangents à la courbe (en ce sens que les vecteurs sont contenus dans le plan tangent à la variété au point considéré). A priori, lorsqu'on observe la variation du champ de vecteurs le long de la courbe, le résultat est un champ de vecteurs qui n'ont plus de raison d'être tangents à la courbe et donc à la variété. Pour se fixer les idées, prenons comme exemple la sphère et un méridien tracé sur cette sphère. Si le champ de vecteurs sur le méridien sont des vecteurs unitaires indiquant la direction de déplacement d'un point à vitesse constante sur méridien, la dérivée usuelle du champ de vecteurs n'est plus contenu dans le plan tangent car en chaque point, le vecteur dérivée est dirigé vers le centre du cercle. Le concept de dérivée covariante intervient alors et propose de projeter de manière orthogonale les vecteurs résultant de la dérivation sur le plan tangent.

Pour définir ce concept de dérivée covariante, il nous faudra en introduire un autre précédemment, celui de connexion. Il s'agit du point départ de cette section qui va nous décrire comment obtenir une dérivée covariante en fonction de chaque variété et sa métrique riemannienne.

Soit M une variété lisse.

Définition 24. Une connexion affine en un point $p \in M$ est une fonction $\vdash_p: T_pM \times X^\infty(M) \rightarrow T_pM$, qui à chaque vecteur tangent $X_p \in T_pM$ et à chaque champ de vecteurs Y associe un nouveau vecteur tangent

$$X_p \vdash_p Y \in T_pM$$

appelé la dérivée covariante du champ de vecteurs Y dans la direction X_p . C'est une

fonction bilinéaire de X_p et de Y . De plus, si on a une fonction

$$f : M \rightarrow \mathbb{R}$$

et si fY est le champ de vecteurs qui en chaque point q vaut

$$(fY)_q = f(q)Y_q$$

alors la connexion affine \vdash_p satisfait l'identité

$$X_p \vdash_p (fY) = (X_p f)Y_p \vdash_p Y,$$

où $X_p f$ est la dérivée directionnelle de f dans la direction X_p .

Définition 25. Une connexion sur M est une fonction qui, à chaque point $p \in M$, associe une connexion affine \vdash_p en p , et qui est telle que :

- a) Si X et Y sont des champs de vecteurs lisses sur M alors le champ de vecteurs $X \vdash Y$, défini par l'identité

$$(X \vdash Y)_p = X_p \vdash_p Y,$$

doit aussi être lisse.

- b) $X \vdash Y$ est bilinéaire en X et Y ,

- c) $(fX) \vdash Y = f(X \vdash Y)$,

- d) $(X \vdash (fY)) = (Xf)Y + (fX) \vdash Y$.

En termes de coordonnées locales (u^1, \dots, u^n) définies sur un voisinage $U \subset M$, la connexion \vdash est déterminée par n^3 fonctions lisses à valeurs réelles sur U , notées Γ_{ij}^k , de la manière suivante. Soit ∂_k le champ de vecteurs $\frac{\partial}{\partial u^k}$ sur U . Alors n'importe quel champ de vecteurs X sur U peut s'exprimer de manière unique comme

$$X = \sum_{k=1}^n x^k \partial_k$$

où les x^k sont des fonctions à valeurs réelles sur U . En particulier le champ de vecteurs $\partial_i \vdash \partial_j$ peut s'exprimer comme

$$\partial_i \vdash \partial_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k \partial_k.$$

(On appelle ces fonctions les symboles de Christoffel de seconde espèce.)

Ces fonctions Γ_{ij}^k déterminent complètement la connexion sur U . En fait, si on a deux champs de vecteurs $X = \sum x^i \partial_i$ et $Y = \sum y^j \partial_j$, on peut exprimer $X \vdash Y$ en fonction des x^i , y^j et Γ_{ij}^k grâce à la définition, car

$$\begin{aligned} \left(\sum_i x^i \partial_i \right) \vdash \left(\sum_j y^j \partial_j \right) &= \sum_i x^i \sum_j (\partial_i \vdash y^j \partial_j) \\ &= \sum_i \left(\sum_j \partial_i y^j \partial_j + \sum_j y^j (\partial_i \vdash \partial_j) \right) \\ &= \sum_i \left(\sum_k \partial_i y^k \partial_k + \sum_{jk} y^j \Gamma_{ij}^k \partial_k \right) \\ &= \sum_k \left(\sum_i x^i \left(\partial_i y^k + \sum_j \Gamma_{ij}^k y^j \right) \right) \partial_k, \end{aligned}$$

et donc on peut écrire

$$X \vdash Y = \sum_k \left(\sum_i x^i y_i^k \right) \partial_k$$

où le symbole y_i^k est la fonction à valeurs réelles

$$y_i^k = \partial_i y^k + \sum_j \Gamma_{ij}^k y^j.$$

Inversément, pour n'importe quelle fonction à valeurs réelles Γ_{ij}^k sur U , on peut définir $X \vdash Y$ par cette formule.

En se servant de la définition de cette connexion, on peut définir ce qu'on appelle la *dérivée covariante* d'un champ de vecteurs le long d'une courbe dans M . Voici quelques définitions qui permettront d'aboutir à cette notion.

Définition 26. Une courbe paramétrée dans M est une fonction lisse $c : \mathbb{R} \rightarrow M$. Un champ de vecteur V le long d'une courbe c est une fonction qui, à chaque $t \in \mathbb{R}$, associe un vecteur tangent

$$V_t \in T_{c(t)}M.$$

Cette fonction est lisse si pour n'importe quelle fonction lisse f sur M , la correspondance

$$t \rightarrow V_t f$$

définit une fonction lisse sur \mathbb{R} . (Une fois encore, $V_t f$ représente la dérivée directionnelle de f dans la direction V_t .)

A titre d'exemple, considérons un champ de vecteurs assez intuitif qui est celui des vecteurs vitesses instantanées le long d'une courbe plane c tracée sur la variété \mathbb{R}^2 . Nous noterons ce vecteur $\frac{dc}{dt}$ qui sera donné par

$$\frac{dc}{dt} = c_* \frac{d}{dt}$$

où $\frac{d}{dt}$ est le champ de vecteurs sur les réels et

$$c_* : T_t \mathbb{R} \rightarrow T_{c(t)}M$$

est l'application induite d'espaces tangents. Il est important de remarquer que dans ce cas, le champ de vecteurs le long de la courbe est tangent à la courbe mais que ce ne sera pas forcément le cas si l'on considère d'autres champs de vecteurs le long d'une courbe. Pensons au champ de vecteurs accélération le long d'une courbe, les vecteurs ne sont en général pas tangents à la courbe bien qu'ils soient contenus dans le plan tangent à la variété, en l'occurrence ici : \mathbb{R}^2 .

Définition 27. Soit \vdash une connexion affine sur M . Soit également un champ de vecteurs V le long d'une courbe c tracée sur M . L'opération

$$V \rightarrow \frac{DV}{dt}$$

détermine un nouveau champ de vecteurs $\frac{DV}{dt}$ le long de c appelé la dérivée covariante de V . Cette opération satisfait les propriétés suivantes :

a) $\frac{D(V+W)}{dt} = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}$,

b) Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction lisse alors

$$\frac{D(fV)}{dt} = \frac{df}{dt}V + f\frac{DV}{dt},$$

c) Si V est induit par un champ de vecteurs Y sur M , c'est-à-dire si $V_t = Y_{c(t)}$ pour tout t , alors

$$\frac{DV}{dt} = \frac{dc}{dt} \lrcorner Y$$

(la dérivée covariante de Y dans la direction du vecteur vitesse de c).

Si on choisit un système de coordonnées locales $(u^1(t), \dots, u^n(t))$ dans un voisinage U qui contient le point $c(t)$, alors le champ de vecteurs V peut être exprimé de manière unique comme

$$V = \sum v^j \partial_j$$

où les v^1, \dots, v^n sont des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} et $\partial_j = \frac{\partial}{\partial u^j}$. On voit alors, grâce aux conditions (a), (b) et (c) que

$$\begin{aligned} \frac{DV}{dt} &= \frac{dc}{dt} \lrcorner \sum_j v^j \partial_j = \sum_i \frac{du^i}{dt} \partial_i \lrcorner \sum_j v^j \partial_j \\ &= \sum_i \frac{du^i}{dt} \sum_j (\partial_i \lrcorner v^j \partial_j) \\ &= \sum_i \frac{du^i}{dt} \sum_j (\partial_i v^j \partial_j + v^j \sum_k \Gamma_{ij}^k \partial_k) \\ &= \sum_i \frac{du^i}{dt} \left(\sum_k \partial_i v^k \partial_k + \sum_{jk} v^j \Gamma_{ij}^k \partial_k \right) \\ &= \sum_k \left(\sum_i \frac{du^i}{dt} \partial_i v^k + \sum_{ij} v^j \Gamma_{ij}^k \frac{du^i}{dt} \right) \partial_k \\ &= \sum_k \left(\frac{dv^k}{dt} + \sum_{ij} v^j \Gamma_{ij}^k \frac{du^i}{dt} \right) \partial_k \end{aligned}$$

Donc on a

$$\frac{DV}{dt} = \sum_k \left(\frac{dv^k}{dt} + \sum_{ij} v^j \Gamma_{ij}^k \frac{du^i}{dt} \right) \partial_k.$$

Inversément, si on a une formule pour $\frac{DV}{dt}$, elle vérifiera les conditions (a), (b) et (c).

On voit apparaître dans un des deux termes de cette formule les Γ_{ij}^k . S'ils sont tous nuls, on retrouve la formule de dérivation classique d'un champ de vecteurs le long d'une courbe c .

Définition 28. On dit qu'un champ de vecteurs V le long de c est un champ de vecteurs parallèles si la dérivée covariante $\frac{DV}{dt}$ est identiquement nulle.

Cette notion de champ de vecteurs parallèles est assez importante, car c'est grâce à cette idée que l'on définit une géodésique. Nous allons prouver un résultat qui stipule que l'existence de tels champs est unique sous certaines conditions.

Lemme 6. Si on a une courbe c et un vecteur tangent V_0 au point $c(0)$ alors il n'y a qu'un seul champ de vecteurs parallèles V le long de c qui étend V_0 .

Démonstration. Par le Théorème 1, p.152 de [3], l'équation différentielle

$$\frac{dv^k}{dt} + \sum_{ij} \frac{du^i}{dt} \Gamma_{ij}^k v^j = 0$$

a des solutions $v^k(t)$ qui sont déterminées de manière unique par la valeur initiale $v^k(0)$. Puisque ces équations sont linéaires, des solutions peuvent être déterminées pour des valeurs appropriées de t . ■

On dit que le vecteur V_t est obtenu à partir de V_0 par *translation parallèle* le long de c .

Prenons à présent une variété riemannienne M . Le produit scalaire de deux vecteurs X_p et Y_p de T_pM sera noté $\langle X_p, Y_p \rangle$.

Définition 29. On dit qu'une connexion \vdash sur M est compatible avec la métrique riemannienne si les translations parallèles préservent les produits scalaires. Cela signifie que pour n'importe quelle courbe paramétrée c , et n'importe quelle paire P, Q de champ de vecteurs parallèles le long de c , le produit scalaire $\langle P, Q \rangle$ doit être constant.

Nous verrons dans la suite que le fait de vouloir cette compatibilité entre connexion et métrique imposera des conditions sur les fonctions Γ_{ij}^k qui déterminent la connexion \vdash .

Lemme 7. Supposons que l'on ait une connexion compatible avec la métrique. Soient V et W deux champs de vecteurs le long de c . Alors

$$\frac{d}{dt} \langle V, W \rangle = \left\langle \frac{DV}{dt}, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{DW}{dt} \right\rangle .$$

Démonstration. Choisissons des champs de vecteurs parallèles P_1, \dots, P_n le long de c qui sont orthogonaux deux à deux en un point de c et donc, en chaque point de c car la connexion est compatible avec la métrique et donc les produits scalaires $\langle P_i, P_j \rangle$ sont constants le long de c pour $1 \leq i, j \leq n$, ils valent même zéro. Alors étant donnés deux champs de vecteurs V et W , on peut les exprimer comme

$$V = \sum v^i P_i, \quad W = \sum w^j P_j$$

(où les $v^i = \langle V, P_i \rangle$ et $w^j = \langle W, P_j \rangle$ sont des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R}). Il s'en suit que

$$\langle V, W \rangle = \sum v^i w^i$$

et que

$$\frac{DV}{dt} = \sum \frac{dv^i}{dt} P_i, \quad \frac{DW}{dt} = \sum \frac{dw^j}{dt} P_j .$$

On obtient alors que

$$\left\langle \frac{DV}{dt}, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{DW}{dt} \right\rangle = \sum \left(\frac{dv^i}{dt} w^i + v^i \frac{dw^i}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \langle V, W \rangle \quad ,$$

ce qui complète la preuve de ce lemme. ■

Corollaire 2. *Pour n'importe quels champs de vecteurs V et W sur M et n'importe quel vecteur $X_p \in T_p M$:*

$$X_p \langle V, W \rangle = \langle X_p \vdash V, W_p \rangle + \langle V_p, X_p \vdash W \rangle \quad .$$

où $X_p \langle V, W \rangle$ représente la dérivée directionnelle de la fonction $\langle V, W \rangle : M \rightarrow \mathbb{R}$ dans la direction X_p .

Démonstration. On choisit une courbe c sur M telle que pour un certain temps t_0 , son vecteur vitesse soit dans la direction de X_p . On peut alors considérer que l'on fait la dérivée covariante des champs de vecteurs V et W le long de cette courbe, en un temps t_0 , ce qui par le lemme 7 nous donne

$$\frac{d}{dt} \langle V, W \rangle |_{t_0} = \left\langle \frac{DV}{dt} |_{t_0}, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{DW}{dt} |_{t_0} \right\rangle \quad ,$$

et par la condition (c) de la définition 27, on obtient

$$\frac{dc}{dt} |_{t_0} \langle V, W \rangle = \left\langle \frac{dc}{dt} |_{t_0} \vdash V, W_p \right\rangle + \left\langle V_p, \frac{dc}{dt} |_{t_0} \vdash W \right\rangle \quad .$$

■

Définition 30. *Une connexion \vdash est dite symétrique si elle satisfait l'identité*

$$(X \vdash Y) - (Y \vdash X) = [X, Y]$$

(où $[X, Y]$, appelé crochet de Poisson, est le seul champ de vecteurs qui satisfait l'identité $[X, Y]f = X(Yf) - Y(Xf)$).

Cette définition appliquée au cas $X = \partial_i$ et $Y = \partial_j$, puisque $[\partial_i, \partial_j] = 0$, pour $k = 1, \dots, n$ on obtient la relation

$$\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k = 0.$$

Lemme 8 (Lemme Fondamental de la Géométrie Riemannienne). *Une variété riemannienne ne possède qu'une seule connexion symétrique qui est compatible avec sa métrique.*

Preuve d'unicité. Si on pose $g_{jk} = \langle \partial_j, \partial_k \rangle$ alors d'après le corollaire précédent, on obtient

$$\partial_i g_{jk} = \langle \partial_i \vdash \partial_j, \partial_k \rangle + \langle \partial_j, \partial_i \vdash \partial_k \rangle .$$

En permutant i, j et k , et puisque $\partial_i \vdash \partial_j = \partial_j \vdash \partial_i$, on obtient trois équations linéaires traitant les trois quantités

$$\langle \partial_i \vdash \partial_j, \partial_k \rangle, \quad \langle \partial_j \vdash \partial_k, \partial_i \rangle \text{ et } \langle \partial_k \vdash \partial_i, \partial_j \rangle.$$

Ces équations peuvent être résolues de manière unique et nous amènent à la *première identité de Christoffel*

$$\langle \partial_i \vdash \partial_j, \partial_k \rangle = \frac{1}{2} (\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}).$$

On peut également calculer le membre de gauche de cette équation :

$$\langle \partial_i \vdash \partial_j, \partial_k \rangle = \sum_l \Gamma_{ij}^l g_{lk}.$$

En multipliant le membre de droite de cette dernière équation par l'inverse (g^{kl}) de la matrice (g_{lk}) on obtient ce qu'on appelle la *seconde identité de Christoffel*

$$\Gamma_{ij}^l = \sum_k \frac{1}{2} (\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}) g^{kl},$$

et on constate que la connexion est uniquement déterminée par la métrique. Bien sûr, inversement, en définissant les fonctions Γ_{ij}^k par cette formule, on vérifie que la connexion est symétrique car la matrice (g_{ij}) est symétrique, et que cette connexion est compatible avec la métrique. ■

Dès à présent, lorsqu'on parlera d'une connexion symétrique compatible avec la métrique d'une variété riemannienne M , on aura, pour tous champs de vecteurs X, Y, Z , les conditions suivantes :

- a) la connexion est affine,
- b) $(X \vdash Y) - (Y \vdash X) = [X, Y]$
- c) $X \langle Y, Z \rangle = \langle X \vdash Y, Z \rangle + \langle Y, X \vdash Z \rangle.$

3.2 Géodésiques

Avant de définir formellement une géodésique, il est intéressant d'essayer de comprendre ce que ce concept signifie. Une géodésique est une courbe telle qu'un point p peut s'y déplacer sans subir d'accélération la contraignant à rester sur cette courbe. Un cercle tracé sur une feuille (donc dans le plan euclidien \mathbb{R}^2) n'est pas une géodésique car même si un point s'y déplace avec une vitesse constante, il subit une accélération dirigée vers le centre du cercle, l'accélération centripète, pour pouvoir rester sur ce cercle. Une droite paramétrisée à vitesse non constante, donc avec un point s'y déplaçant à vitesse non constante n'est pas non plus une géodésique car le point s'y trouve accéléré. Par

contre, si la droite tracée sur la feuille est paramétrisée à vitesse constante, alors c'est une géodésique car le point s'y déplaçant ne subit aucune accélération et reste néanmoins sur la droite. Si maintenant nous décidons d'utiliser une sphère plongée dans \mathbb{R}^3 et non plus le plan, observons ce que devient une géodésique. On ne peut déjà plus tracer une droite car la sphère a une surface courbée. Si on trace des cercles sur cette sphère passant par un seul point p , alors seul un de ces cercles sera une géodésique. Il s'agit du plus grand de ces cercles. Alors qu'avant, un cercle sur le plan n'était pas une géodésique, un grand cercle sur la sphère l'est, pour la simple raison que l'accélération du point se déplaçant sur ce grand cercle n'est tout simplement pas un vecteur contenu dans la sphère, ou plus précisément dans l'espace tangent à la sphère au point où l'on calcule l'accélération. C'est là-dessus que se base le principe de dérivée covariante, on ne s'intéresse qu'aux accélérations contenues dans les plans tangents à l'espace considéré et non pas dans l'espace de plongement (s'il en existe un). C'est donc un concept que l'on qualifie d'intrinsèque car il ne dépend pas de l'espace ambiant mais uniquement de l'espace considéré. C'est à cette fin que les Symboles de Christoffel existent, afin de se rappeler dans quel type d'espace on se trouve sans faire référence à l'espace ambiant. En effet, en chaque point p de l'espace sur lequel on travaille, sont définis les Symboles de Christoffel qui renseignent la courbure de l'espace à l'endroit du point p . On sait que dans la formule du calcul de la dérivée covariante d'un champ de vecteur V le long d'une courbe c apparaissent ces symboles et c'est grâce à eux que sur une sphère, par exemple, un grand cercle sur lequel un point se déplace à vitesse constante est une géodésique. L'accélération centripète n'y apparaît plus!

Soit M une variété riemannienne connexe, c'est-à-dire en un seul tenant.

Définition 31. *Un chemin paramétré*

$$\gamma : I \rightarrow M,$$

où I est un intervalle de la droite réelle, est appelé une géodésique si le champ de vecteurs accélération $\frac{D}{dt} \frac{d\gamma}{dt}$ est identiquement nul, c'est-à-dire nul en tout point p du chemin γ .

Donc le champ de vecteurs vitesse $\frac{d\gamma}{dt}$ est censé être un champ de vecteurs parallèles le long de γ . Si γ est une géodésique, alors l'identité

$$\frac{d}{dt} \left\langle \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle = 2 \left\langle \frac{D}{dt} \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle = 0$$

nous informe que la longueur du vecteur vitesse $\| \frac{d\gamma}{dt} \| = \left\langle \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle^{1/2}$ est constante le long de γ . Si on considère la fonction *longueur d'arc*

$$s(t) = \int_{t_0}^t \left\| \frac{d\gamma}{dt} \right\| dt + C$$

où $t \in I$, $t_0 \leq t$ et C est une constante, on peut reformuler ce qui vient d'être dit comme suit : Le paramètre t le long d'une géodésique est une fonction linéaire de la longueur d'arc. Ce paramètre t est en fait égal à la longueur d'arc si et seulement si $\| \frac{d\gamma}{dt} \| = 1$.

Si on considère un système de coordonnées locales u^1, \dots, u^n , alors la courbe $t \rightarrow \gamma(t)$ tracée sur M détermine n fonctions lisses $u^1(t), \dots, u^n(t)$. Dès lors l'équation $\frac{D}{dt} \frac{d\gamma}{dt}$ pour une géodésique prend la forme

$$\frac{d^2 u^k}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k(u^1, \dots, u^n) \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt} = 0.$$

L'existence de géodésiques dépend alors des solutions d'un certain système d'équations différentielles du second ordre.

De manière plus générale, si on considère un système d'équations de la forme

$$\frac{d^2 \vec{u}}{dt^2} = \vec{F}(\vec{u}, \frac{d\vec{u}}{dt}),$$

où $\vec{u} = (u^1, \dots, u^n)$ et \vec{F} représente n'importe quel n -uplet de fonctions lisses, toutes définies sur un voisinage U d'un point

$$(\vec{u}_1, \vec{v}_1) \in \mathbb{R}^{2n},$$

on peut prouver l'existence et l'unicité des solutions de ce système d'équation grâce au théorème qui suit.

Théorème 5 (Existence et Unicité). *Il existe un voisinage W du point (\vec{u}_1, \vec{v}_1) et un réel $\varepsilon > 0$ tels que, pour tout $(\vec{u}_0, \vec{v}_0) \in W$ l'équation différentielle*

$$\frac{d^2 \vec{u}}{dt^2} = \vec{F}(\vec{u}, \frac{d\vec{u}}{dt})$$

a une solution unique $t \rightarrow \vec{u}(t)$ qui est définie pour $|t| < \varepsilon$, et qui satisfait les conditions initiales

$$\vec{u}(0) = \vec{u}_0, \quad \frac{d\vec{u}}{dt}(0) = \vec{v}_0.$$

De plus, la solution est une fonction lisse des deux conditions initiales, c'est-à-dire que

$$f : W \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(\vec{u}_0, \vec{v}_0, t) \mapsto \vec{u}(t)$$

est une fonction lisse des $2n + 1$ variables.

Démonstration. Si l'on introduit une nouvelle variable $v^i = \frac{du^i}{dt}$ ce système de n équations différentielles du second ordre devient un système de $2n$ équations différentielles du premier ordre

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{u}}{dt} &= \vec{v} \quad , \\ \frac{d\vec{v}}{dt} &= \vec{F}(\vec{u}, \vec{v}) \quad . \end{aligned}$$

La suite de la preuve est alors assurée par le Théorème 13, p.166 de "The Theory of Functions of Real Variables", L. M. Graves. ■

Lemme 9. Pour tout point p_0 d'une variété riemannienne M il existe un voisinage U de p_0 et un réel $\varepsilon > 0$ tels que pour chaque $p \in U$ et chaque vecteur tangent $v \in T_p M$ de longueur $\|v\| < \varepsilon$ il y a une unique géodésique

$$\gamma_v : (-a, a) \rightarrow M$$

satisfaisant les conditions

$$\gamma_v(0) = p, \quad \frac{d\gamma_v}{dt}(0) = v.$$

(Le réel $a \in I$ est arbitraire.)

Démonstration. En réalité, pour être plus précis, il existe un voisinage U de p_0 et des réels $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ tels que pour tout $p \in U$ et pour tout $v \in T_p M$ de longueur $\|v\| < \varepsilon_1$ il existe une unique géodésique

$$\gamma_v : (-a\varepsilon_2, a\varepsilon_2) \rightarrow M$$

satisfaisant les conditions initiales requises.

Pour obtenir ce résultat quelque peu plus précis, il est nécessaire de se rendre compte que l'équation différentielle pour une géodésique a les propriétés d'homogénéité suivantes. Soit c une constante arbitraire. Si la courbe paramétrée

$$t \mapsto \gamma(t)$$

est une géodésique, alors la courbe paramétrée

$$t \mapsto \gamma(ct)$$

est aussi une géodésique.

Maintenant supposons que nous ayons un $\varepsilon < \varepsilon_1\varepsilon_2$. Alors si $\|v\| < \varepsilon$ et $|t| < a$, on a

$$\|v/\varepsilon_2\| < \varepsilon_1 \text{ et } |\varepsilon_2 t| < 2\varepsilon_2.$$

On peut dès lors définir $\gamma_v(t)$ comme étant $\gamma_{v/\varepsilon_2}(\varepsilon_2 t)$. Ce lemme se prouve alors grâce au théorème 5. ■

Nous allons maintenant introduire une notation. Soit $v \in T_p M$ un vecteur tangent, et supposons qu'il existe une géodésique

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow M$$

qui satisfasse les conditions

$$\gamma(0) = q, \quad \frac{d\gamma}{dt}(0) = v.$$

Alors le point $\gamma(1) \in M$ sera noté $\exp_q(v)$ et appelé l'exponentielle du vecteur tangent v . La géodésique γ peut alors être décrite par la formule

$$\gamma(t) = \exp_q(tv).$$

Définition 32. La variété M est géodésiquement complète si $\exp_q(v)$ est définie pour tout $q \in M$ et tout vecteurs $v \in T_pM$. De manière équivalente : Pour tout segment de géodésique $\gamma_0 : [a, b] \rightarrow M$, il est possible d'étendre γ_0 en une géodésique infinie

$$\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M.$$

Lemme 10. Pour tout point $p \in M$ il existe un voisinage W et un réel $\varepsilon > 0$ tels que :

- Pour tous points $q_1, q_2 \in W$ il existe une unique géodésique de longueur $l < \varepsilon$ qui joint q_1 à q_2 .
- Cette géodésique est une fonction lisse de ces deux points, c'est-à-dire que si $t \mapsto \exp_{q_1}(tv)$, $0 \leq t \leq 1$, est la géodésique joignant q_1 et q_2 , alors la paire $(q_1, v) \in TM$ dépend de (q_1, q_2) de manière C^∞ .
- Pour chaque $q \in W$ l'application \exp_q est un difféomorphisme qui envoie la boule ouverte $B_n(q, \varepsilon) \subset T_qM$ sur un ensemble ouvert U_q qui contient W .

Démonstration. Soit TM la variété tangente à M qui est l'ensemble de tous les (p, v) avec $p \in M$ et $v \in T_pM$. On met sur TM la structure lisse suivante : si (u^1, \dots, u^n) est un système de coordonnées locales dans un voisinage ouvert $U \subset M$ alors tout vecteur tangent en un point $q \in U$ peut être exprimé de manière unique comme $t^1\partial_1 + \dots + t^n\partial_n$, où $\partial_i = \frac{\partial}{\partial u^i}|_q$. Alors les fonctions $u^1, \dots, u^n, t^1, \dots, t^n$ constituent un système de coordonnées sur l'ouvert $TU \subset TM$.

Le lemme 9 dit que pour tout point $p \in M$ l'application

$$(q, v) \mapsto \exp_q(v)$$

est définie sur un voisinage V du point $(p, 0) \in TM$.

Maintenant considérons la fonction lisse $F : V \rightarrow M \times M$ définie par

$$F(q, v) = (q, \exp_q(v)).$$

On prétend que le Jacobien de F au point $(p, 0)$ est non-singulier. En fait, si on désigne par $(u_1^1, \dots, u_1^n, u_2^1, \dots, u_2^n) \in U \times U \times M \times M$ les coordonnées induites par l'application F_* , on a

$$\begin{aligned} F_* \left(\frac{\partial}{\partial u^i} \right) &= \frac{\partial}{\partial u_1^i} + \frac{\partial}{\partial u_2^i} \\ F_* \left(\frac{\partial}{\partial t^j} \right) &= 0 + \frac{\partial}{\partial u_1^j} \end{aligned}$$

On voit alors que la matrice jacobienne de F en $(p, 0)$ est non-singulière.

Le théorème des fonctions implicites assure alors que F est un difféomorphisme qui envoie un voisinage V' de $(p, 0) \in TM$ sur un voisinage de $(p, p) \in M \times M$. On peut supposer que le premier voisinage V' contient en fait les paires (q, v) telles que q appartient à un voisinage U' donné de p et telles que $\|v\| < \varepsilon$. Si on choisit maintenant un voisinage plus petit $W \ni p$ tel que $F(V') \supset W \times W$, alors le lemme est prouvé. ■

Étudions à présent la relation entre géodésiques et longueurs d'arcs.

Lemme 11. Si $q = \gamma(0)$ et U_q est comme dans le lemme précédent, alors les géodésiques passant par q sont orthogonales aux hypersurfaces

$$\{exp_q(v) : v \in T_qM, \quad \|v\| = \text{constante}\}.$$

Démonstration. Soit v une courbe de T_qM telle que la longueur $\|v(t)\|$ du vecteur $v(t)$ soit égale à 1. On doit montrer que les courbes correspondantes

$$t \mapsto exp_q(r_0v(t))$$

contenues dans U_q , où $0 < r_0 < \varepsilon$, sont orthogonales aux géodésiques radiales

$$r \mapsto exp_q(rv(t_0)).$$

Si on considère la surface paramétrée f donnée par

$$f(r, t) = exp_q(rv(t)), \quad 0 \leq r < \varepsilon,$$

on doit montrer que

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle = 0$$

pour tout (r, t) .

On sait que

$$\frac{\partial}{\partial r} \left\langle \frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle = \left\langle \frac{D}{\partial r} \frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial f}{\partial r}, \frac{D}{\partial r} \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle.$$

Le premier terme du membre de droite est nul puisque les courbes

$$r \mapsto f(r, t)$$

sont des géodésiques. Tandis que le deuxième terme

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial r}, \frac{D}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial r} \right\rangle = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left\langle \frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial r} \right\rangle = 0,$$

puisque $\| \frac{\partial f}{\partial r} \| = \| v(t) \| = 1$. Donc la quantité $\left\langle \frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle$ est indépendante de r . Mais pour $r = 0$ on a

$$f(0, t) = exp_q(0) = q$$

et donc $\frac{\partial f}{\partial t}(0, t) = 0$. Du coup, $\left\langle \frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle$ est identiquement nulle et le lemme est prouvé. ■

Maintenant si on considère un chemin lisse par morceaux

$$\omega : [a, b] \rightarrow U_q - \{q\}.$$

Chaque point $\omega(t)$ peut être exprimé de manière unique sous la forme $exp_q(r(t)v(t))$ avec $0 < r(t) < \varepsilon$, $\|v(t)\| = 1$ et $v(t) \in T_qM$.

Lemme 12. Soit ω un chemin lisse par morceaux. La longueur

$$\int_a^b \left\| \frac{d\omega}{dt} \right\| dt$$

est plus grande ou égale à $|r(b) - r(a)|$, avec l'égalité si la fonction $r(t)$ est monotone et la fonction $v(t)$ est constante. Le chemin le plus court joignant deux coquilles concentriques sphériques centrées en q est une géodésique radiale.

Démonstration. Soit $f(r, t) = \exp_q(rv(t))$, tel que $\omega(t) = f(r(t), t)$. Alors

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\partial f}{\partial r} r'(t) + \frac{\partial f}{\partial t}.$$

Puisque les deux vecteurs du membre de droite sont orthogonaux et puisque $\left\| \frac{\partial f}{\partial r} \right\| = 1$, on obtient

$$\left\| \frac{d\omega}{dt} \right\|^2 = |r'(t)|^2 + \left\| \frac{\partial f}{\partial t} \right\|^2 \geq |r'(t)|^2,$$

avec l'égalité seulement si $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$, donc seulement si $\frac{dv}{dt} = 0$. De là,

$$\int_a^b \left\| \frac{d\omega}{dt} \right\| dt \geq \int_a^b |r'(t)| dt \geq |r(b) - r(a)|$$

avec l'égalité si $r(t)$ est monotone et $v(t)$ est constante. ■

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer un résultat intéressant mettant en relation, comme annoncé, géodésiques et longueurs d'arcs.

Théorème 6. Soit W et ε comme dans le lemme 10. Soit

$$\gamma = [0, 1] \rightarrow M$$

une géodésique de longueur $l < \varepsilon$ joignant deux points de W , et soit

$$\omega : [0, 1] \rightarrow M$$

n'importe quel autre chemin lisse par morceaux joignant les deux mêmes points. Alors

$$\int_0^1 \left\| \frac{d\gamma}{dt} \right\| dt \leq \int_0^1 \left\| \frac{d\omega}{dt} \right\| dt \quad ,$$

avec l'égalité seulement si l'ensemble des points $\omega([0, 1])$ coïncident avec $\gamma([0, 1])$. Dès lors γ est le chemin le plus court joignant ces deux points.

Démonstration. Considérons un chemin lisse par morceaux quelconque ω joignant le point q et

$$q' = \exp_q(rv) \in U_q$$

avec $0 < r < \varepsilon$ et $\|v\| = 1$. Pour tout $\delta > 0$ le chemin ω doit contenir un segment joignant la coquille sphérique de rayon δ et la coquille sphérique de rayon r et se trouvant entre

ces deux coquilles. La longueur de ce segment sera plus grande que $|r - \delta|$ et si on fait tendre δ vers zéro, la longueur de ω sera plus grande que r . Si $\omega([0, 1])$ ne coïncide pas avec $\gamma([0, 1])$, alors on obtient l'inégalité stricte

$$\int_0^1 \left\| \frac{d\gamma}{dt} \right\| dt < \int_0^1 \left\| \frac{d\omega}{dt} \right\| dt \quad ,$$

ce qui complète la démonstration. ■

Une conséquence importante de ce théorème est la suivante.

Corollaire 3. *Supposons qu'un chemin $\omega : [0, l] \rightarrow M$, paramétré par longueur d'arc, a une longueur plus petite ou égale à la longueur de n'importe quel autre chemin joignant $\omega(0)$ et $\omega(l)$. Alors ω est une géodésique.*

Démonstration. Considérons un morceau quelconque de ω qui se trouve dans un ensemble ouvert W , comme plus haut, et ayant une longueur plus petite que ε . Ce segment doit alors forcément être une géodésique par le théorème 6, et donc ω est aussi une géodésique. ■

Définition 33. *Une géodésique $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ sera dite minimale si sa longueur est plus petite ou égale à la longueur de n'importe quel autre chemin lisse par morceaux joignant les extrémités de γ .*

Le théorème 6 affirme que n'importe quel morceau de géodésique suffisamment petit est minimal. D'autre part une longue géodésique peut *ne pas* être minimale. Par exemple, on va voir que les arcs de grands cercles de la sphère unité (on dit qu'un grand cercle d'une sphère est le plus grand cercle passant par un point t que l'on peut tracer sur cette sphère) sont des géodésiques mais que, s'ils ont une longueur qui dépasse π , ce ne sont certainement pas des géodésiques minimales.

En général, les géodésiques minimales ne sont pas uniques. Par exemple, deux points antipodaux sur la sphère unité sont joints par une infinité de géodésiques minimales. Si l'on définit une distance sur une variété, alors l'affirmation suivante est vraie.

Définition 34. *La distance $\rho(p, q)$ entre deux points $p, q \in M$ est l'infimum des bornes inférieures des longueurs d'arcs de chemins lisses par morceaux joignant ces points.*

Corollaire 4. *Étant donné $K \subset M$ un ensemble compact, il existe un réel positif δ tel que toute paire de points de K , ayant une distance inférieure à δ , sont joints par une unique géodésique de longueur plus petite que δ . De plus, cette géodésique est minimale et dépend dérivablement de ses extrémités.*

Démonstration. Comme K est compact, il peut être couvert par un nombre fini d'ensembles ouverts W_α , du même genre que W dans le lemme 10. Alors on peut choisir un δ

assez petit de telle manière à ce que n'importe quelle paire de points de K dont la distance est plus petite que δ se trouve dans un des W_α et la preuve est complète. ■

Rappelons-nous qu'une variété M est *géodésiquement complète* si on peut étendre infiniment chaque segment de géodésique.

Théorème 7 (Hopf-Rinow). *Si M est géodésiquement complète, alors toute paire de points est joignable par une géodésique minimale.*

Démonstration. Soient $p, q \in M$ distants de $r > 0$ et choisissons un voisinage U_q comme dans le lemme 10. Soit $S \subset U_p$ une coquille sphérique de rayon $\delta < \varepsilon$ et de centre p . Puisque S est compact, il existe un point

$$p_0 = \exp_p(\delta v), \quad \|v\| = 1,$$

sur S pour lequel la distance à q est minimisée. Nous allons prouver que

$$\exp_p(rv) = q.$$

Cela implique que le segment de géodésique $t \mapsto \gamma(t) = \exp_p(tv)$, $0 \leq t \leq r$, est en fait une géodésique minimale de p à q .

La preuve montrera que tout point qui se déplace le long de la géodésique γ doit se rapprocher de q . En fait pour chaque $t \in [\delta, r]$, on va prouver que

$$\varrho(\gamma(t), q) = r - t.$$

Cette égalité dans le cas où $t = r$ complètera la démonstration.

Nous montrerons d'abord que l'égalité

$$\varrho(\gamma(\delta), q) = r - \delta.$$

est vraie. Puisque tout chemin de p à q doit traverser la coquille S , on a

$$\varrho(p, q) = \min_{s \in S} (\varrho(p, s) + \varrho(s, q)) = \delta + \varrho(p_0, q).$$

Donc $\varrho(p_0, q) = r - \delta$. Puisque $p_0 = \gamma(\delta)$, cela prouve que

$$\varrho(\gamma(\delta), q) = r - \delta.$$

Soit $t_0 \in [\delta, r]$ le supremum de réels t pour lesquels $\varrho(\gamma(t), q) = r - t$. Alors, par continuité, $\varrho(\gamma(t_0), q) = r - t_0$. Si $t_0 < r$ on arrivera à une contradiction. Soit S' une petite coquille sphérique de rayon δ' autour du point $\gamma(t_0)$ et soit $p'_0 \in S'$ un point de S' à distance minimale de q .

Alors

$$\varrho(\gamma(t_0), q) = \min_{s \in S'} (\varrho(\gamma(t_0), s) + \varrho(s, q)) = \delta' + \varrho(p'_0, q),$$



et donc

$$\varrho(p'_0, q) = (r - t_0) - \delta'.$$

On prétend que le point p'_0 est en fait le point $\gamma(t_0 + \delta')$. Par l'inégalité triangulaire et l'égalité ci-dessus

$$\varrho(p, p'_0) \geq \varrho(p, q) - \varrho(p'_0, q) = t_0 = \delta'.$$

Mais un chemin de longueur $t_0 + \delta'$ précisément allant de p à p'_0 est obtenu en suivant γ de p à $\gamma(t_0)$, et ensuite en suivant une géodésique minimale allant de $\gamma(t_0)$ à p'_0 . Puisque cette géodésique brisée a une longueur minimale, il s'en suit, par le corollaire 3 que c'est une géodésique non-brisée et que donc elle coïncide avec γ .

Donc $\gamma(t_0 + \delta') = p'_0$. L'égalité ci-dessus devient alors

$$\varrho(\gamma(t_0 + \delta'), q) = r - (t_0 + \delta'),$$

ce qui contredit la définition de t_0 . ■

Comme conséquence directe de ce théorème nous avons le corollaire suivant.

Corollaire 5. *Si M est géodésiquement complète alors tout sous-ensemble borné de M a une fermeture compacte. D'où, M est un espace métrique complet (c'est-à-dire que toute suite de Cauchy converge).*

Démonstration. Si $X \subset M$ a un diamètre d alors pour chaque $p \in X$ l'application $\exp_p : T_p M \rightarrow M$ envoie le disque de rayon d de $T_p M$ sur un sous-ensemble compact de M qui contient X (en utilisant le théorème de Hopf-Rinow). D'où, la fermeture de X est compacte. ■

3.3 Le tenseur de courbure

Nous allons nous intéresser, le moment d'une section, au tenseur de courbure R d'une connexion affine \vdash . Souvenons-nous qu'une connexion affine en un point p est simplement la donnée de fonctions Γ_{ij}^k qui permettent de calculer la dérivée covariante d'un champ de vecteurs sur une variété dans une direction donnée. Nous savons que dans le cas où une variété $M = \mathbb{R}^n$, ces fonctions Γ_{ij}^k sont toutes identiquement nulles. Elles renseignent

donc la "courbure" de l'espace euclidien \mathbb{R}^n , et on sait que la courbure de \mathbb{R}^n est nulle pour tout n en tout point. Le tenseur de courbure R est, comme son nom l'indique, un tenseur de n^4 composantes 4 fois covariant. Dans certains ouvrages, si on travaille avec des variétés de dimension 2, on introduit le tenseur de courbure d'une variété M en disant qu'une de ses composantes (4 fois covariante) est proportionnelle à la courbure totale, c'est-à-dire proportionnelle au produit des courbures principales. On peut obtenir une formule relativement simple pour calculer cette composante en fonction des symboles de Christoffel mais aussi les $2^4 - 1$ composantes restantes. Dans le cas d'une variété de dimension n , cette formule est donnée par

$$R_{mijk} = \partial_j \Gamma_{ikm} - \partial_k \Gamma_{ijm} + \sum_{\alpha} (\Gamma_{km}^{\alpha} \Gamma_{ij\alpha} - \Gamma_{jm}^{\alpha} \Gamma_{ik\alpha}),$$

avec $i, j, k, m = 1, \dots, n$ et où $\Gamma_{ijk} = \sum_{\alpha} g_{\alpha k} \Gamma_{ij}^{\alpha}$.

La définition que nous allons donner de ce tenseur de courbure est différente car elle est donnée en terme de connexion affine et non de courbures principales. Il est néanmoins possible de voir que ces deux définitions coïncident.

Définition 35. *La courbure R d'une variété M est une correspondance qui associe à toute paire $X, Y \in X^{\infty}(M)$ une application*

$$R(X, Y) : X^{\infty}(M) \rightarrow X^{\infty}(M), \quad Z \mapsto R(X, Y)Z.$$

Étant donnés les champs de vecteurs X, Y, Z , on définit le nouveau champ de vecteurs $R(X, Y)Z$ par l'identité

$$R(X, Y)Z = -X \vdash (Y \vdash Z) + Y \vdash (X \vdash Z) + [X, Y] \vdash Z.$$

Remarque 4. *Comme on sait que si $M = \mathbb{R}^n$, $R(X, Y)Z = 0$, on en conclut que R mesure la déviation de M à être euclidien. De plus, dans un système de coordonnées locales (u^1, \dots, u^n) , $[\partial_i, \partial_j] = 0$, et donc*

$$R(\partial_i, \partial_j)\partial_k = (\partial_j \vdash \partial_i - \partial_i \vdash \partial_j) \vdash \partial_k.$$

On voit alors que R mesure la "non-commutativité" de \vdash .

Lemme 13. *La valeur de $R(X, Y)Z$ au point $p \in M$ dépend seulement des vecteurs X_p, Y_p, Z_p en ce point p et non de leurs valeurs en des points voisins. De plus la correspondance*

$$X_p, Y_p, Z_p \mapsto R(X_p, Y_p)Z_p$$

qui va de $T_p M \times T_p M \times T_p M$ à $T_p M$ est trilinéaire.

Démonstration. Vérifier que R est une fonction trilinéaire de X, Y et Z découle de la définition de R , de la définition de la connexion et de la définition du crochet $[X, Y]$. Si

X est maintenant remplacé par fX alors les trois termes

$$\begin{array}{ccc} -X \vdash (Y \vdash Z) & , & fX \vdash (Y \vdash Z) & , \\ Y \vdash (X \vdash Z) & , & (Yf)(X \vdash Z) + fY \vdash (X \vdash Z) & , \\ [X, Y] \vdash Z & & -(Yf)(X \vdash Z) + f[X, Y] \vdash Z & . \end{array}$$

En additionnant ces trois termes on obtient l'identité

$$R(fX, Y)Z = fR(X, Y)Z.$$

Le cas avec Y est analogue. Enfin, si Z est remplacé par fZ ,

$$\begin{aligned} Y \vdash (X \vdash (fZ)) &= Y \vdash (X(f)Z + f(X \vdash Z)) \\ &= YX(f)Z + X(f)Y \vdash Z + Y(f)X \vdash Z \\ &\quad + f(Y \vdash (X \vdash Z)), \end{aligned}$$

de même que

$$Y \vdash (X \vdash (fZ)) = XY(f)Z + Y(f)X \vdash Z + X(f)Y \vdash Z + f(X \vdash (Y \vdash Z)).$$

Alors

$$\begin{aligned} R(X, Y)(fZ) &= (YX(f) - XY(f))Z + f(Y \vdash (X \vdash Z) - X \vdash (Y \vdash Z)) \\ &\quad + ([X, Y]f)Z + f([X, Y] \vdash Z) \\ &= f(Y \vdash (X \vdash Z) - X \vdash (Y \vdash Z) + [X, Y] \vdash Z) \\ &= fR(X, Y)Z. \end{aligned}$$

Supposons maintenant que $X = \sum x^i \partial_i$, $Y = \sum y^j \partial_j$, et $Z = \sum z^k \partial_k$. Alors

$$R(X, Y)Z = \sum R(x^i \partial_i, y^j \partial_j)(z^k \partial_k) = \sum x^i y^j z^k R(\partial_i, \partial_j) \partial_k.$$

Si on évalue cette expression en un point p , on obtient la formule

$$(R(X, Y)Z)_p = \sum x^i(p) y^j(p) z^k(p) (R(\partial_i, \partial_j) \partial_k)_p$$

qui, comme on le voit, ne dépend que des valeurs prises par les fonctions x^i, y^j, z^k en p . Paaarfait. ■

Considérons une surface paramétrée

$$s : \mathbb{R}^2 \rightarrow M.$$

Si on a un champ de vecteurs V le long de s , on peut lui appliquer les deux opérateurs de dérivation covariante $\frac{D}{\partial x}$ et $\frac{D}{\partial y}$. On va voir que ces deux opérateurs ne commutent en général pas.

Lemme 14.

$$\frac{D}{\partial y} \frac{D}{\partial x} V - \frac{D}{\partial x} \frac{D}{\partial y} V = R \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \right) V.$$

Démonstration. Comme V est champ de vecteurs le long de s , par la définition 27

$$\frac{DV}{\partial x} = \frac{\partial s}{\partial x} \vdash V,$$

de même que

$$\frac{DV}{\partial y} = \frac{\partial s}{\partial y} \vdash V.$$

Dès lors, comme $[\frac{\partial s}{\partial x}, \frac{\partial s}{\partial y}] = 0$,

$$R\left(\frac{\partial s}{\partial x}, \frac{\partial s}{\partial y}\right)V = -\frac{\partial s}{\partial x} \vdash \left(\frac{\partial s}{\partial y} \vdash V\right) + \frac{\partial s}{\partial y} \vdash \left(\frac{\partial s}{\partial x} \vdash V\right) = \frac{D}{\partial y} \frac{D}{\partial x} V - \frac{D}{\partial x} \frac{D}{\partial y} V,$$

et le lemme est prouvé. ■

Supposons que notre connexion soit symétrique et compatible avec la métrique de notre variété riemannienne M . Nous allons prouver que le tenseur R satisfait à quatre relations de symétrie.

Lemme 15. *Le tenseur de courbure d'une variété riemannienne est tel que*

- a) $R(X, Y)Z = -R(Y, X)Z$,
- b) $R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$ (*identité de Bianchi*),
- c) $\langle R(X, Y)Z, T \rangle + \langle R(X, Y)T, Z \rangle = 0$,
- d) $\langle R(X, Y)Z, T \rangle = \langle R(Z, T)X, Y \rangle$.

Démonstration. La première propriété est évidente si on regarde la définition de R . La seconde se calcule :

$$\begin{aligned} & R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y \\ &= Y \vdash X \vdash Z - X \vdash Y \vdash Z + [X, Y] \vdash Z + Z \vdash Y \vdash X \\ &\quad - Y \vdash Z \vdash X + [Y, Z] \vdash X + X \vdash Z \vdash Y - Z \vdash X \vdash Y + [Z, X] \vdash Y \\ &= Y \vdash [X, Z] + X \vdash [Z, Y] + Z \vdash [Y, X] + [Z, X] \vdash Y + [Y, Z] \vdash X + [X, Y] \vdash Z \\ &= [Y, [X, Z]] + [X, [Z, Y]] + [Z, [Y, X]] = 0, \end{aligned}$$

par l'identité de Jacobi. La troisième propriété est équivalente à

$$\langle R(X, Y)Z, Z \rangle = 0$$

et se prouve aussi en calculant :

$$\begin{aligned} \langle R(X, Y)Z, Z \rangle &= \langle Y \vdash X \vdash Z - X \vdash Y \vdash Z + [X, Y] \vdash Z, Z \rangle \\ &= \langle Y \vdash X \vdash Z, Z \rangle - \langle X \vdash Y \vdash Z, Z \rangle + \langle [X, Y] \vdash Z, Z \rangle \\ &= Y \langle X \vdash Z, Z \rangle - \langle X \vdash Z, Y \vdash Z \rangle \\ &\quad - X \langle Y \vdash Z, Z \rangle + \langle Y \vdash Z, X \vdash Z \rangle \\ &\quad + \frac{1}{2}[X, Y] \langle Z, Z \rangle \\ &= \frac{1}{2}YX \langle Z, Z \rangle - \frac{1}{2}XY \langle Z, Z \rangle + \frac{1}{2}[X, Y] \langle Z, Z \rangle \\ &= \frac{1}{2}[Y, X] \langle Z, Z \rangle + \frac{1}{2}[X, Y] \langle Z, Z \rangle = 0. \end{aligned}$$

Enfin, la dernière propriété se prouve à l'aide de l'identité de Bianchi appliquée à

$$\langle R(X, Y)Z, T \rangle, \quad \langle R(Y, Z)T, X \rangle, \quad \langle R(Z, T)X, Y \rangle, \quad \langle R(T, X)Y, Z \rangle.$$

Dès lors, grâce aux première et troisième propriétés

$$\begin{aligned} & \langle R(X, Y)Z, T \rangle + \langle R(Y, Z)X, T \rangle + \langle R(Z, X)Y, T \rangle \\ & \langle R(Y, Z)T, X \rangle + \langle R(Z, T)Y, X \rangle + \langle R(T, Y)Z, X \rangle \\ & - \langle R(Z, T)X, Y \rangle - \langle R(T, X)Z, Y \rangle - \langle R(X, Z)T, Y \rangle \\ & - \langle R(T, X)Y, Z \rangle - \langle R(X, Y)T, Z \rangle - \langle R(Y, T)X, Z \rangle = 0, \end{aligned}$$

on obtient

$$\langle R(X, Y)Z, T \rangle - \langle R(Z, T)X, Y \rangle - \langle R(Z, T)X, Y \rangle + \langle R(X, Y)Z, T \rangle = 0,$$

ce qui prouve que

$$\langle R(X, Y)Z, T \rangle = \langle R(Z, T)X, Y \rangle.$$

■

Si on pose $R_{mijk} = \langle R(\partial_m, \partial_i)\partial_j, \partial_k \rangle$, on peut vérifier que les deux définitions coïncident moyennant quelques formules préalablement établies.

Lorsque l'on travaille sur une variété, il est possible de définir en chaque point de cette variété une métrique notée (g_{ij}) . C'est une matrice symétrique dans laquelle sont repris les produits scalaires $\langle \partial_i, \partial_j \rangle$ et donc $g_{ij} = \langle \partial_i, \partial_j \rangle$.

C'est à partir de cette métrique que peuvent être définis les symboles de Christoffel de première espèce :

$$\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2}(\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ki} - \partial_k g_{ij}),$$

qui représentent les coordonnées covariantes du vecteur $\partial_i \partial_j$ dans la base ∂_k . Les symboles de Christoffel de seconde espèce Γ_{ij}^k représentent les coordonnées contravariantes du vecteur $\partial_i \partial_j$ dans la base ∂_k et peuvent être calculés grâce à cette formule :

$$\Gamma_{ij}^k = \sum_{\alpha} g^{\alpha k} \Gamma_{ij\alpha}.$$

De là, on peut constater que

$$\partial_i g_{jk} = \Gamma_{ijk} + \Gamma_{ikj} = \Gamma_{ijk} + \Gamma_{kij},$$

$$\partial_j g_{ki} = \Gamma_{jki} + \Gamma_{jik} = \Gamma_{kji} + \Gamma_{ijk}.$$

Enfin, par la règle de dérivation d'un produit de fonction,

$$\begin{aligned} g_{i\alpha} \partial_j \Gamma_{km}^{\alpha} &= \partial_j (g_{i\alpha} \Gamma_{km}^{\alpha}) - \Gamma_{km}^{\alpha} \partial_j g_{i\alpha} \\ &= \partial_j (g_{i\alpha} \Gamma_{km}^{\alpha}) - \Gamma_{km}^{\alpha} (\Gamma_{jia} + \Gamma_{ja i}), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} g_{i\alpha} \partial_k \Gamma_{kj}^\alpha &= \partial_k (g_{i\alpha} \Gamma_{jm}^\alpha) - \Gamma_{jm}^\alpha \partial_k g_{i\alpha} \\ &= \partial_k (g_{i\alpha} \Gamma_{jm}^\alpha) - \Gamma_{jm}^\alpha (\Gamma_{ki\alpha} + \Gamma_{k\alpha i}). \end{aligned}$$

Pour notre définition du tenseur R , nous sommes en mesure de calculer ce qu'il vaut, en termes des symboles de Christoffel, lorsqu'il agit sur les vecteurs de bases ∂_j , ∂_k et ∂_m .

$$\begin{aligned} R(\partial_j, \partial_k) \partial_m &= -\partial_j \vdash \sum_\alpha \Gamma_{km}^\alpha \partial_\alpha + \partial_k \vdash \sum_\alpha \Gamma_{jm}^\alpha \partial_\alpha \\ &= \sum_\alpha (-\partial_j \Gamma_{km}^\alpha \partial_\alpha - \Gamma_{km}^\alpha (\partial_j \vdash \partial_\alpha) + \partial_k \Gamma_{jm}^\alpha \partial_\alpha - \Gamma_{jm}^\alpha (\partial_k \vdash \partial_\alpha)) \\ &= \sum_\alpha (-\partial_j \Gamma_{km}^\alpha \partial_\alpha + \partial_k \Gamma_{jm}^\alpha \partial_\alpha) \\ &\quad + \sum_\beta \left(\Gamma_{jm}^\beta \sum_\gamma \Gamma_{k\beta}^\gamma \partial_\gamma - \Gamma_{km}^\beta \sum_\gamma \Gamma_{j\beta}^\gamma \partial_\gamma \right) \\ &= \sum_\alpha \left(-\partial_j \Gamma_{km}^\alpha + \partial_k \Gamma_{jm}^\alpha + \sum_\beta \left(\Gamma_{jm}^\beta \Gamma_{k\beta}^\alpha - \Gamma_{km}^\beta \Gamma_{j\beta}^\alpha \right) \right) \partial_\alpha \end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} R_{jkmi} &= \langle R(\partial_j, \partial_k) \partial_m, \partial_i \rangle \\ &= \sum_\alpha \left(-\partial_j \Gamma_{km}^\alpha + \partial_k \Gamma_{jm}^\alpha + \sum_\beta (\Gamma_{jm}^\beta \Gamma_{k\beta}^\alpha - \Gamma_{km}^\beta \Gamma_{j\beta}^\alpha) \right) g_{i\alpha} \\ &= \sum_\alpha (-\partial_j (g_{i\alpha} \Gamma_{km}^\alpha) + \Gamma_{km}^\alpha (\Gamma_{ij\alpha} + \Gamma_{j\alpha i}) + \partial_k (g_{i\alpha} \Gamma_{jm}^\alpha) - \Gamma_{jm}^\alpha (\Gamma_{ik\alpha} + \Gamma_{k\alpha i}) \\ &\quad + \sum_\beta (\Gamma_{jm}^\beta g_{i\alpha} \Gamma_{k\beta}^\alpha - \Gamma_{km}^\beta g_{i\alpha} \Gamma_{j\beta}^\alpha)) \\ &= (-\partial_j \Gamma_{kmi} + \partial_k \Gamma_{jmi} + \sum_\alpha (\Gamma_{km}^\alpha \Gamma_{ij\alpha} + \Gamma_{km}^\alpha \Gamma_{j\alpha i} - \Gamma_{jm}^\alpha \Gamma_{ik\alpha} - \Gamma_{jm}^\alpha \Gamma_{k\alpha i}) \\ &\quad + \sum_\beta (\Gamma_{jm}^\beta \Gamma_{k\beta i} - \Gamma_{km}^\beta \Gamma_{j\beta i})) \\ &= (-\partial_j \Gamma_{kmi} + \partial_k \Gamma_{jmi} + \sum_\alpha (\Gamma_{km}^\alpha \Gamma_{ij\alpha} + \Gamma_{km}^\alpha \Gamma_{j\alpha i} - \Gamma_{jm}^\alpha \Gamma_{ik\alpha} - \Gamma_{jm}^\alpha \Gamma_{k\alpha i}) \\ &\quad + \sum_\alpha (\Gamma_{jm}^\alpha \Gamma_{k\alpha i} - \Gamma_{km}^\alpha \Gamma_{j\alpha i})) \\ &= (-\partial_j \Gamma_{kmi} + \partial_k \Gamma_{jmi} + \sum_\alpha (\Gamma_{km}^\alpha \Gamma_{ij\alpha} - \Gamma_{jm}^\alpha \Gamma_{ik\alpha})), \end{aligned}$$

et comme on sait par la troisième propriété du Lemme 15 que $R_{jkmi} = R_{mijk}$, il suffit de permuter convenablement les indices pour vérifier que c'est bien la même formule qu'en début de section et que donc, nous parlions du même tenseur de courbure R .

Chapitre 4

Le calcul des variations appliqué aux géodésiques

Dans ce chapitre, on s'intéresse aux propriétés et résultats importants traitant des géodésiques. Grâce au calcul des variations appliqué à celles-ci, nous serons amenés à tirer des conclusions agréables sur les chemins les plus courts tracés sur une variété, on verra qu'ils sont en fait intimement liés aux notions de géodésiques et bien plus encore. Tout ceci s'inscrit dans le cadre de l'étude d'un espace particulier : l'espace des chemins.

4.1 L'espace des chemins d'une variété lisse

Soit M une variété lisse et p, q deux points (pas nécessairement distincts) de M .

Définition 36. *Un chemin lisse par morceaux de p à q est une application $\omega : [0, 1] \rightarrow M$ telle que :*

- a) *il existe une subdivision $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = 1$ de $[0, 1]$ telle que chaque morceau $\omega|_{[t_{i-1}, t_i]}$ soit lisse,*
- b) $\omega(0) = p$ et $\omega(1) = q$.

L'ensemble de tous les chemins lisses par morceaux de p à q dans M sera noté $\Omega(M, p, q)$, $\Omega(M)$ ou simplement Ω .

On peut penser à Ω comme à une variété de dimension infinie, dont tous les points sont des chemins lisses par morceaux ω de p à q . Nous pouvons alors définir un "plan tangent en un point ω " de la variété Ω .

Définition 37. *Le plan tangent de Ω en un point ω est l'espace vectoriel constitué de tous les champs de vecteurs lisses par morceaux W le long de ω pour lesquels $W(0) = 0$ et $W(1) = 0$. Nous désignons par $T_\omega\Omega$ cet espace vectoriel.*

Maintenant que l'on a défini un espace tangent à Ω en un point ω on va définir une application $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ et observer ce que l'application induite d'espace tangent

$$F_* : T_\omega\Omega \rightarrow T_{F(\omega)}\mathbb{R}$$

signifie.

Lorsque F est une fonction lisse sur une variété lisse M , on peut définir $F_*; T_p M \rightarrow T_{f(p)} \mathbb{R}$ de la manière suivante. Étant donné un vecteur $X \in T_p M$, on choisit un chemin lisse $u \mapsto \alpha(u)$ dans M , qui est défini pour $-\varepsilon < u < \varepsilon$, tel que

$$\alpha(0) = p, \quad \frac{d\alpha}{du}(0) = X.$$

On voit ensuite que $F_*(X)$ est égal à $\frac{dF(\alpha(u))}{du} \Big|_{u=0}$ multiplié par le vecteur de base $\left(\frac{d}{dt}\right)_{F(p)}$.
 Introduisons à présent le concept suivant.

Définition 38. Une variation de ω (gardant les extrémités fixes) est une fonction

$$\bar{\alpha} : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \Omega,$$

pour un certain $\varepsilon > 0$, tel que

a) $\bar{\alpha}(0) = \omega$

b) il existe une subdivision $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = 1$ de $[0, 1]$ telle que l'application

$$\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [0, 1] \rightarrow M$$

définie par $\alpha(u, t) = \bar{\alpha}(u)(t)$ est lisse sur chaque bande $(-\varepsilon, \varepsilon) \times [t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, \dots, k$.

Puisque chaque $\bar{\alpha}(u)$ appartient à $\Omega(M, p, q)$, on voit que :

c) $\alpha(u, 0) = p, \quad \alpha(u, 1) = q$ pour tout $u \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Plus généralement, dans ce qui précède, si $(-\varepsilon, \varepsilon)$ est remplacé par un voisinage U de 0 dans \mathbb{R}^n , alors α (ou $\bar{\alpha}$) est appelé une variation à n paramètres de ω .

Nous utiliserons aussi bien $\bar{\alpha}$ que α pour parler de la variation.

Maintenant $\bar{\alpha}$ peut être considéré comme un "chemin lisse" dans Ω . Son "vecteur vitesse" $\frac{d\bar{\alpha}}{du}(0) \in T_\omega \Omega$ est défini comme étant le champ de vecteurs W le long de ω donné par

$$W_t = \frac{d\bar{\alpha}}{du}(0)_t = \frac{\partial \alpha}{\partial u}(0, t).$$

On voit que $W \in T_\omega \Omega$. Ce champ de vecteurs W est aussi appelé le *champ de vecteurs variation* associé à la variation $\bar{\alpha}$.

Pour n'importe quel $W \in T_\omega \Omega$, on voit qu'il existe une variation $\bar{\alpha} : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \Omega$ qui satisfait les conditions $\bar{\alpha}(0) = \omega$ et $\frac{d\bar{\alpha}}{du}(0) = W$. En fait, on peut poser

$$\bar{\alpha}(u)(t) = \exp_{\omega(t)}(uW_t).$$

On peut maintenant définir, si F est une fonction à valeurs réelles sur Ω , l'application induite d'espace tangent

$$F_* : T_\omega \Omega \rightarrow T_{F(\omega)} \mathbb{R}.$$

Étant donné $W \in T_\omega\Omega$, on peut choisir une variation $\bar{\alpha} : (-\varepsilon; \varepsilon) \rightarrow \Omega$ avec

$$\bar{\alpha}(0) = \omega, \quad \frac{d\bar{\alpha}}{du}(0) = W$$

et poser $F_*(W)$ égal à $\frac{dF(\bar{\alpha}(u))}{du}\big|_{u=0}$ multiplié par le vecteur tangent $\left(\frac{d}{dt}\right)_{F(\omega)}$. Nous ne nous pencherons pas sur la question des conditions devant être satisfaites par F pour que la dérivée existe ou qu'elle soit indépendante de $\bar{\alpha}$. Nous définissons simplement F_* de manière analogue au cas d'applications induites d'espaces tangents lorsque l'on travaille avec des variétés riemanniennes de dimension finie afin de motiver la définition suivante.

Définition 39. *Un chemin ω est un chemin critique pour une fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ si et seulement si $\frac{dF(\bar{\alpha}(u))}{du}\big|_{u=0}$ vaut zéro pour toute variation $\bar{\alpha}$ de ω .*

Un exemple simple est celui où F est minimum en un chemin ω_0 avec toutes ses dérivées $\frac{dF(\bar{\alpha}(u))}{du}$ définies, faisant de ω_0 un chemin critique. Un tel type de fonction F est présenté dans la section suivante.

4.2 L'énergie d'un chemin

Supposons comme toujours que M est une variété riemannienne. La longueur d'un vecteur $v \in T_pM$ sera notée $\|v\| = \langle v, v \rangle^{1/2}$.

Définition 40. *Pour $\omega \in \Omega$, on définit l'énergie de ω de a à b où $0 \leq a < b \leq 1$ par la fonction*

$$E_a^b(\omega) = \int_a^b \left\| \frac{d\omega}{dt} \right\|^2 dt,$$

et on écrit E pour E_0^1 .

On peut comparer cette nouvelle définition à celle de la longueur d'arc de a à b donné par la fonction

$$L_a^b(\omega) = \int_a^b \left\| \frac{d\omega}{dt} \right\| dt$$

de la manière suivante.

Si $1 < p < \infty$, $f \in \mathcal{L}^p(U)$ et $g \in \mathcal{L}^{p'}(U)$, c'est-à-dire si

$$\|f\|_p = \left(\int_U |f|^p \right)^{1/p} < \infty, \quad \text{et} \quad \|g\|_{p'} = \left(\int_U |g|^{p'} \right)^{1/p'} < \infty,$$

alors l'Inégalité de Hölder

$$\int_U |fg| \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}$$

est vraie à condition que $U \subset \mathbb{R}^n$ soit un ouvert et $1 = 1/p + 1/p'$. Appliquant cette inégalité au cas $f(t) = 1$, $g(t) = \left\| \frac{d\omega}{dt} \right\|$, $p = p' = 2$ et en élevant les deux membres au carré, nous obtenons

$$\left(\int_a^b \left\| \frac{d\omega}{dt} \right\| dt \right)^2 \leq \left(\int_a^b 1 dt \right) \left(\int_a^b \left\| \frac{d\omega}{dt} \right\|^2 dt \right),$$

ce qui donne

$$(L_a^b)^2 \leq (b-a)E_a^b,$$

avec l'égalité si et seulement si g est constante, c'est-à-dire si et seulement si le paramètre t est proportionnel à la longueur d'arc.

Supposons qu'il existe une géodésique minimale γ de $p = \omega(0)$ à $q = \omega(1)$. Alors, de manière générale,

$$E(\gamma) = L(\gamma)^2 \leq L(\omega)^2 \leq E(\omega).$$

Si ω est aussi une géodésique minimale, éventuellement reparamétrisée alors $L(\gamma)^2 = L(\omega)^2$. D'autre part si le paramètre est proportionnel à la longueur d'arc le long de ω alors $L(\omega)^2 = E(\omega)$. Ceci prouve que $E(\gamma) < E(\omega)$ à moins que ω soit aussi une géodésique minimale. En d'autres mots :

Lemme 16. *Soit M une variété riemannienne complète et soient $p, q \in M$ séparés d'une distance d . Alors la fonction énergie*

$$E : \Omega(M, p, q) \rightarrow \mathbb{R}$$

a son minimum d^2 précisément sur l'ensemble des géodésiques minimales de p à q .

Nous allons voir maintenant quels chemins $\omega \in \Omega$ sont des chemins critiques pour la fonction énergie E . Soit $\bar{\alpha} : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \Omega$ une variation de ω , et soit $W_t = \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial u}(0, t)$ le champ de vecteurs variation associé. Soient encore :

$$\begin{aligned} V_t &= \frac{d\omega}{dt} &&= \text{le vecteur vitesse de } \omega, \\ A_t &= \frac{D}{dt} \frac{d\omega}{dt} &&= \text{le vecteur accélération de } \omega, \\ \Delta_t V &= V_{t+} - V_{t-} &&= \text{la discontinuité du vecteur vitesse en } t, \\ &&&\text{avec } 0 < t < 1. \end{aligned}$$

Bien sûr $\Delta_t V \neq 0$ pour un nombre fini de valeurs de t .

Théorème 8 (Première formule de variation).

$$\frac{1}{2} \frac{dE(\bar{\alpha}(u))}{du} \Big|_{u=0} = - \sum_t \langle W_t, \Delta_t V \rangle - \int_0^1 \langle W_t, A_t \rangle dt.$$

Démonstration. D'après le Lemme 7, nous avons

$$\frac{\partial}{\partial u} \left\langle \frac{\partial \alpha}{\partial t}, \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right\rangle = 2 \left\langle \frac{D}{\partial u} \frac{\partial \alpha}{\partial t}, \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right\rangle.$$

D'où

$$\frac{dE(\bar{\alpha}(u))}{du} = \frac{d}{du} \int_0^1 \left\langle \frac{\partial \alpha}{\partial t}, \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right\rangle dt = 2 \int_0^1 \left\langle \frac{D}{\partial u} \frac{\partial \alpha}{\partial t}, \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right\rangle dt.$$

Comme la connexion est symétrique on sait que $\frac{D}{\partial t} \frac{\partial \alpha}{\partial u} = \frac{D}{\partial u} \frac{\partial \alpha}{\partial t}$. On peut alors échanger $\frac{D}{\partial t} \frac{\partial \alpha}{\partial u}$ par $\frac{D}{\partial u} \frac{\partial \alpha}{\partial t}$ dans la formule ci-dessus.

Choisissons une subdivision $0 < t_0 < t_1 < \dots < t_k = 1$ telle que α soit dérivable sur chaque bande $(-\varepsilon, \varepsilon) \times [t_{i-1}, t_i]$. On peut alors intégrer par partie sur $[t_{i-1}, t_i]$ comme suit. L'identité

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\langle \frac{\partial \alpha}{\partial u}, \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right\rangle = \left\langle \frac{D \partial \alpha}{\partial t \partial u}, \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right\rangle + \frac{\partial \alpha}{\partial u}, \left\langle \frac{D \partial \alpha}{\partial t \partial t} \right\rangle$$

implique que

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} \left\langle \frac{D \partial \alpha}{\partial t \partial u}, \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right\rangle dt = \left[\left\langle \frac{\partial \alpha}{\partial u}, \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right\rangle \right]_{t=t_{i-1}+}^{t=t_i-} - \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{\partial \alpha}{\partial u}, \left\langle \frac{D \partial \alpha}{\partial t \partial t} \right\rangle dt.$$

En ajoutant les formules correspondantes pour $i = 1, \dots, k$ et en utilisant le fait que $\frac{\partial \alpha}{\partial u} = 0$ pour $t = 0$ ou 1 , cela donne

$$\frac{1}{2} \frac{dE(\bar{\alpha}(u))}{du} = - \sum_{i=1}^{k-1} \left\langle \frac{\partial \alpha}{\partial u}, \Delta_{t_i} \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right\rangle - \int_0^1 \left\langle \frac{\partial \alpha}{\partial u}, \frac{D \partial \alpha}{\partial t \partial t} \right\rangle dt.$$

En posant $u = 0$, on obtient la formule désirée

$$\frac{1}{2} \frac{dE \circ \bar{\alpha}}{du}(0) = - \sum_t \langle W, \Delta_t V \rangle - \int_0^1 \langle W, A \rangle dt,$$

et la preuve est complète. ■

Intuitivement, le premier terme de l'expression pour $\frac{dE \circ \bar{\alpha}}{du}(0)$ montre qu'en faisant varier le chemin ω dans une direction qui ferait décroître l'angle $\Delta_t V$ formé entre deux vecteurs vitesses, tend à faire décroître E . Le second terme montre que faire varier la courbe dans la direction du vecteur accélération $\frac{D \, d\omega}{dt \, dt}$ tend à réduire E .

Rappelons-nous que le chemin $\omega \in \Omega$ est appelé *géodésique* si et seulement si ω est lisse sur tout l'intervalle $[0, 1]$, et le vecteur accélération $\frac{D \, d\omega}{dt \, dt}$ de ω est identiquement nul le long de ω .

Corollaire 6. *Le chemin ω est un point critique de la fonction E si et seulement si ω est une géodésique.*

Démonstration. Une géodésique est clairement un point critique. Si ω est un point critique alors il y a une variation de ω avec $W(t) = f(t)A(t)$ où $f(t)$ est positive excepté en les t_i où elle s'annule telle que

$$\frac{1}{2} \frac{dE}{du}(0) = - \int_0^1 f(t) \langle A(t), A(t) \rangle dt.$$

L'intégrale est nulle si et seulement si $A(t) = 0$ pour tout t . D'où, chaque $\omega|_{[t_i, t_{i+1}]}$ est une géodésique.

Choisissons à présent une variation telle que $W(t_i) = \Delta_{t_i} V$. Alors

$$\frac{1}{2} \frac{dE}{du}(0) = - \sum \langle \Delta_{t_i} V, \Delta_{t_i} V \rangle.$$

Si ça vaut zéro alors tous les $\Delta_{t_i} V$ valent 0, et ω est dérivable de classe C^1 même en les points $\omega(t_i)$. Il s'ensuit par le Théorème d'Unicité des équations différentielles que ω est lisse partout et que donc, c'est une géodésique. ■

4.3 Le Hessian de la fonction énergie en un chemin critique

Nous voudrions définir une fonctionnelle bilinéaire

$$E_{**} : T_\gamma \Omega \times T_\gamma \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

lorsque γ est un point critique de notre fonction E , c'est-à-dire une géodésique. On appellera cette fonctionnelle bilinéaire le Hessian de E en γ .

Observons la construction d'une fonctionnelle bilinéaire avec une fonction f à valeurs réelles sur une variété M . Si $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ a p comme point critique, alors le Hessian

$$f_{**} : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$$

peut être défini de la manière suivante. Étant donnés $X_1, X_2 \in T_p M$, on choisit une application lisse $(u_1, u_2) \mapsto \alpha(u_1, u_2)$ définie sur un voisinage de $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$, à valeurs dans M , telle que

$$\alpha(0, 0) = p, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial u_1}(0, 0) = X_1, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial u_2}(0, 0) = X_2.$$

Alors

$$f_{**}(X_1, X_2) = \frac{\partial^2 f(\alpha(u_1, u_2))}{\partial u_1 \partial u_2} \Big|_{(0,0)}.$$

Ceci nous donne une idée pour la définition de E . Étant donnés deux champs de vecteurs $W_1, W_2 \in T_\gamma \Omega$, on choisit une variation à 2 paramètres

$$\alpha : U \times [0, 1] \rightarrow M,$$

où U est un voisinage de $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$, tel que

$$\alpha(0, 0, t) = \gamma(t), \quad \frac{\partial \alpha}{\partial u_1}(0, 0, t) = W_1(t), \quad \frac{\partial \alpha}{\partial u_2}(0, 0, t) = W_2(t).$$

Alors le Hessian $E_{**}(W_1, W_2)$ est défini par

$$\frac{\partial^2 E(\bar{\alpha}(u_1, u_2))}{\partial u_1 \partial u_2} \Big|_{(0,0)},$$

où $\bar{\alpha}(u_1, u_2) \in \Omega$ est en fait le chemin $\bar{\alpha}(u_1, u_2)(t) = \alpha(u_1, u_2, t)$. Cette dérivée seconde sera notée $\frac{\partial^2 E}{\partial u_1 \partial u_2}(0, 0)$.

Théorème 9 (Seconde formule de variation). Soit $\bar{\alpha} : U \rightarrow \Omega$ une variation à 2 paramètres de la géodésique γ avec comme champs de vecteurs variation

$$W_i = \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial u_i}(0, 0) \in T_\gamma \Omega, \quad i = 1, 2.$$

Alors

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 E}{\partial u_1 \partial u_2}(0, 0) = - \sum_t \left\langle W_2(t), \Delta_t \frac{DW_1}{dt} \right\rangle - \int_0^1 \left\langle W_2, \frac{D^2 W_1}{dt^2} + R(V, W_1) \right\rangle dt,$$

où $V = \frac{d\gamma}{dt}$ est le vecteur vitesse et où

$$\Delta_t \frac{DW_1}{dt} = \frac{DW_1}{dt}(t^+) - \frac{DW_1}{dt}(t^-)$$

représente le saut de $\frac{DW_1}{dt}$ dans un de ses points de discontinuité dans $(0, 1)$, le nombre de ces points étant bien sûr fini.

Démonstration. La Première formule de variation nous apprend que

$$\frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial u_2} = - \sum_t \left\langle \frac{\partial \alpha}{\partial u_2}, \Delta_t \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right\rangle - \int_0^1 \left\langle \frac{\partial \alpha}{\partial u_2}, \frac{D}{dt} \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right\rangle dt.$$

D'où

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 E}{\partial u_1 \partial u_2} &= - \sum_t \left\langle \frac{D}{\partial u_1} \frac{\partial \alpha}{\partial u_2}, \Delta_t \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right\rangle - \sum_t \left\langle \frac{\partial \alpha}{\partial u_2}, \frac{D}{\partial u_1} \Delta_t \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right\rangle \\ &\quad - \int_0^1 \left\langle \frac{D}{\partial u_1} \frac{\partial \alpha}{\partial u_2}, \frac{D}{dt} \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right\rangle dt - \int_0^1 \left\langle \frac{\partial \alpha}{\partial u_2}, \frac{D}{\partial u_1} \frac{D}{dt} \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right\rangle dt. \end{aligned}$$

Regardons l'expression en $(u_1, u_2) = (0, 0)$. Puisque $\gamma = \bar{\alpha}(0, 0)$ est une géodésique (non-brisée), nous avons

$$\Delta_t \frac{\partial \alpha}{\partial t} = 0, \quad \frac{D}{dt} \frac{\partial \alpha}{\partial t} = 0,$$

et donc les premier et troisième termes sont nuls. Les second et quatrième termes quant à eux, valent respectivement

$$- \sum \left\langle W_2, \Delta_t \frac{D}{dt} W_1 \right\rangle, \quad \text{et} \quad - \int_0^1 \left\langle W_2, \frac{D}{\partial u_1} \frac{d}{dt} V \right\rangle dt.$$

D'après la formule de courbure

$$\frac{D}{\partial u_1} \frac{D}{dt} V - \frac{D}{dt} \frac{D}{\partial u_1} V = R \left(\frac{\partial \alpha}{\partial t}, \frac{\partial \alpha}{\partial u_1} \right) V = R(V, W_1)V.$$

De plus, comme $\frac{D}{\partial u_1} V = \frac{D}{dt} \frac{\partial \alpha}{\partial u_1} = \frac{D}{dt} W_1$, on voit que

$$\frac{D}{\partial u_1} \frac{D}{dt} V = \frac{D^2 W_1}{dt^2} + R(V, W_1)V.$$

Alors, dans le quatrième terme, on peut échanger les deux opérateurs $\frac{D}{\partial u_1}$ et $\frac{D}{\partial t}$ afin d'obtenir

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 E}{\partial u_1 \partial u_2}(0, 0) = - \sum_t \left\langle W_2(t), \Delta_t \frac{DW_1}{dt} \right\rangle - \int_0^1 \left\langle W_2, \frac{D^2 W_1}{dt^2} + R(V, W_1) \right\rangle dt,$$

et la preuve est complète. ■

Ce Théorème nous permet d'affirmer que cette fonctionnelle E_{**} est bien définie. Le corollaire suivant le prouve.

Corollaire 7. *L'expression*

$$E_{**}(W_1, W_2) = \frac{\partial^2 E}{\partial u_1 \partial u_2}(0, 0)$$

est bien définie, symétrique et est une fonction bilinéaire de W_1 et W_2 .

Démonstration. La *Seconde formule de variation* montre que $\frac{\partial^2 E}{\partial u_1 \partial u_2}(0, 0)$ dépend seulement des champs de vecteurs variation W_1 et W_2 et donc $E_{**}(W_1, W_2)$ est bien définie. Cette formule montre aussi que E_{**} est bilinéaire. Quant à la propriété de symétrie $E_{**}(W_1, W_2) = E_{**}(W_2, W_1)$, elle est assurée par le fait que $\frac{\partial^2 E}{\partial u_1 \partial u_2} = \frac{\partial^2 E}{\partial u_2 \partial u_1}$. ■

Remarque 5. *Les termes diagonaux $E_{**}(W, W)$ de la fonctionnelle bilinéaire E_{**} peuvent être décrits en termes de variation à 1 paramètre de γ .*

En fait,

$$E_{**}(W, W) = \frac{d^2 E \circ \bar{\alpha}}{du^2}(0),$$

où $\bar{\alpha} : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \Omega$ est une variation quelconque de γ ayant pour champ de vecteurs variation $\frac{d\bar{\alpha}}{du}(0)$ égal à W . Pour prouver cela il est nécessaire d'introduire la variation à 2 paramètres

$$\bar{\beta}(u_1, u_2) = \bar{\alpha}(u_1 + u_2)$$

et de remarquer que

$$\frac{\partial \bar{\beta}}{\partial u_i} = \frac{d\bar{\alpha}}{du}, \quad \frac{\partial^2 E \circ \bar{\beta}}{\partial u_1 \partial u_2} = \frac{d^2 E \circ \bar{\alpha}}{du^2}.$$

On obtient alors un résultat intéressant.

Lemme 17. *Si γ est une géodésique minimale de p à q alors la fonctionnelle bilinéaire E_{**} est semi-définie positive. En d'autres termes, l'indice λ de E_{**} est zéro.*

Démonstration. L'inégalité

$$E(\bar{\alpha}(u)) \geq E(\gamma) = E(\bar{\alpha}(0))$$

implique que

$$\frac{d^2 E(\bar{\alpha}(u))}{du^2} \Big|_{u=0} \geq 0.$$

D'où $E_{**}(W, W) \geq 0$ pour tout W . ■

4.4 Champs de Jacobi

Définition 41. *Un champ de vecteurs J le long d'une géodésique γ est appelé un champ de Jacobi s'il satisfait l'équation différentielle de Jacobi*

$$\frac{D^2 J}{dt^2} + R(V, J)V = 0$$

où $V = \frac{d\gamma}{dt}$.

C'est une équation linéaire du second ordre, elle a donc $2n$ solutions linéairement indépendantes le long de γ et elles sont toutes lisses. Si on choisit une famille P_1, \dots, P_n de champs de vecteurs orthonormaux parallèles le long de γ , alors on peut exprimer ce système d'équations différentielles de manière plus familière. En posant $J(t) = \sum f^i(t)P_i(t)$, les équations deviennent

$$\frac{d^2 f^i}{dt^2} + \sum_{j=1}^n a_j^i(t)f^j(t) = 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

où $a_j^i = \langle R(V, P_j)V, P_i \rangle$. Un tel champ de vecteurs J est totalement déterminé par ses conditions initiales

$$J(0), \frac{DJ}{dt}(0) \in T_{\gamma(0)}M.$$

Soient $p = \gamma(a)$ et $q = \gamma(b)$ deux points distincts sur la géodésique γ .

Définition 42. *On dit que p et q sont conjugués le long de γ s'il existe un champ de Jacobi non-nul J le long de γ qui s'annule en $t = a$ et en $t = b$. La multiplicité de p et q en tant que points conjugués est égal à la dimension de l'espace vectoriel constitué de tels champs de Jacobi.*

Considérons présentement une géodésique $\gamma \in \Omega = \Omega(M, p, q)$.

Définition 43. *L'espace des zéros de notre fonctionnelle bilinéaire E_{**} , le Hessien de E*

$$E_{**} : T_\gamma\Omega \times T_\gamma\Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

*est l'espace vectoriel constitué de tous les champs de vecteurs $W_1 \in T_\gamma\Omega$ tel que $E_{**}(W_1, W_2) = 0$ pour tous W_2 . La nullité ν de E_{**} est égale à la dimension de cet espace des zéros. On dit que E_{**} est dégénéré si $\nu \neq 0$.*

Théorème 10. *Un champ de vecteurs $W_1 \in T_\gamma\Omega$ appartient à l'espace des zéros de E_{**} si et seulement si W_1 est un champ de Jacobi. D'où, E_{**} est dégénéré si et seulement si les extrémités p et q de γ sont conjugués le long de γ . La nullité de E_{**} est égale à la multiplicité de p et q en tant que points conjugués.*

Démonstration. Si J est un champ de Jacobi qui s'annule en p et q , alors J est clairement dans $T_\gamma\Omega$. La *seconde formule de variation* nous dit que

$$-\frac{1}{2}E_{**}(J, W_2) = \sum \langle W_2(t), 0 \rangle = \int_0^1 \langle W_2, 0 \rangle dt = 0,$$

pour n'importe quel W_2 . De là, on voit que J appartient à l'espace des zéros.

Inversément, supposons que W_1 appartienne à l'espace des zéros de E_{**} . Choisissons une subdivision $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = 1$ de $[0, 1]$ telle que $W_1|_{[t_{i-1}, t_i]}$ soit lisse pour tout i . Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ une fonction lisse qui s'annule en les t_0, t_1, \dots, t_k et qui est positive ailleurs. Soit également

$$W_2(t) = f(t) \left(\frac{D^2 W_1}{dt^2} + R(V, W_1)V \right)_t.$$

Alors

$$-\frac{1}{2}E_{**}(W_1, W_2) = \sum 0 + \int_0^1 f(t) \left\| \frac{D^2 W_1}{dt^2} + R(V, W_1)V \right\|^2 dt = 0$$

car W_1 est dans l'espace des zéros. Il s'ensuit que les $W_1|_{[t_{i-1}, t_i]}$ sont des champs de Jacobi pour tout i . Maintenant soit $W'_2 \in T_\gamma\Omega$ un champ de vecteurs tel que $W'_2(t_i) = \Delta_{t_i} \frac{DW_1}{dt}$ pour $i = 1, 2, \dots, k-1$. Alors

$$-\frac{1}{2}E_{**}(W_1, W_2) = \sum_{i=1}^{k-1} \left\| \Delta_{t_i} \frac{DW_1}{dt} \right\|^2 + \int_0^1 0 dt = 0.$$

D'où, $\frac{DW_1}{dt}$ n'a pas de discontinuités. Mais on sait qu'une solution des équations de Jacobi est entièrement déterminée par les vecteurs $W_1(t_i)$ et $\frac{DW_1}{dt}(t_i)$. Comme les k champs de Jacobi $W_1|_{[t_{i-1}, t_i]}$, $i = 1, \dots, k$ sont tous lisses, ils peuvent être juxtaposés pour former un champ de Jacobi W_1 qui est lisse le long de tout l'intervalle $[0, 1]$, et la preuve est complète. ■

Ce théorème nous enseigne également que la nullité ν de E_{**} est toujours un nombre fini et donc il n'y a qu'un nombre fini de champs de Jacobi linéairement indépendants le long de γ .

Remarque 6. *En fait, en ce qui concerne la nullité, elle satisfait l'inégalité $0 \leq \nu < n$ car l'espace vectoriel des champs de Jacobi qui s'annule seulement en $t = 0$ sur une variété de dimension n , a une dimension égale à n . Dès lors, $\nu \leq n$. Mais en réalité, si on construit un exemple de champ de Jacobi qui s'annule en $t = 0$ mais pas en $t = 1$, il n'y aura pas de points conjugués le long de cette géodésique et donc pas de champ de Jacobi appartenant à l'espace des zéros dans la direction de cette géodésique. On aura donc $\nu < n$. Soit $J_t = tV_t$ où $V = \frac{d\gamma}{dt}$ est le champ de vecteurs vitesse. Alors*

$$\frac{DJ}{dt} = 1 \cdot V + t \frac{DV}{dt} = V$$

puisque $\frac{DV}{dt} = 0$, d'où $\frac{D^2J}{dt^2} = 0$. De plus, $R(V, J)V = tR(V, V)V = 0$ puisque R est symétrique en les deux premières variables. Donc J satisfait les équations de Jacobi, $J_0 = 0$ et $J_1 \neq 0$. Donc pas de dégénérescence dans cette direction.

Exemple 1. Supposons que la variété M soit plate, donc sans courbure. Les équations de Jacobi deviennent $\frac{D^2J}{dt^2} = 0$. Si on pose $J(t) = \sum f^i(t)P_i(t)$ où les P_i sont orthogonaux, alors on obtient $\frac{d^2f}{dt^2} = 0$. Un champ de Jacobi le long d'une géodésique γ peut avoir au plus un zéro. Il n'y a alors pas de points conjugués et E_{**} est non-dégénéré.

Lemme 18. *Soit α une variation de γ à 1 paramètre qui ne garde pas nécessairement les extrémités fixes et telle que chaque $\bar{\alpha}(u)$ soit une géodésique. Donc $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [0, 1] \rightarrow M$ est lisse, $\alpha(0, t) = \gamma(t)$, et chaque $\bar{\alpha}(u)$ est une géodésique. Alors le champ de vecteurs variation $W(t) = \frac{\partial \alpha}{\partial u}(0, t)$ est un champ de Jacobi le long de γ .*

Démonstration. Si α est une variation de γ à travers des géodésiques, alors $\frac{D}{dt} \frac{\partial \alpha}{\partial t}$ est nul. D'où

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{D}{\partial u} \frac{D}{\partial t} \frac{\partial \alpha}{\partial t} = \frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial u} \frac{\partial \alpha}{\partial t} + R \left(\frac{\partial \alpha}{\partial t} \frac{\partial \alpha}{\partial u} \right) \frac{\partial \alpha}{\partial t} \\ &= \frac{D^2}{\partial t^2} \frac{\partial \alpha}{\partial u} + R \left(\frac{\partial \alpha}{\partial t} \frac{\partial \alpha}{\partial u} \right) \frac{\partial \alpha}{\partial t}, \end{aligned}$$

et on voit que le champ de vecteurs variation $\frac{\partial \alpha}{\partial u}$ satisfait les équations de Jacobi. ■

Donc si on se ballade à travers des géodésiques, on obtient un champ de Jacobi le long de ces géodésiques.

Exemple 2. Supposons que p et q soient des points antipodaux sur la sphère unité S^n et supposons que γ soit un grand arc de cercle de p à q . On va voir que p et q sont conjugués avec multiplicité $n - 1$. Dans cet exemple, la nullité ν de E_{**} prend sa plus grande valeur possible. Grâce au lemme précédent, partant de la géodésique γ , il suffit de faire tourner la sphère en gardant p et q fixes pour obtenir un champ de Jacobi qui traverse les géodésiques "grand arc de cercle". Ce champ de Jacobi s'annule en p et en q . Si on fait tourner la sphère dans $n - 1$ différentes directions, on obtient $n - 1$ champs de Jacobi linéairement indépendants. Donc p et q sont conjugués le long de γ avec multiplicité $n - 1$.

Un résultat inverse au lemme 18 peut être énoncé comme suit.

Lemme 19. *Chaque champ de Jacobi le long d'une géodésique $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ peut être obtenu par variation le long de γ à travers des géodésique.*

Sans démonstration.

Remarque 7. *Dans n'importe quel voisinage U contenant un segment de géodésique, les champs de Jacobi sont déterminés de manière unique par leurs valeurs en les extrémités de cette géodésique.*

4.5 Le Théorème de l'Indice

L'indice λ du Hessien

$$E_{**} : T_\gamma\Omega \times T_\gamma\Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

est défini comme étant la dimension maximale du sous-espace de $T_\gamma\Omega$ sur lequel E_{**} est défini négatif.

Nous allons, pour commencer, faire une estimation de λ en séparant l'espace vectoriel $T_\gamma\Omega$ en deux sous-espaces orthogonaux entre eux, sur l'un desquels E_{**} est défini positif.

Chaque point $\gamma(t)$, pour $0 < t < 1$, est contenu dans un ensemble ouvert U tel que n'importe quelle paire de points de U est jointe par une unique géodésique minimale qui est une fonction lisse de ses extrémités. Choisissons une subdivision $0 = t_0 < \dots < t_k = 1$ de $[0, 1]$ qui soit suffisamment fine pour que chaque segment $\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}$ se trouve dans un tel ensemble U et que $\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}$ soit minimale.

Soit $T_\gamma\Omega(t_0, \dots, t_k) \subset T_\gamma\Omega$ l'espace vectoriel constitué de tous les champs de vecteurs W le long de γ tels que

- a) $W|_{[t_{i-1}, t_i]}$ soit un champ de Jacobi le long de $\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}$ pour tout i ,
- b) W s'annule en les extrémités $t = 0$ et $t = 1$.

Donc $T_\gamma\Omega(t_0, \dots, t_k)$ est un espace vectoriel de dimension finie constitué des champs de Jacobi brisés le long de γ .

Soit $T' \subset T_\gamma\Omega$ l'espace vectoriel constitué de tous les champs de vecteurs $W \in T_\gamma\Omega$ pour lesquels $W(t_0) = \dots = W(t_k) = 0$.

Lemme 20. *L'espace vectoriel $T_\gamma\Omega$ est isomorphe à la somme directe*

$$T_\gamma\Omega(t_0, \dots, t_k) \oplus T'.$$

*Ces deux sous-espaces sont orthogonaux par rapport au produit scalaire E_{**} . De plus, $E_{**}|_{T'}$ est défini positif.*

Démonstration. Soit $W \in T_\gamma\Omega$. Soit W_1 l'unique champ de Jacobi brisé de $T_\gamma\Omega(t_0, \dots, t_k)$ tel que $W_1(t_i) = W(t_i)$ pour tout i . La remarque 7 nous garantit son unicité. On voit que $W - W_1$ est dans T' . Donc les deux sous-espaces $T_\gamma\Omega(t_0, \dots, t_k)$ et T' génèrent $T_\gamma\Omega$ et ont le champ de vecteurs zéro en commun.

Si $W_1 \in T_\gamma\Omega(t_0, \dots, t_k)$ et $W_2 \in T'$, alors la seconde formule de variation prend la forme

$$\frac{1}{2}E_{**}(W_1, W_2) = - \sum_t \left\langle W_2(t), \Delta_t \frac{DW_1}{dt} \right\rangle - \int_0^1 \langle W_2, 0 \rangle dt = 0.$$

Donc les deux sous-espaces sont orthogonaux par rapport à ce produit scalaire.

Pour chaque champ de vecteurs $W \in T_\gamma\Omega$, le Hessien $E_{**}(W, W)$ peut être vu comme la seconde dérivée $\frac{d^2 E_{**} \circ \bar{\alpha}}{du^2}(0)$ où $\bar{\alpha} : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \Omega$ est une variation de γ avec pour champ de vecteurs variation $\frac{d\bar{\alpha}}{dt}(0) = W$. Si $W \in T'$ alors on peut supposer que $\bar{\alpha}$ est de telle

manière qu'elle laisse les points $\gamma(t_0), \dots, \gamma(t_k)$ fixes. En d'autres termes, on peut supposer que $\bar{\alpha}(u)(t_i) = \gamma(t_i)$ pour $i = 0, \dots, k$.

Prouvons que $E_{**}(W, W) \geq 0$ pour $W \in T'$. Chaque $\bar{\alpha}(u) \in \Omega$ est un chemin lisse par morceaux de $\gamma(0 = t_0)$ à $\gamma(t_1)$ à ... à $\gamma(t_k = 1)$. Mais chaque $\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}$ est une géodésique minimale et a donc une énergie plus petite que n'importe quel autre chemin entre ses extrémités. Ceci prouve que

$$E(\bar{\alpha}(u)) \geq E(\gamma) = E(\bar{\alpha}(0)).$$

Donc la seconde dérivée, évaluée en $u = 0$, doit être plus grande que zéro.

Prouvons que $E_{**}(W, W) > 0$ pour $W \in T'$ et $W \neq 0$. Supposons que $E_{**}(W, W) = 0$. Alors W se trouverait dans l'espace des zéros de E_{**} . En fait, pour chaque $W_1 \in T_\gamma\Omega(t_0, \dots, t_k)$ on a déjà vu que $E_{**}(W_1, W) = 0$. Pour chaque $W_2 \in T'$, l'inégalité

$$0 \leq E_{**}(W + cW_2, W + cW_2) = 2cE_{**}(W_2, W) + c^2E_{**}(W_2, W_2)$$

pour tout $c \in \mathbb{R}$ entraîne que $E_{**}(W_2, W) = 0$. Donc W se trouve dans l'espace des zéros. Mais l'espace des zéros de E_{**} est constitué de champs de Jacobi. Puisque T' ne contient pas de champs de Jacobi autres que zéro, cela implique que $W = 0$. Donc la forme quadratique E_{**} est définie positive sur T' . ■

Une conséquence immédiate est le lemme suivant.

Lemme 21. *L'indice (ou la nullité) de E_{**} est égale à l'indice (ou la nullité) de $E_{**}|_{T_\gamma\Omega(t_0, \dots, t_k)}$. Comme l'espace $T_\gamma\Omega(t_0, \dots, t_k)$ des champs de Jacobi brisés est un espace vectoriel de dimension finie, l'indice λ est fini.*

Démonstration. C'est évident.

Affirmation 1. La fonction $\lambda(\tau)$ est monotone.

Si $\tau < \tau'$ alors il existe un espace V , espace de champs de vecteurs le long de γ_τ s'annulant en $\gamma(0)$ et $\gamma(\tau)$, de dimension $\lambda(\tau)$ tel que le Hessien $(E_0^\tau)_{**}$ est défini négatif sur cet espace vectoriel. Chaque champ de vecteurs dans V s'étend en un champ de vecteurs le long de $\gamma_{\tau'}$ qui s'annule identiquement entre $\gamma(\tau)$ et $\gamma(\tau')$. Donc on obtient un espace vectoriel de champs de vecteurs le long de $\gamma_{\tau'}$ de dimension $\lambda(\tau)$ sur lequel $(E_0^{\tau'})_{**}$ est défini négatif. Donc $\lambda(\tau) \leq \lambda(\tau')$.

Affirmation 2. $\lambda(\tau) = 0$ pour des petites valeurs de τ .

Si τ est suffisamment petit alors γ_τ est une géodésique minimale, d'où, par le lemme 17, $\lambda(\tau) = 0$.

Examinons à présent les discontinuités de la fonction $\lambda(\tau)$. Voyons d'abord que cette fonction est continue à gauche :

Affirmation 3. Pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit, on a $\lambda(\tau - \varepsilon) = \lambda(\tau)$.

Démonstration de l'Affirmation 3. D'après le Lemme 20 le nombre $\lambda(1)$ peut être interprété comme l'indice d'une forme quadratique sur l'espace vectoriel $T_\gamma\Omega(t_0, \dots, t_k)$ de

dimension finie. On peut supposer que l'on a une subdivision telle que $t_i < \tau < t_{i+1}$. Alors l'indice $\lambda(\tau)$ peut être interprété comme l'indice d'une forme quadratique H_τ sur un espace vectoriel des champs de Jacobi brisés le long de γ_τ . Cet espace vectoriel est construit en utilisant la subdivision $0 < t_1 < \dots < t_i < \tau$ de $[0, \tau]$. Puisqu'un champ de Jacobi est déterminé de manière unique par ses valeurs en les points de cassures $\gamma(t_i)$, cet espace vectoriel est isomorphe à la somme directe

$$\Sigma = T_{\gamma(t_1)}\Omega \oplus \dots \oplus T_{\gamma(t_i)}\Omega.$$

Cet espace vectoriel Σ est indépendant de τ . La forme quadratique H_τ sur Σ est fonction continue de τ .

Maintenant H_τ est définie négative sur un sous-espace $V \subset \Sigma$ de dimension $\lambda(\tau)$. Pour tout τ' suffisamment proche de τ on voit que $H_{\tau'}$ est définie négative sur V . D'où $\lambda(\tau') \geq \lambda(\tau)$. Mais si $\tau' = \tau - \varepsilon < \tau$ alors par l'affirmation 1 on a aussi $\lambda(\tau') \leq \lambda(\tau)$. Alors $\lambda(\tau - \varepsilon) = \lambda(\tau)$.

Affirmation 4. Soit ν la nullité du Hessien $(E_0^\tau)_{**}$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit on a

$$\lambda(\tau + \varepsilon) = \lambda(\tau) + \nu.$$

Donc la fonction $\lambda(t)$ augmente de ν quand la variable t passe en un point conjugué de multiplicité ν et est continue ailleurs.

Prouvons que $\lambda(\tau + \varepsilon) \leq \lambda(\tau) + \nu$. Soit H_τ et Σ comme dans la preuve de l'affirmation 3. Puisque $\dim \Sigma = ni$, on voit que H_τ est définie positive sur un sous-espace $V' \subset \Sigma$ de dimension $ni - \lambda(\tau) - \nu$. Pour tout τ' suffisamment proche de τ , il s'ensuit que $H_{\tau'}$ est définie positive sur V' . D'où

$$\lambda(\tau') \leq \dim \Sigma - \dim V' = \lambda(\tau) + \nu.$$

Prouvons enfin que $\lambda(\tau + \varepsilon) \geq \lambda(\tau) + \nu$. Soient $W_1, \dots, W_{\lambda(\tau)}$ des champs de vecteurs le long de γ_τ , s'annulant en les extrémités de γ_τ , tels que la matrice

$$((E_0^\tau)_{**}(W_i, W_j))$$

est définie négative. Soient J_1, \dots, J_ν des champs de Jacobi le long de γ_τ , linéairement indépendants et s'annulant en les extrémités de γ_τ . Notons que les vecteurs

$$\frac{DJ_h}{dt}(\tau) \in T_{\gamma(\tau)}\Omega$$

sont linéairement indépendants pour $h = 1, \dots, \nu$. De là, il est possible de choisir ν champs de vecteurs X_1, \dots, X_ν le long de $\gamma_{\tau+\varepsilon}$, s'annulant en les extrémités de $\gamma_{\tau+\varepsilon}$, tels que la matrice

$$\left(\left\langle \frac{DJ_h}{dt}(\tau), X_k(\tau) \right\rangle \right)$$

soit égale à la matrice identité de dimensions ν . Étendons les champs de vecteurs W_i et J_h le long de $\gamma_{\tau+\varepsilon}$ en les égalant à 0 pour $\tau \leq t \leq \tau + \varepsilon$. En se servant de la seconde formule de variation (théorème 9), on voit que :

$$(E_0^{\tau+\varepsilon})(J_h, W_i) = 0$$

$$(E_0^{\tau+\varepsilon})(J_h, X_k) = 2\delta_{hk}.$$

Maintenant soit c un réel positif et considérons les $\lambda(\tau) + \nu$ champs de vecteurs

$$W_1, \dots, W_{\lambda(\tau)}, c^{-1}J_1 - cX_1, \dots, c^{-1}J_\nu - cX_\nu$$

le long de $\gamma_{\tau+\varepsilon}$. On prétend que ces champs de vecteurs génèrent un espace vectoriel de dimension $\lambda(\tau) + \nu$ sur lequel la forme quadratique $(E_0^{\tau+\varepsilon})_{**}$ est définie négative. En fait la matrice de $(E_0^{\tau+\varepsilon})_{**}$ par rapport à cette base est

$$\begin{pmatrix} (E_0^\tau)_{**}(W_i, W_j) & cA \\ cA^t & -4I + c^2B \end{pmatrix}$$

où A et B sont des matrices fixées. Si c est suffisamment petit, cette matrice est certainement définie négative et l'affirmation 4 est prouvée.

Nous pouvons à présent énoncer le Théorème de l'Indice.

Théorème 11 (Théorème de Morse). *L'indice λ de E_{**} est égal au nombre de points $\gamma(t)$, avec $0 < t < 1$, tels que $\gamma(t)$ est conjugué à $\gamma(0)$ le long de γ ; chaque point conjugué étant compté avec sa multiplicité. Cet indice λ est fini.*

Démonstration. Les affirmations 2, 3 et 4 constituent la preuve de ce théorème. ■

Comme conséquence immédiate nous avons le corollaire suivant.

Corollaire 8. *Un segment de géodésique $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ peut seulement contenir un nombre fini de points conjugués à $\gamma(0)$ le long de γ .*

Chapitre 5

Vers le Théorème de Gromov

5.1 Approximation de dimension finie de Ω^c

L'espace des chemins $\Omega(M, p, q)$ est un espace de dimension infinie. Afin de pouvoir un peu mieux maîtriser cet espace, nous allons faire une approximation de dimension finie non pas de $\Omega(M, p, q)$ mais de $\Omega^c(M, p, q)$ que nous définirons dans quelques instants.

Soit M une variété riemannienne connexe et soient p et q deux points de M avec $p = q$ ou $p \neq q$. On peut mettre une topologie sur l'ensemble $\Omega = \Omega(M, p, q)$ des chemins de p à q lisses par morceaux de la manière suivante. Soit ϱ une métrique provenant de la métrique riemannienne de M , c'est-à-dire que la distance séparant deux points sur M est donnée par la plus petite des longueurs des chemins les plus courts entre ces deux points.

Étant donnés deux chemins $\omega, \omega' \in \Omega$ avec longueur d'arc respectivement $s(t)$ et $s'(t)$, on peut définir une distance $d(\omega, \omega')$ avec la formule

$$\max_{0 \leq t \leq 1} \varrho(\omega(t), \omega'(t)) + \left[\int_0^1 \left(\frac{ds}{dt} - \frac{ds'}{dt} \right)^2 dt \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Le dernier terme permet à des chemins dont la différence d'énergie est grande d'être séparés par une grande distance, de manière à ce que la fonction d'énergie

$$E_a^b(\omega) = \int_a^b \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 dt$$

soit continue sur Ω . Cette métrique induit une topologie sur Ω .

Définition 44. Soit $c > 0$ et $E = E_0^1 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction énergie.

- a) Ω^c est le sous-ensemble fermé $E^{-1}([0, c]) \subset \Omega$,
- b) $\text{int } \Omega^c$ est le sous-ensemble ouvert $E^{-1}([0, c)) \subset \Omega$.

Construisons à présent une approximation de dimension finie de Ω^c .

Choisissons une subdivision $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = 1$ de l'intervalle $[0, 1]$. Soit $\Omega(t_0, \dots, t_k)$ le sous-espace de Ω regroupant tous les chemins $\omega : [0, 1] \rightarrow M$ tels que

a) $\omega(0) = p$ et $\omega(1) = q$,

b) $\omega|_{[t_{i-1}, t_i]}$ est une géodésique pour chaque $i = 1, \dots, k$.

On appelle cet espace $\Omega(t_0, \dots, t_k)$ l'espace des géodésiques brisées. Enfin, on définit les sous-espaces

$$\Omega(t_0, \dots, t_k)^c = \Omega^c \cap \Omega(t_0, \dots, t_k)$$

$$\text{int } \Omega(t_0, \dots, t_k)^c = (\text{int } \Omega^c) \cap \Omega(t_0, \dots, t_k).$$

Lemme 22. *Soit M une variété riemannienne complète et soit c un réel positif fixé tel que $\Omega^c \neq \emptyset$. Alors, pour toute subdivision suffisamment fine (t_0, \dots, t_k) de $[0, 1]$, on peut donner à l'ensemble $\text{int } \Omega(t_0, \dots, t_k)^c$ une structure de variété lisse de dimension finie.*

Démonstration. Soit S la boule

$$\{x \in M : \varrho(x, p) \leq \sqrt{c}\}.$$

On voit, d'après l'inégalité $L^2 \leq E < c$, que chaque chemin $\omega \in \Omega^c$ est dans le sous-ensemble $S \subset M$.

Puisque M est complet, S est compact. D'où, par le corollaire 4 il existe ε un réel positif tel que pour tous points $x, y \in S$ avec $\varrho(x, y) < \varepsilon$, il existe une unique géodésique de x à y de longueur $l < \varepsilon$, et telle qu'elle soit une fonction lisse de ses extrémités x et y .

Choisissons une subdivision (t_0, \dots, t_k) de $[0, 1]$ telle que chaque différence $t_i - t_{i-1}$ soit plus petite que ε . Alors pour chaque géodésique brisée $\omega \in \Omega(t_0, \dots, t_k)^c$, on a

$$(L_{t_{i-1}}^{t_i} \omega)^2 = (t_i - t_{i-1}) (E_{t_{i-1}}^{t_i} \omega) \leq (t_i - t_{i-1})(E\omega) \leq (t_i - t_{i-1})c < \varepsilon^2.$$

Dès lors, les géodésiques $\omega|_{[t_{i-1}, t_i]}$ sont uniquement déterminées par leurs extrémités et sont des fonctions lisses de leurs extrémités.

La géodésique brisée ω est uniquement déterminée par le $(k-1)$ -uple

$$(\omega(t_1), \dots, \omega(t_{k-1})) \in M \times \dots \times M.$$

De manière évidente, la correspondance

$$\omega \mapsto (\omega(t_1), \dots, \omega(t_{k-1}))$$

définit un homéomorphisme entre $\text{int } \Omega(t_0, \dots, t_k)^c$ et un certain sous-ensemble ouvert de la variété $(k-1)$ -produit $M \times \dots \times M$. ■

Nous désignons par B la variété $\text{int } \Omega(t_0, \dots, t_k)^c$ des géodésiques brisées. Soit alors

$$E' : B \rightarrow \mathbb{R}$$

la restriction à B de la fonction énergie $E : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

Théorème 12. *La fonction $E' : B \rightarrow \mathbb{R}$ est lisse. De plus, pour chaque $a < c$, l'ensemble $B^a = E'^{-1}[0, a]$ est compact et est une rétraction de l'espace Ω^a correspondant. Les points critiques de E' sont les mêmes que les points critiques de E dans $\text{int } \Omega$: ce sont précisément les géodésiques brisées de p à q de longueur $l < \sqrt{c}$. L'indice (ou la nullité) du Hessien E'_{**} en chaque point critique γ est égal à l'indice (ou la nullité) de E_{**} en γ .*

Remarque 8. *De manière similaire, B est une rétraction de $\text{int } \Omega^c$.*

Démonstration du Théorème. Puisque la géodésique brisée $\omega \in B$ est une fonction lisse du $(k-1)$ -uple

$$(\omega(t_1), \dots, \omega(t_{k-1})) \in M \times \dots \times M,$$

il y va de même en ce qui concerne l'énergie $E'(\omega)$. En fait, on a la formule explicite

$$E'(\omega) = \sum_{i=1}^k \varrho(\omega(t_{i-1}), \omega(t_i))^2 / (t_i - t_{i-1}).$$

Pour $a < c$ l'ensemble B^a est homéomorphe à l'ensemble de tous les $(k-1)$ -uples $(p_1, \dots, p_k) \in S \times \dots \times S$ tels que

$$\sum_{i=1}^k \varrho(p_{i-1}, p_i)^2 / (t_i - t_{i-1}) \leq a,$$

avec $p_0 = p$ et $p_k = q$. Comme c'est un ensemble fermé d'un ensemble compact, il est compact.

Une rétraction $r : \text{int } \Omega^c \rightarrow B$ peut être définie de la manière suivante. Définissons $r(\omega)$ comme l'unique géodésique brisée dans B telle que $r(\omega)|_{[t_{i-1}, t_i]}$ soit une géodésique de $\omega(t_{i-1})$ à $\omega(t_i)$ de longueur $l < \varepsilon$. Ceci est toujours possible car, par l'inégalité

$$\varrho(p, \omega(t)) \leq (L\omega) \leq E(\omega) < c,$$

on voit que $\omega([0, 1]) \subset S$, et donc par l'inégalité

$$\varrho(\omega(t_{i-1}), \omega(t_i))^2 \leq (t_i - t_{i-1}) (E_{t_{i-1}}^{t_i} \omega) < \frac{\varepsilon^2}{c} \cdot c = \varepsilon^2,$$

on peut définir $r(\omega)$ de la sorte.

Clairement $E(r(\omega)) \leq E(\omega) < c$. On définit ensuite

$$r_u : \text{int } \Omega^c \rightarrow \text{int } \Omega^c$$

pour $t_{i-1} \leq u \leq t_i$ par les formules suivantes :

$$\begin{aligned} r_u(\omega)|_{[0, t_{i-1}]} &= r(\omega)|_{[0, t_{i-1}]}, \\ r_u(\omega)|_{[t_{i-1}, u]} &= \text{la géodésique minimale de } \omega(t_{i-1}) \text{ à } \omega(u) \\ r_u(\omega)|_{[u, 1]} &= \omega|_{[u, 1]}. \end{aligned}$$

Alors $r_0 : \text{int } \Omega^c \rightarrow \text{int } \Omega^c$ est l'identité, et $r_1 = r$. On a donc que B est une rétraction de $\text{int } \Omega^c$.

Puisque $E(r_u(\omega)) \leq E(\omega)$, B^a est aussi une rétraction de Ω^a .

Comme chaque géodésique est aussi une géodésique brisée, chaque point critique de E dans $\text{int } \Omega^c$ se trouve dans la variété B . En se servant de la première formule de variation (théorème 8), il est clair que les points critiques de E' sont précisément les géodésiques brisées.

Considérons l'espace tangent $T_\gamma B$ à la variété B en la géodésique γ . On l'identifie à l'espace $T_\gamma \Omega(t_0, \dots, t_k)$ des champs de Jacobi brisés le long de γ , comme décrit dans la section qui précède. On le justifie de la manière suivante. Soit

$$\bar{\alpha} : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow B$$

une variation de γ à travers des géodésiques brisées. Alors le champ de vecteurs variation $\frac{\partial \alpha}{\partial u}(0, t)$ correspondant le long de γ est clairement un champ de Jacobi brisé.

Enfin, l'indice (ou la nullité) de E_{**} en γ est égal à l'indice (ou la nullité) de E'_{**} en γ est une conséquence du lemme 21. ■

5.2 Théorème Fondamental de la Théorie de Morse

Soit M une variété riemannienne, g sa métrique et ϱ la métrique topologique induite. Soient p et q deux points de M distincts ou non.

Dans le cadre de la Théorie sur l'homotopie, on étudie l'espace Ω^* de tous les chemins continus

$$\omega : [0, 1] \rightarrow M$$

de p à q . Cette topologie peut aussi être décrite comme étant induite par la métrique

$$d^*(\omega, \omega') = \max_t \varrho(\omega(t), \omega'(t)).$$

D'autre part, on étudie depuis maintenant quelques sections l'espace Ω des chemins lisses par morceaux de p à q avec la métrique

$$d(\omega, \omega') = d^*(\omega, \omega') + \left[\int_0^1 \left(\frac{ds}{dt} - \frac{ds'}{dt} \right) dt \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Puisque $d \geq d^*$, l'inclusion naturelle

$$i : \Omega \rightarrow \Omega^*$$

est continue. Pour s'en persuader, il suffit de voir que pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver un $\delta > 0$ tel que si $|\omega - \omega'|_\Omega < \delta$, alors $|\omega - \omega'|_{\Omega^*} < \varepsilon$. Il suffit de prendre $\delta = \varepsilon$ et si

$$\max_t \varrho(\omega(t), \omega'(t)) + \left[\int_0^1 \left(\frac{ds}{dt} - \frac{ds'}{dt} \right) dt \right]^{\frac{1}{2}} < \delta$$

alors

$$\max_t \rho(\omega(t), \omega'(t)) < \varepsilon = \delta.$$

Théorème 13. *Cette application naturelle i est une équivalence d'homotopie entre Ω et Ω^* .*

Démonstration. Nous allons utiliser le fait que tout point de M se trouve dans un voisinage ouvert N qui est *géodésiquement convexe* dans le sens où, pour deux points p et q de N , il est toujours possible de les relier par une unique géodésique minimale se trouvant entièrement dans N et qui soit fonction lisse de ses extrémités.

Choisissons un recouvrement de M par de tels voisinages ouverts convexes N_α . Subdivisant l'intervalle $[0, 1]$ en 2^k sous-intervalles égaux $[(j-1)/2^k, j/2^k]$, désignons par Ω_k^* l'ensemble de tous les chemins continus ω de p à q tels que la restriction $\omega|_{[(j-1)/2^k, j/2^k]}$ d'un chemin ω à l'intervalle $[(j-1)/2^k, j/2^k]$ soit contenue dans un des ensembles N_α du recouvrement.

On voit bien que chaque Ω_k^* est un sous-ensemble ouvert de l'espace Ω de tous les chemins de p à q car les N_α sont ouverts, on voit également que

$$\Omega_1^* \subset \Omega_2^* \subset \Omega_3^* \subset \dots \quad ,$$

et aussi que

$$\Omega^* = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Omega_k^*.$$

De manière similaire, les ensembles correspondants

$$\Omega_k = i^{-1}(\Omega_k^*)$$

sont des sous-ensembles ouverts de Ω dont l'union est égale à Ω .

Nous allons montrer que l'application

$$(i|_{\Omega_k}) : \Omega_k \rightarrow \Omega_k^*$$

est une équivalence d'homotopie. Pour chaque $\omega \in \Omega_k^*$, soit $h(\omega) \in \Omega_k^*$ la géodésique brisée qui coïncide avec ω pour les valeurs $t = j/2^k$, $j = 0, 1, \dots, 2^k$, et qui soit une géodésique minimale dans chaque intervalle $[(j-1)/2^k, j/2^k]$. Cette construction définit une fonction

$$h : \Omega_k^* \rightarrow \Omega_k,$$

qui est continue.

Comme dans la preuve du théorème 12, on peut vérifier que la composition $(i|_{\Omega_k}) \circ h$ est homotope à l'application identité de Ω_k^* et que la composition $h \circ (i|_{\Omega_k})$ est homotope à l'application identité de Ω_k . Ceci prouve que $i|_{\Omega_k}$ est une équivalence d'homotopie.

La preuve du théorème nécessite maintenant la notion de limite directe d'homotopie que nous n'aborderons pas dans ces pages. Plus de précisions seront trouvées dans [5],

pages 149-153. Nous acceptons alors le fait que l'inclusion $i : \Omega \rightarrow \Omega^*$ soit une équivalence d'homotopie. ■

Dans l'ouvrage "On Spaces having the Homotopy Type of a CW-complex" de J. Milnor, pages 272-280, il est enseigné que l'espace Ω^* a le type d'homotopie d'un CW-complexe. Nous allons énoncer le Théorème fondamental de la Théorie de Morse et en démontrer une partie, la suite faisant appel aux notions de limites directes d'homotopies, de façon à prouver un résultat plus faible.

Théorème 14 (Théorème Fondamental de la Théorie de Morse). *Soit M une variété riemannienne complète et soient $p, q \in M$ deux points non-conjugués le long d'une géodésique quelconque. Alors $\Omega(M, p, q)$ (ou $\Omega^*(M, p, q)$) a le type d'homotopie d'un CW-complexe dénombrable qui contient une cellule de dimension λ pour chaque géodésique de p à q d'indice λ .*

Nous démontrons ici seulement le fait que $\Omega^c(M, p, q)$ a le type d'homotopie d'un CW-complexe fini qui contient une cellule de dimension λ pour chaque géodésique de p à q d'indice λ , avec c un réel qui n'est pas valeur critique de la fonction énergie E .

Démonstration. La preuve est analogue à celle du théorème 4. Choisissons une suite $a_0 < a_1 < a_2 < \dots < c$ de nombres réels qui ne sont pas des valeurs critiques de la fonction énergie E , telle que chaque intervalle ouvert (a_{i-1}, a_i) contienne précisément une valeur critique. Considérons la suite

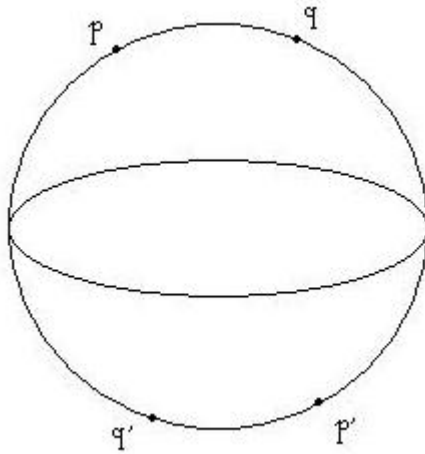
$$\Omega^{a_0} \subset \Omega^{a_1} \subset \Omega^{a_2} \subset \dots \subset \Omega^c,$$

où l'on suppose que $\Omega^{a_0} \neq \emptyset$. On voit grâce au théorème 12, à la remarque 3 et au lemme 5 que chaque Ω^{a_i} a le type d'homotopie de $\Omega^{a_{i-1}}$ avec un nombre fini de cellules attachées : une λ -cellule pour chaque géodésique d'indice λ dans $E^{-1}(a_{i-1}, a_i)$. ■

Exemple 1 (L'espace des chemins de la sphère S^n). *Supposons que p et q soient deux points non conjugués de S^n . Si p' est le point antipodal au point p , cela signifie que $q \neq p, p'$. Alors, il y a une infinité dénombrable de géodésiques $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \dots$ de p à q qui sont celles décrites ci-dessous.*

La géodésique γ_0 est l'arc de grand cercle le plus court de p à q . La géodésique γ_1 est l'arc de grand cercle le plus long $pp'q$ entre p et q . La géodésique γ_2 est tout un grand cercle partant de p , passant par q , rejoignant p plus encore l'arc de grand cercle allant de p à q , cette géodésique est donc $ppq'q'pq$. La géodésique suivante γ_3 est de nouveau tout un grand cercle plus l'arc de grand cercle le plus long allant de p à q et se note $pp'p'qpq'p'q$. La construction des géodésiques suivantes est similaire. L'indice inférieur droit k dans γ_k indique le nombre de fois que l'on retrouve p ou p' à l'intérieur de la géodésique γ_k .

L'indice $\lambda(\gamma_k) = \mu_1 + \dots + \mu_k = k(n-1)$, puisque chaque point p ou p' dans l'intérieur de la géodésique est conjugué à p avec multiplicité $n-1$.



Corollaire 9. *L'espace des chemins $\Omega(S^n)$ a le type d'homotopie d'un CW-complexe avec une cellule chaque fois de dimension $0, n - 1, 2(n - 1), 3(n - 1), \dots$*

5.3 Le Théorème de Gromov

Nous pouvons maintenant énoncer le Théorème de Gromov et sa démonstration due premièrement à lui-même, détaillée ensuite par G. M. Paternain. Ce théorème met en relation une variété compacte simplement connexe et la longueur à laquelle on peut restreindre des chemins qui la parcourent. Il s'insère dans le cadre de l'étude du flot géodésique sur une variété et plus concrètement dans une estimation de l'entropie topologique du flot géodésique de la métrique g d'une variété M (plus exactement le fibré tangent d'une variété). Nous l'utiliserons ici, simplement pour prouver le fait qu'il y a, sur une variété compacte simplement connexe, une infinité de géodésiques joignant deux points génériques p et q .

Dans la preuve de ce théorème, celle de Paternain (cf [6]), on note $L_g(\omega)$ la longueur d'un chemin dans M , et cette fois-ci, $\Omega^c(M, x, y)$ est l'espace des chemins ω telle que $L_g(\omega) \leq c$. Une preuve utilisant la fonction énergie et la fonctionnelle associée est donnée dans [4].

Théorème 15 (Théorème de Gromov). *Soit M une variété compacte simplement connexe et soit $\Omega(M, x, y)$ l'espace des chemins lisses par morceaux de x à y . Si g_M est une métrique sur M , il existe une constante $C_1 > 0$ telle que pour tout points x et y dans M et tout entier $i > 0$, tout élément de $H_i(\Omega(M, x, y))$ peut être représenté par un cycle dont l'image est dans $\Omega^{C_1 i}(M, x, y)$.*

Démonstration. Si M est une variété compacte, il existe une triangulation T de M par une famille finie $\{N_\alpha\}$ d'ensembles ouverts convexes. On entend par convexe le fait que pour tous points x et y contenus dans un N_α , il existe une unique géodésique joignant ces deux points qui est contenue dans cet ensemble N_α . On choisit la triangulation T de telle manière que chaque simplexe fermé de la triangulation T soit contenu dans un des

N_α . Enfin, supposons que le 1-squelette de la triangulation T , c'est-à-dire les simplexes de dimension 1, soit constitué de segments de géodésiques (on peut toujours le supposer à partir du moment où chaque simplexe fermé est contenu dans un des N_α et que dans chaque N_α passe par deux points x et y une et une seule géodésique).

Pour chaque point p de N , désignons par $T(p)$ la face fermée de la triangulation T de dimension minimum qui contient p . $T(p) = \{p\}$, donc un point, si p est un sommet de la triangulation et $T(p)$ est un simplexe de dimension k si le point p est contenu dans un des simplexes de dimension k .

Désignons par $O(p)$ l'union de tous les simplexes de T qui contiennent p . Si p se trouve dans un simplexe de dimension k et que p n'appartient à aucune intersection avec d'autres simplexes, $O(p)$ est alors un simplexe de dimension k . Par contre, si p se trouve sur la face F d'un simplexe, une face étant aussi un simplexe, $O(p)$ est l'union de la face F et de tous les simplexes dont une des faces est F . Enfin, si p est un sommet, $O(p)$ est l'union de ce sommet et de tous les simplexes dont un des sommets est p .

On voit alors que si p_1 se trouve dans un simplexe de dimension k et que p_2 , proche de p_1 , se trouve dans un simplexe de dimension l avec $l > k$ alors

$$T(p_1) \subset T(p_2),$$

tandis que

$$O(p_1) \supset O(p_2).$$

Comme dans la démonstration du théorème 13, l'ensemble $\Omega_k(M, x, y) \subset \Omega(M, x, y)$ est défini comme étant l'espace des chemins lisses par morceaux tel que pour chaque entier $k > 0$, $\omega \in \Omega_k(M, x, y)$, pour chaque entier $j = 1, 2, 3, \dots, 2^k$,

$$\omega|_{[(j-1)/2^k, j/2^k]} \subset N_\alpha$$

pour un certain α , et

$$O(\omega((j-1)/2^k)) \cup O(\omega(j/2^k)) \subset N_\alpha$$

pour le même α .

Si $l > k$, un chemin de $\Omega_k(M, x, y)$ est également un chemin de $\Omega_l(M, x, y)$, mais le contraire est faux : si deux morceaux de chemins consécutifs de $\Omega_l(M, x, y)$ sont contenus dans deux ensembles distincts de la famille $\{N_\alpha\}$, et que l'on prend l'union de ces deux morceaux pour la considérer comme un morceau de chemin dans $\Omega_k(M, x, y)$, ce morceau ne sera peut-être pas contenu dans un seul ensemble de $\{N_\alpha\}$, que ce soit un des deux précédents ou non.

Soit $B_k(M, x, y) \subset \Omega_k(M, x, y)$ l'espace des géodésiques brisées γ tel que

- a) $\gamma \in \Omega_k(M, x, y)$
- b) $\gamma|_{[(j-1)/2^k, j/2^k]}$ est une géodésique paramétrisée à vitesse constante.

Chaque $\gamma \in B_k(X, x, y)$ détermine une séquence

$$\{p_j = \gamma(j/2^k) : p_j \in X \text{ pour chaque } j = 1, 2, 3, \dots, 2^k\}$$

telle que

a) $p_0 = x, p_{2^k} = y$ et

b) $O(p_{j-1}) \cup O(p_j) \subset N_\alpha$ pour chaque $j = 1, 2, 3, \dots, 2^k$ et un certain α .

Inversément, cette séquence $\{p_j : 0 \leq j \leq 2^k\}$ détermine une unique géodésique dans $B_k(M, x, y)$. De plus, la correspondance entre les géodésiques brisées de $B_k(M, x, y)$ et les séquences de points est bijective car les N_α sont tels qu'il n'y a qu'une seule géodésique de x à y pour $x, y \in N_\alpha$, et la paramétrisation distingue les différentes géodésiques de même trace.

Cette correspondance induit sur $B_k(M, x, y)$ une décomposition cellulaire : une cellule qui contient γ est donnée par le produit cartésien

$$T(p_1) \times T(p_2) \times \dots \times T(p_{2^k-1}).$$

C'est un produit cartésien de simplexes, donc homéomorphe à une boule de même dimension que la dimension du produit. La dimension du produit est simplement la somme des dimensions des simplexes de ce produit. Nous pouvons penser à $B_k(M, x, y)$ comme un complexe fini de cellules, une cellule pouvant contenir plusieurs géodésiques brisées différentes. La dimension d'une cellule de $B_k(M, x, y)$ ne dépasse pas la dimension de $B_k(M, x, y)$ et

$$\dim B_k(M, x, y) = (2^k - 1) \cdot \dim M.$$

Nous savons grâce à la Théorie de Morse, qu'on peut considérer $B_k(M, x, y)$ comme une rétraction de $\Omega_k(M, x, y)$.

Puisque M est simplement connexe, chaque élément de $\Omega(M, x)$ (ce sont des chemins dont le point de départ et d'arrivée coïncident, donc des lacets) est homotope à un point. Dès lors, il existe une application lisse $f : M \rightarrow M$ qui envoie tout le 1-squelette de la triangulation T sur un point de M et il existe une application $f_t : [0, 1] \times M \rightarrow M$ telle que $f_0 = id_M$ et $f_1 = f$. Autrement dit, f est homotope à l'identité. Puisque f agit sur M , f induit naturellement une application $\hat{f} : \Omega(M, x, y) \rightarrow \Omega(M, f(x), f(y))$ agissant sur les chemins de M .

Nous avons besoin du lemme suivant.

Lemme 23. *Il existe une constante $C_1 > 0$ telle que pour chaque entier $k \geq 1$, on a*

$$\hat{f}(i\text{-squelette de } B_k(M, x, y)) \subset \Omega^{C_1 i}(M, f(x), f(y)),$$

pour tout $i \leq \dim B_k(M, x, y)$.

Démonstration. Considérons une cellule

$$T(p_1) \times T(p_2) \times \dots \times T(p_{2^k-1}).$$

de dimension $i \leq \dim B_k(M, x, y)$. Prenons un chemin γ de cette cellule. Dès lors γ est une géodésique brisée, chaque morceau de celle-ci se trouvant dans un des N_α . On peut alors majorer la longueur de $\hat{f}(\gamma)$ comme suit :

$$L(\hat{f}(\gamma)) = \int_a^b \left\| \frac{d\hat{f}}{dx}(\gamma) \cdot \dot{\gamma} \right\| \leq K \cdot \int_a^b \|\dot{\gamma}\| = K \cdot L(\gamma) \leq K \cdot d \cdot n$$

où $K = \max_{x \in M} \|d_x \hat{f}\|$, d est le maximum des diamètres des ensembles N_α , et n est le nombre de morceaux de γ . De plus, il n'est pas nécessaire, dans cette majoration, de considérer les morceaux de γ qui se trouvent dans le 1-squelette de la triangulation puisque f envoie le 1-squelette de la triangulation T sur un point. On voit alors que

$$L_{g_M}(\hat{f}(\gamma)) \leq K \cdot d_{g_M} \cdot n(\gamma),$$

où $n(\gamma)$ est le nombre de morceaux de γ qui ne se trouvent pas dans le 1-squelette de la triangulation et d_{g_M} est le maximum des g_M -diamètres des ensembles N_α .

Puisque le 1-squelette est constitué de segments de géodésiques, si $\dim T(p_j) = \dim T(p_{j+1}) = 0$ pour $1 \leq j \leq 2^k - 1$, les morceaux de la géodésique brisée γ qui vont de $T(p_j)$ à $T(p_{j+1})$ doivent se trouver dans le 1-squelette de la triangulation car alors le segment de géodésique joint deux sommets et donc est un simplexe de dimension 1.

Les seuls morceaux de γ qui pourraient *ne pas* se trouver dans le 1-squelette sont : le premier morceau, qui commence en x , le dernier, qui finit en y , et les morceaux qui commencent ou finissent en $T(p_j)$ avec $\dim T(p_j) \neq 0$. Souvenons-nous que ce qui contribue à la dimension d'une cellule sont les points de départ et d'arrivée de chaque morceau intérieur de géodésique, donc pas le premier ni le dernier.

Si par exemple, $i = 1$ et $k = 2$, il y a trois sortes de cellules de $B_2(M, x, y)$, notées $T(p_1) \times T(p_2) \times T(p_3)$. On a premièrement le cas où $\dim T(p_1) = 1$ et $\dim T(p_2) = \dim T(p_3) = 0$. Le premier morceau intérieur de géodésique part d'un segment de dimension 1 et rejoint un sommet de dimension 0, et le deuxième morceau intérieur commence et finit en des sommets de dimension 0.

On a ensuite le cas où $\dim T(p_2) = 1$ et $\dim T(p_1) = \dim T(p_3) = 0$. Dès lors le premier morceau intérieur commence en un sommet et termine dans un segment de dimension 1 alors que le deuxième fait le contraire. Le premier de cette série de trois dessins montre

clairement que les deux morceaux intérieurs de la géodésique ne se trouvent pas dans le 1-squelette de la triangulation et c'est dans cette situation là que $\hat{f}(\gamma)$ atteindra sa longueur la plus grande. Le troisième cas est similaire au premier.

Il est clair que dans une cellule de dimension i de $B_k(X, x, y)$ le nombre maximum de morceaux intérieurs de géodésique qui ne se trouvent pas dans le 1-squelette est atteint lorsque chacun de ces morceaux intérieurs part d'un sommet et rejoint un simplexe de dimension 1. S'il en est autrement, par exemple si un morceau de géodésique part d'un sommet pour rejoindre un simplexe de dimension $k > 1$, ce sont $(k-1)$ autres morceaux de géodésique qui, au lieu de joindre un sommet à une arête, devront joindre deux sommets et ce sans contribuer à la dimension i de la cellule. Pour chaque dimension de la cellule, il y a alors lieu de considérer deux morceaux de géodésique consécutifs, le premier part d'un sommet et joint une arête, le suivant part de cette même arête et joint un autre sommet. Dès lors on voit que

$$n(\gamma) \leq 2 + 2i \leq 4i.$$

Si maintenant on pose $C_1 = 4Kd_{g_M}$, on obtient

$$L(\hat{f}(\gamma)) \leq C_1 i,$$

ce qui prouve que pour tout i , l'image par \hat{f} du i -squelette de $B_k(M, x, y)$ sont des chemins de $\Omega^{C_1 i}(M, f(x), f(y))$. Leur longueur est donc limitée par la borne $C_1 i$, linéaire en i . ■

Prouvons maintenant que pour tout x et y dans M , tout élément $\eta \in H_i(\Omega(X, f(x), f(y)))$ peut être représenté par un cycle dont l'image est dans $\Omega^{C_1 i}(X, f(x), f(y))$, où C_1 est la constante donnée par le lemme sus-mentionné. Ceci impliquera le théorème puisque l'application f est surjective.

On sait déjà que

$$\Omega_1(X, f(x), f(y)) \subset \Omega_2(X, f(x), f(y)) \subset \Omega_3(X, f(x), f(y)) \subset \dots$$

et de plus

$$\Omega(X, f(x), f(y)) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Omega_k(X, x, y).$$

Soit $\hat{f}_* : H_i(\Omega(X, x, y)) \rightarrow H_i(\Omega(X, f(x), f(y)))$ l'application induite par \hat{f} . Puisque f est homotope à l'identité, si on se donne un élément $\eta \in H_i(\Omega(X, f(x), f(y)))$, il existe un élément $\mu \in H_i(\Omega(X, x, y))$ tel que $\hat{f}_*(\mu) = \eta$. D'autre part, si on se donne un cycle qui représente μ , il existe un $k > 0$ tel que $\mu \in \Omega_k(X, x, y)$. Comme $\mu \in \Omega_k(X, x, y)$, il existe une cellule de $B_k(X, x, y)$ dans laquelle se trouve μ . On peut alors, par homotopie, déplacer tous les chemins de notre cycle μ dans le i -squelette de $B_k(X, x, y)$, $0 \leq i \leq \dim B_k(X, x, y)$. On sait par le lemme 23 que \hat{f} envoie tous les chemins du i -squelette de $B_k(X, x, y)$ sur des chemins de $\Omega^{C_1 i}(X, f(x), f(y))$, donc de là, $\eta = \hat{f}_*(\mu)$ est représentable par un cycle dont l'image se trouve dans $\Omega^{C_1 i}(X, f(x), f(y))$.

Et pour terminer, comme f est surjective, on peut conclure que tout élément de $H_i(\Omega(X, x, y))$ peut être représenté par un cycle dont l'image est dans $\Omega^{C_1 i}(X, x, y)$. ■

Exemple 1. Regardons, comme variété M , la 2-sphère notée S^2 . C'est une variété compacte simplement connexe, chaque lacet est homotope à un point. La triangulation ressemble à un filet de pêche aux mailles triangulaires entourant la sphère. Maintenant, si on s'imagine que ce filet est constitué de morceaux d'élastique extensibles à l'infini, la fonction f homotope à l'identité envoie toutes les mailles du filet sur un point. Ceci est toujours possible, il suffit de choisir un point au sommet de la sphère qui n'est pas sur le filet et à partir de là, écarter la maille qui l'entoure en la faisant glisser vers le bas, comme si la sphère s'échappait du filet par cette maille, rasant ainsi toute la surface de la sphère jusqu'à un point de la base de la sphère. Toutes les mailles situées en dessous de la maille du sommet ont été poussées par celle-ci et sont arrivées aussi sur le point de la base.

Un cycle de $H_1(\Omega(S^2, x, y))$ est un chemin de chemins dont le chemin final et initial coïncident. Intuitivement on voit que, traçant un chemin continu de chemins aux extrémités fixes, on arrivera à faire le tour de la sphère avec ces chemins, ramenant le dernier sur le premier avec une famille de chemins dont la longueur est limitée. Pour le cas où $x = y$, la longueur de ces chemins peut ne pas dépasser 2π . On peut choisir de faire un seul tour de la sphère avec une famille de chemins mais on peut aussi en faire plusieurs, dans un sens ou dans l'autre. Montrons que $H_1(\Omega(S^2, x)) \cong \mathbb{Z}$. On sait que

$$\Pi_k(\Omega(M, x)) = \Pi_{k+1}(M, x)$$

pour tout espace connexe et pour $k = 0, 1, 2, \dots$. En particulier

$$\Pi_1(\Omega(S^2, x)) = \Pi_2(S^2).$$

De plus,

$$\Pi(S^2) \cong \mathbb{Z},$$

et donc

$$\Pi_1(\Omega(S^2)) \cong \mathbb{Z}.$$

Comme \mathbb{Z} est abélien, le Théorème de Hurewicz implique alors que

$$H_1(\Omega(S^2)) \cong \mathbb{Z}.$$

Une conséquence intéressante du Théorème de Gromov est que pour une variété simplement connexe M qui est rationnellement hyperbolique, le nombre de géodésiques de p à q croît de manière exponentielle avec la longueur :

Définition 45. *On dit que la variété M simplement connexe est rationnellement hyperbolique quand la suite $\sum_{j=0}^k \dim H_j(\Omega(M))$ croît de manière exponentielle en k , c'est-à-dire : Il existe des constantes $a, c_1 > 0$ telles que*

$$\sum_{j=0}^k \dim H_j(\Omega(M)) \geq a e^{c_1 k}. \quad (5.1)$$

Théorème 16. *Soit M une variété fermée sans bord qui est rationnellement hyperbolique, est soit g une métrique riemannienne sur M . Pour deux points génériques $p, q \in M$ le nombre $\#(L; p, q)$ de géodésiques de p à q croit de manière exponentielle : Il existe des constantes $b, c_2 > 0$ telles que*

$$\#(L; p, q) \geq b e^{c_2 L}. \quad (5.2)$$

Démonstration. Génériquement, nous savons que p et q ne sont pas conjugués, c'est-à-dire l'énergie $E: \Omega(M, p, q) \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de Morse. Nous pouvons donc appliquer le théorème 11 : A toute cellule de dimension j de $\Omega^L(M, p, q)$ correspond une géodésique de p à q d'indice j . L'homologie $H_j(\Omega^L(M, p, q))$ se calcule en formant l'homologie cellulaire. Les groupes de chaînes $C_j(\Omega^L(M, p, q))$ sont librement générés par les cellules de dimension j . Comme on arrive à l'homologie en prenant un quotient de sous-espaces, on voit donc que

$$\#(L; p, q) \geq \sum_{j=0}^{\infty} \dim H_j(\Omega^L(M, p, q)).$$

Le Théorème de Gromov (théorème 15) nous montre qu'il existe une constante C_1 telle que pour tout j ,

$$\dim(H_j(\Omega^{C_1 j}(M, p, q))) \geq \dim(H_j(\Omega(M, p, q))).$$

Ces deux inégalités et l'hypothèse (5.1) sur M nous montrent finalement que (5.2) a lieu. ■

Remerciements

Je voudrais remercier Monsieur Enrique Lami-Dozo pour avoir accepté de travailler quelques mois sur mon premier sujet de mémoire, pour la rigueur et la régularité qu'il m'a donné dans le travail et la recherche. Je voudrais également remercier Monsieur Haine de m'avoir donné le goût de la géométrie différentielle, et peut-être encore plus Monsieur Pascal Dupont pour son intéressante introduction à la géométrie ; Monsieur Denis Bonheur pour ses explications et enseignement d'une brillante clareté en analyse, sa disponibilité ; Joachim, Mélanie, Damien, pour n'en citer que quelques-uns, avec qui j'ai traversé ces années d'études ; Anne-Laurence et Morgane pour les lectures patientes de mon travail ; Laurent pour sa disponibilité, pour ses réponses à mes questions et pour m'avoir permis de dactylographier moi-même mon travail ; mes parents. Enfin mon promoteur Felix Schlenk avec qui le travail est véritablement quelque chose d'agréable et d'intéressant, loin des côtés rébarbatifs de la théorie tout en étant précis et rigoureux.

Bibliographie

- [1] **Willem M.**, *Analyse Fonctionnelle élémentaire*, Cassini, 2003.
- [2] **Dupont P.**, *Introduction à la Géométrie*, De Boeck Université, 2002.
- [3] **Graves L. M.**, *The Theory of Functions of Real Variables*, McGraw-Hill Book Company, Inc., 1946.
- [4] **Paternain G. P.**, *Geodesic Flows*, Boston : Birkhäuser, 1999.
- [5] **Milnor J.**, *Morse Theory*, Princeton University Press, 1969.
- [6] **Paternain G. P.**, *Topological Entropy for Geodesic Flows on Fibre Bundles Over Rationally Hyperbolic Manifolds*, Proceedings of The American Mathematical Society, Vol. 125, Num. 9, Pages 2759-2765, Sept. 1997.
- [7] **do Carmo M. P.**, *Riemannian Geometry*, Boston : Birkhäuser, 1992.
- [8] **Hatcher A.**, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, déc 2001.
- [9] **Gromov M.**,
- [10] **Spivak M.**, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, Berkeley : Publish or Perish, Inc., 2e éd., 1979.
- [11] http://fr.wikipedia.org/wiki/Théorème_d'Hurewicz
- [12] http://en.wikipedia.org/wiki/Freudenthal_suspension_theorem

Table des matières

1	Géométrie différentielle, homotopie et homologie	5
1.1	Notions de géométrie différentielle	5
1.2	Homotopie et homologie	8
2	Théorie de Morse	12
2.1	Définitions	12
2.2	Type d'homotopie en terme de valeurs critiques	17
3	Géométrie riemannienne	26
3.1	Dérivée covariante	26
3.2	Géodésiques	32
3.3	Le tenseur de courbure	41
4	Le calcul des variations appliqué aux géodésiques	47
4.1	L'espace des chemins d'une variété lisse	47
4.2	L'énergie d'un chemin	49
4.3	Le Hessien de la fonction énergie en un chemin critique	52
4.4	Champs de Jacobi	55
4.5	Le Théorème de l'Indice	58
5	Vers le Théorème de Gromov	62
5.1	Approximation de dimension finie de Ω^c	62
5.2	Théorème Fondamental de la Théorie de Morse	65
5.3	Le Théorème de Gromov	68