

Orbites périodiques dans le billard mathématique

TRAVAIL DE MASTER

David Frenkel

Sous la direction du professeur Felix Schlenk

Table des matières

Chapitre 1. Introduction	4
Chapitre 2. Théorème de Poincaré - Birkhoff	5
Chapitre 3. Application au billard planaire strictement convexe	14
Chapitre 4. Inégalité de Morse	18
4.1. Homologie cellulaire	18
4.2. Théorie de Morse	20
4.3. Inégalité de Morse	21
Chapitre 5. Application au billard n -dimensionnel strictement convexe	22
Bibliographie	24

CHAPITRE 1

Introduction

L'objectif de ce travail de Master est, comme son titre l'indique, de démontrer quelques résultats d'existence d'orbites périodiques dans le billard mathématique. Pour cela, nous allons commencer, dans le chapitre 2, par énoncer et démontrer le théorème de Poincaré-Birkhoff. Ce théorème affirme essentiellement que tout homéomorphisme d'un anneau dans lui-même, préservant l'aire et faisant tourner les bords de l'anneau dans des sens opposés, possède au moins deux points fixes. Ensuite, en corollaire de ce théorème, nous démontrerons que tout tel homéomorphisme possède une infinité de points périodiques. Le théorème de Poincaré-Birkhoff a été conjecturé par Henri POINCARÉ (1854-1912) en 1905, et a été démontré par George David BIRKHOFF (1884-1944) en 1917. On dit parfois que c'est le premier résultat de topologie symplectique.

Dans le chapitre 3, nous allons utiliser le théorème de Poincaré-Birkhoff, plus précisément son corollaire, pour démontrer l'existence d'une infinité d'orbites périodiques dans tout billard planaire différentiable strictement convexe. Cette application du théorème est due à Birkhoff lui-même.

Par la suite, comme dans les chapitres 2 et 3, notre objectif sera de chercher à trouver quelques résultats d'existence d'orbites périodiques, mais dans des billards de dimension supérieure à deux cette fois.

Pour cela, nous allons commencer, au chapitre 4, par faire un bref rappel d'homologie cellulaire, et ensuite nous présenterons très succinctement la théorie de Morse, l'objectif de ces rappels étant d'introduire les outils nécessaires à la démonstration de l'inégalité de Morse, théorème phare de la théorie du même nom. L'inégalité de Morse est un théorème qui donne une borne inférieure sur le nombre de points critiques que possèdent certaines fonctions définies sur des variétés fermées, en fonction de la topologie de celles-ci. La théorie de Morse est une théorie de topologie différentielle, due à Marston MORSE (1892-1977).

Finalement, dans le chapitre 5, nous allons utiliser l'inégalité de Morse pour démontrer, sous certaines hypothèses de généricité, l'existence d'orbites périodiques dans les billards différentiables strictement convexes en dimension supérieure à deux.

Je tiens à remercier mon directeur de travail de Master, M. Felix Schlenk, pour sa disponibilité tout au long de la réalisation de ce travail, et pour m'avoir aidé à l'orienter dans une direction topologique, qui m'a particulièrement intéressé.

David Frenkel, Neuchâtel, avril 2010.

Théorème de Poincaré - Birkhoff

Soit l'anneau $A = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : a \leq u^2 + v^2 \leq b\}$, où $a, b \in \mathbb{R}_+$ (voir Figure 2.1). Nous allons démontrer le théorème de Poincaré-Birkhoff qui affirme essentiellement qu'un homéomorphisme $\varphi: A \rightarrow A$ préservant l'aire et faisant tourner les bords de A dans des sens opposés possède au moins deux points fixes. Pour cela, il va nous falloir introduire quelques notions.

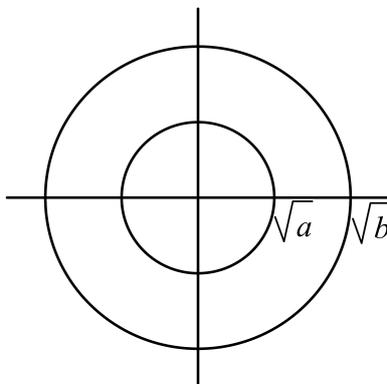


Figure 2.1

DÉFINITION 2.1. Soit $E \subset \mathbb{R}^2$. L'aire de E est la mesure de Lebesgue de E , à savoir $\iint_E dudv$. On dit qu'un homéomorphisme $\varphi: U \rightarrow V$ ($U, V \subset \mathbb{R}^2$) *préserve l'aire* si

$$\iint_E dudv = \iint_{\varphi(E)} dudv, \forall E \subset U.$$

Remarquons que dans le cas où φ est un difféomorphisme, φ préserve l'aire si et seulement si son déterminant jacobien est égal à 1.

Il sera par la suite plus pertinent de considérer l'anneau A en "coordonnées polaires", $u = \sqrt{y} \cos x, v = \sqrt{y} \sin x$, donc l'anneau s'écrira

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq y \leq b\}.$$

Notons que le fait qu'un homéomorphisme préserve l'aire est indépendant du choix de coordonnées. Remarquons d'ailleurs que le passage en "coordonnées polaires" revient en fait à considérer B comme le revêtement universel de A via la projection $p: B \rightarrow A, (x, y) \mapsto (\sqrt{y} \cos x, \sqrt{y} \sin x)$, et à relever φ dans B en un homéomorphisme $\psi: B \rightarrow B$, tel que $\varphi = p \circ \psi$. C'est ainsi que nous allons dans la suite traiter le sujet.

La deuxième hypothèse du théorème de Poincaré-Birkhoff, que nous avons mentionnée ci-dessus, est que φ doit faire "tourner les bords de A dans des sens opposés". Cette exigence peut pourtant paraître quelque peu problématique à première vue.

En effet, que signifie “tourner dans le sens horaire ou anti-horaire” pour un homéomorphisme? Cette condition peut être clarifiée à nouveau grâce au revêtement universel de A , $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq y \leq b\}$, en disant que “ φ tourne dans le sens horaire” signifie que “ ψ déplace le point (x, y) vers la droite dans le revêtement universel B ”. Formellement, cela signifie que si $\psi(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$, alors

$$f(x, y) - x > 0.$$

DÉFINITION 2.2. Deux points $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in B$ sont dits *géométriquement équivalents* si $x_2 - x_1 = 0 \pmod{2\pi}$ et $y_1 = y_2$.

En particulier, un point fixe de φ , $(x_0, y_0) \in A$, correspond à un ensemble globalement invariant de ψ

$$\{(x_0 + 2k\pi, y_0) : k \in \mathbb{Z}\} \subset B.$$

Dans la suite, nous allons nous autoriser l’abus de langage de parler de point fixe de ψ au lieu d’ensemble globalement invariant de points géométriquement équivalents. Nous pouvons maintenant énoncer le théorème de Poincaré-Birkhoff.

THÉORÈME 2.3. Soit $\psi : B \rightarrow B, (x, y) \mapsto (f(x, y), g(x, y))$ un homéomorphisme préservant l’aire tel que

$$f(x + 2k\pi, y) = f(x, y) + 2k\pi, g(x + 2k\pi, y) = g(x, y), \forall (x, y) \in B, \forall k \in \mathbb{Z}$$

$$g(x, a) = a, g(x, b) = b, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$(f(x, a) - x)(f(x, b) - x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Alors ψ possède au moins deux points fixes qui sont non géométriquement équivalents.

Pour pouvoir faire la preuve de ce théorème, il nous faut encore introduire quelques autres notions tout-à-fait générales.

DÉFINITION 2.4. Soient ψ un homéomorphisme et $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\psi(x, y) \neq (x, y)$. On définit alors la *direction de ψ en (x, y)* par

$$\alpha_\psi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{S}^1 \\ (x, y) & \longmapsto & \frac{\psi(x, y) - (x, y)}{\|\psi(x, y) - (x, y)\|} \end{array}.$$

Considérons alors un relevé $\tilde{\alpha}_\psi$ de α_ψ dans \mathbb{R} , le revêtement universel de \mathbb{S}^1 , tel que $\alpha_\psi = s \circ \tilde{\alpha}_\psi$, où $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1, \theta \mapsto (\cos \theta, \sin \theta)$.

DÉFINITION 2.5. Pour toute courbe $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ qui ne passe pas par un point fixe de ψ , on définit l’*indice de γ sous ψ* par

$$\text{ind}_\psi(\gamma) = \int_\gamma d\tilde{\alpha}_\psi.$$

Notons d’emblée que $\text{ind}_\psi(\gamma)$ est bien défini car le relevé de α_ψ est unique à translation de $2k\pi$ près pour $k \in \mathbb{Z}$. L’indice de γ sous ψ représente la variation totale de la direction α_ψ en parcourant γ , qu’on aurait également pu définir comme étant le scalaire $\tilde{\alpha}_\psi(\gamma(1)) - \tilde{\alpha}_\psi(\gamma(0))$.

REMARQUE 2.6. Signalons les trois propriétés suivantes, utiles, de l’indice

- (1) Si $\gamma_1\gamma_2$ est une concaténation de deux chemins γ_1 et γ_2 , alors $\text{ind}_\psi(\gamma_1\gamma_2) = \text{ind}_\psi(\gamma_1) + \text{ind}_\psi(\gamma_2)$,
- (2) Si $\bar{\gamma}$ est le chemin inverse de γ , alors $\text{ind}_\psi(\bar{\gamma}) = -\text{ind}_\psi(\gamma)$,
- (3) $\text{ind}_{\psi^{-1}}(\psi(\gamma)) = \text{ind}_\psi(\gamma)$.

Démonstration du théorème 2.3. Nous allons procéder par l'absurde en supposant que ψ possède au plus un point fixe, et en aboutissant à une contradiction. Quitte à faire une translation horizontale, nous pouvons supposer que si ψ possède un point fixe, alors il se trouve en $x = 0$ ($+2k\pi, k \in \mathbb{Z}$). Et quitte à faire une symétrie par rapport à l'axe $x = 0$, nous pouvons supposer que

$$f(x, a) - x > 0, f(x, b) - x < 0, \forall x.$$

Commençons alors par étendre ψ sur \mathbb{R}^2 de la manière suivante

$$\psi(x, y) = \begin{cases} (f(x, a), y) & \text{si } y < a \\ (f(x, y), g(x, y)) & \text{si } a \leq y \leq b \\ (f(x, b), y) & \text{si } y > b \end{cases} .$$

Notons que dès lors, ψ ne préserve pas nécessairement l'aire en dehors de B . Posons $B_- = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq a\}$ et $B_+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq b\}$.

LEMME 2.7. *Soit ψ un homéomorphisme, satisfaisant les hypothèses du théorème 2.3. De plus, on suppose que ψ possède au plus un point fixe. Soit $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ un chemin tel que $\gamma(0) \in B_-$ et $\gamma(1) \in B_+$, ne passant pas par l'éventuel point fixe de ψ . Alors, pour toute autre courbe γ' allant de B_- à B_+ , ne passant pas par l'éventuel point fixe de ψ , on a*

$$\text{ind}_\psi(\gamma) = \text{ind}_\psi(\gamma'),$$

c'est-à-dire que $\text{ind}_\psi(\gamma)$ ne dépend pas du chemin reliant B_- à B_+ .

Preuve. Notre objectif est de démontrer que $\text{ind}_\psi(\gamma) = \text{ind}_\psi(\gamma')$. Considérons pour cela deux chemins $c \subset B_+$ tel que $c(0) = \gamma(1), c(1) = \gamma'(1)$ et $c' \subset B_-$ tel que $c'(0) = \gamma'(0), c'(1) = \gamma(0)$ (voir Figure 2.2).

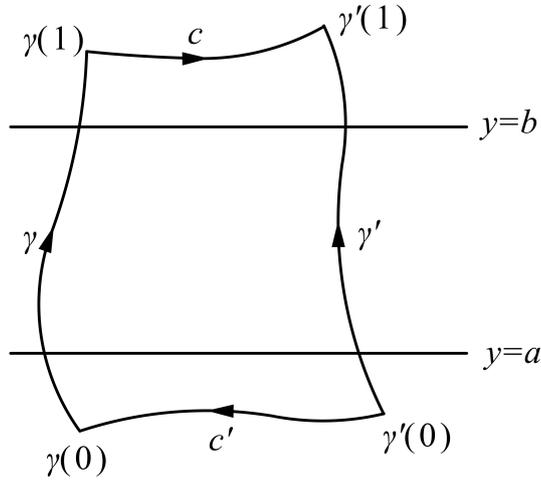


Figure 2.2

Comme $c \subset B_+$ et $c' \subset B_-$, $\text{ind}_\psi(c) = \text{ind}_\psi(c') = 0$ car ψ y déplace les points horizontalement. Ainsi, par la remarque 2.6.1, et par la remarque 2.6.2,

$$\text{ind}_\psi(\gamma c \overline{\gamma'} c') = \text{ind}_\psi(\gamma) + \text{ind}_\psi(\overline{\gamma'}) = \text{ind}_\psi(\gamma) - \text{ind}_\psi(\gamma').$$

Il nous suffit donc de montrer que $\text{ind}_\psi(\gamma c \overline{\gamma'} c') = 0$ pour démontrer le lemme. Si ψ ne possède pas de point fixe, ceci est clair car $\gamma c \overline{\gamma'} c'$ est alors homotope à un chemin constant. Dans le cas où ψ possède exactement un point fixe F dans

$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x < 2\pi\}$, se trouvant par hypothèse sur $x = 0$, remarquons alors que le groupe fondamental

$$\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{F + (2k\pi, 0) : k \in \mathbb{Z}\}, (\pi, a))$$

est engendré par les lacets $c_k, k \in \mathbb{Z}$, “faisant un tour” autour du point fixe $F + (2k\pi, 0)$. Ainsi, la courbe $\gamma c \overline{\gamma'} c'$ est homotope à une concaténation de tels lacets. Il suffit donc de montrer que $\text{ind}_\psi(c_k) = 0, \forall k \in \mathbb{Z}$. Si on le montre pour c_0 , il est clair que ce sera vrai aussi pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Considérons le lacet

$$c'_0 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, c'_0 = c'_{01} c'_{02} c'_{03} c'_{04},$$

où c'_{01} relie (π, a) à (π, b) , c'_{02} relie (π, b) à $(-\pi, b)$, c'_{03} relie $(-\pi, b)$ à $(-\pi, a)$ et c'_{04} relie $(-\pi, a)$ à (π, a) le long de segments de droites, chaque segment étant parcouru en un temps $\frac{1}{4}$ (voir Figure 2.3).

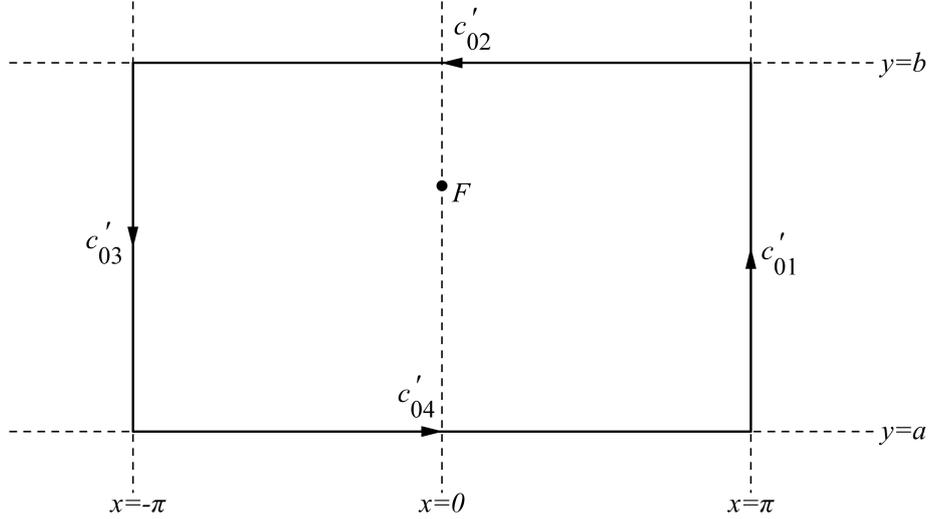


Figure 2.3

Alors c'_0 est homotope à c_0 (c'est ici qu'on utilise l'hypothèse absurde qu'il y a au plus un point fixe, car c'_0 ne serait pas nécessairement homotope à c_0 s'il y avait un deuxième point fixe), donc

$$\text{ind}_\psi(c'_0) = \text{ind}_\psi(c_0).$$

Pour finir la preuve, il suffit donc de montrer que $\text{ind}_\psi(c'_0) = 0$. Or, ceci est vrai car

$$\text{ind}_\psi(c'_{02}) = \text{ind}_\psi(c'_{04}) = 0,$$

et par 2π -périodicité,

$$\text{ind}_\psi(c'_{01}) = -\text{ind}_\psi(c'_{03}).$$

Ainsi, en utilisant à nouveau la remarque 2.6.1 et la remarque 2.6.2, on obtient

$$\text{ind}_\psi(c'_0) = \text{ind}_\psi(c'_{01} c'_{02} c'_{03} c'_{04}) = \text{ind}_\psi(c'_{01}) + \text{ind}_\psi(c'_{03}) = 0.$$

Ainsi, le lemme est démontré. □

Nous avons donc montré que l'indice ne dépend pas du chemin choisi pour relier B_- à B_+ .

LEMME 2.8. Soit ψ un homéomorphisme, satisfaisant les hypothèses du théorème 2.3, possédant au plus un point fixe. De plus, on suppose que

$$f(x, a) - x > 0, f(x, b) - x < 0, \forall x.$$

Soit $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ un chemin tel que $\gamma(0) \in B_-$ et $\gamma(1) \in B_+$, ne passant pas par l'éventuel point fixe de ψ . Alors $\text{ind}_\psi(\gamma) = \pi$.

Preuve. Par le lemme 2.7, il suffit de construire une courbe γ telle que $\text{ind}_\psi(\gamma) = \pi$. Pour ce faire, posons

$$\tau_\epsilon: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (x, y + \frac{1}{2}\epsilon(|\cos x| - \cos x)) \end{array} .$$

On voit que τ_ϵ est l'identité sur

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2: -\frac{\pi}{2} \leq x \pmod{2\pi} \leq \frac{\pi}{2} \right\},$$

et que $\|\tau_\epsilon(x, y) - (x, y)\| \leq \epsilon$ sur

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2: \frac{\pi}{2} \leq x \pmod{2\pi} \leq \frac{3\pi}{2} \right\}.$$

D'autre part, comme $\{(x, y) \in B: \frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}\}$ est compact,

$$\|\psi(x, y) - (x, y)\|$$

atteint son minimum sur cet ensemble par continuité de $\|\cdot\|$ (et donc aussi sur $\{(x, y) \in B: \frac{\pi}{2} \leq x \pmod{2\pi} \leq \frac{3\pi}{2}\}$ par 2π -périodicité), et ce minimum est différent de 0 car l'éventuel point fixe se trouve par hypothèse en $x = 0 \pmod{2\pi}$.

Ainsi, il existe $\epsilon > 0$ assez petit pour que $\psi_\epsilon := \tau_\epsilon \circ \psi$ n'ait pas d'autre point fixe sur \mathbb{R}^2 que l'éventuel point fixe de ψ . De plus, comme τ_ϵ préserve l'aire sur \mathbb{R}^2 , et que ψ préserve l'aire sur B , ψ_ϵ préserve l'aire sur B également.

Posons

$$D_0 = B_- \setminus \psi_\epsilon^{-1}(B_-),$$

$$D_1 = \psi_\epsilon(D_0) = \psi_\epsilon(B_-) \setminus B_- = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2: a < y \leq a + \frac{1}{2}\epsilon(|\cos x| - \cos x) \right\}.$$

Alors, $D_1 \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: 0 \leq x \leq 2\pi\}$ est d'aire ϵ . Posons alors

$$D_i = \psi_\epsilon^i(D_0), i = 0, 1, 2, \dots$$

(voir Figure 2.4).

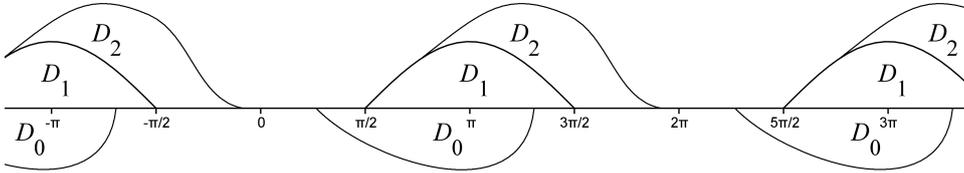


Figure 2.4

Définissons comme ci-dessus $D_{-i} = \psi_\epsilon^{-i}(D_0)$ pour $i = -1, -2, \dots$. Il est alors clair que $D_1 \cap D_i = \emptyset$ pour $i = 0, -1, -2, \dots$, car $D_i \subset B_-$ pour $i \leq 0$, et $D_1 \subset (B_-)^c$. On en déduit que

$$D_i \cap D_j = \emptyset, 0 \leq i < j,$$

car ψ_ϵ est un homéomorphisme. Ainsi, comme, de plus, ψ_ϵ préserve l'aire sur B , il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\psi_\epsilon^N(D_0) \cap B_+ \neq \emptyset$.

Soit alors P_{N+1} le point de $\overline{D_{N+1}}$ ayant coordonnée y maximale (il n'est pas unique mais il existe par compacité de $\overline{D_{N+1}} \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2\pi\}$). On définit alors une suite P_0, P_1, \dots, P_{N+1} par

$$P_{N+1-i} = \psi_\epsilon^{-i}(P_{N+1}), i = 1, \dots, N+1$$

telle que $P_i \in \partial \overline{D_i}$ pour tout $i = 0, \dots, N+1$. En particulier,

$$P_0 \in B_-, P_N \in B_+.$$

En effet, $P_0 \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = a\} \subset B_-$ et P_N est le point de coordonnée y maximale de $\overline{D_{N+1}}$ qui, par hypothèse, intersecte B_+ .

Construisons alors la courbe $\gamma_0 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (1-t)P_0 + tP_1$, puis étendons cette courbe à une courbe $\gamma : [0, N+1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, en posant

$$\gamma(t) = \psi_\epsilon^i(\gamma_0(t-i)), t \in [i, i+1],$$

γ étant donc la réunion des images de γ_0 par les itérées de ψ_ϵ , $\gamma_i := \psi_\epsilon^i(\gamma_0)$ pour tout $i = 0, \dots, N$ (voir Figure 2.5).

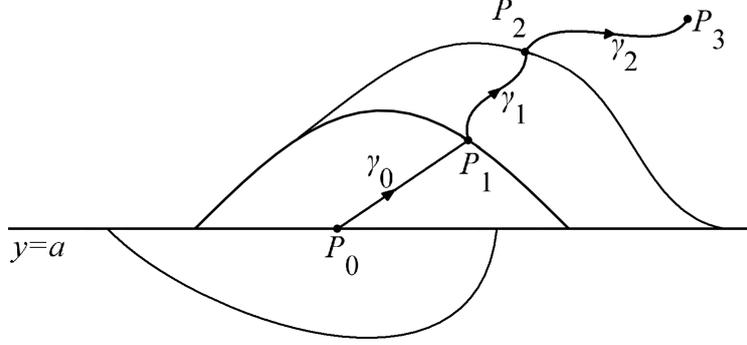


Figure 2.5

Il est clair que γ évite l'éventuel point fixe de ψ_ϵ . De plus, on remarque que par convexité de $\overline{D_1} \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}\}$, on a $\gamma_0 \subset \overline{D_1}$. Ainsi, comme $D_i \cap D_j = \emptyset, 0 \leq i < j \leq N+1$, on voit que

$$\gamma(t) \neq \gamma(s), \forall t \neq s.$$

En effet, comme les D_i sont disjoints deux-à-deux, la seule possibilité d'auto-intersection de γ est au sein d'un même D_i . Mais ceci est impossible car γ restreint à un D_i est l'image par un homéomorphisme d'un segment de droite. Ainsi donc, γ ne s'auto-intersecte pas.

On remarque encore trivialement que $P_0 = \gamma(0)$ est le point de γ ayant la plus petite coordonnée y , et que $P_{N+1} = \gamma(N+1)$ est le point de γ ayant la plus grande coordonnée y .

Comme γ ne s'auto-intersecte pas, nous pouvons définir

$$\beta: [0, N+1]^2 \longrightarrow \mathbb{S}^1 \\ (s, t) \longmapsto \frac{\gamma(t) - \gamma(s)}{\|\gamma(t) - \gamma(s)\|},$$

pour $0 \leq s < t \leq N+1$.

Soit alors $\tilde{\beta}$ le relevé de β dans \mathbb{R} tel que $\beta = s \circ \tilde{\beta}$, où $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1, \theta \mapsto (\cos \theta, \sin \theta)$. Alors, en reprenant les notations de la définition 2.4, on a

$$\tilde{\alpha}_{\psi_\epsilon}(\gamma(t)) = \tilde{\beta}(t, t+1) \pmod{2\pi}.$$

Ainsi, en posant $\Gamma_1: [0, N] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (t, t + 1)$, on a

$$\text{ind}_{\psi_\epsilon}(\gamma) = \int_{\gamma} d\tilde{\alpha}_{\psi_\epsilon} = \int_{\Gamma_1} d\tilde{\beta}.$$

Posons $\Gamma_2: [0, N] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (0, t + 1)$ et $\Gamma_3: [0, N] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (t, N + 1)$ (voir Figure 2.6).

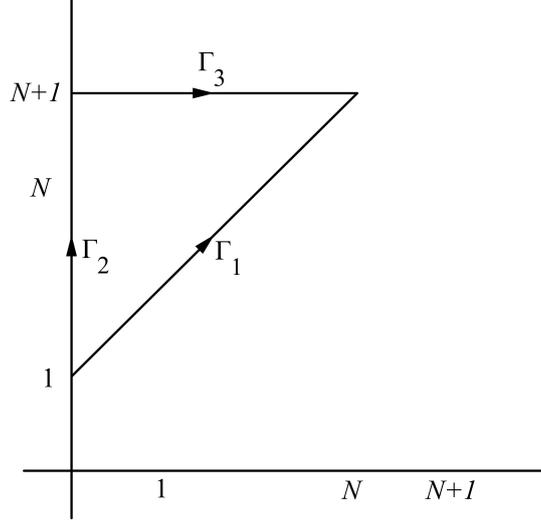


Figure 2.6

Alors, dans le plan $\{(s, t) \in \mathbb{R}^2: 0 \leq s, t \leq N + 1\}$, Γ_1 est homotope au chemin $\Gamma_2\Gamma_3$, et donc

$$\int_{\Gamma_1} d\tilde{\beta} = \int_{\Gamma_2} d\tilde{\beta} + \int_{\Gamma_3} d\tilde{\beta}.$$

Or, $\beta(\Gamma_2), \beta(\Gamma_3) \subset \{(x, y) \in \mathbb{S}^1: y > 0\}$, et donc

$$0 < \int_{\Gamma_2} d\tilde{\beta} < \pi \text{ et } 0 < \int_{\Gamma_3} d\tilde{\beta} < \pi.$$

Ainsi, au total,

$$0 < \text{ind}_{\psi_\epsilon}(\gamma) = \int_{\Gamma_1} d\tilde{\beta} = \int_{\Gamma_2} d\tilde{\beta} + \int_{\Gamma_3} d\tilde{\beta} < 2\pi.$$

Et en faisant tendre ϵ vers 0, on obtient $0 < \text{ind}_{\psi}(\gamma) < 2\pi$. Or, comme

$$f(x, a) - x > 0, f(x, b) - x < 0, \forall x \in \mathbb{R},$$

et que

$$g(x, a) = a, g(x, b) = b, \forall x \in \mathbb{R},$$

il est clair que $\text{ind}_{\psi}(\gamma) = \pi + 2k\pi$, pour un certain $k \in \mathbb{Z}$. Ainsi, on en déduit le résultat que l'on voulait démontrer, à savoir que $\text{ind}_{\psi}(\gamma) = \pi$. □

Nous sommes maintenant en mesure d'aboutir à notre contradiction. Définissons la réflexion $\rho: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (-x, y)$. On voit que pour tout homéomorphisme Φ satisfaisant aux hypothèses du lemme 2.7, on a

$$\text{ind}_{\rho^{-1} \circ \Phi \circ \rho}(\gamma) = -\text{ind}_{\Phi}(\gamma).$$

En effet, c'est vrai sur une droite verticale ne passant pas par un point fixe, et c'est donc vrai pour toute courbe γ évitant les points fixes, par le lemme 2.7.

Remarquons de plus que si ψ satisfait les hypothèses du lemme 2.8, il en est de même de $\rho^{-1} \circ \psi^{-1} \circ \rho$. Ainsi,

$$\text{ind}_{\rho^{-1} \circ \psi^{-1} \circ \rho}(\gamma) = \pi.$$

Donc, par la remarque précédente,

$$\pi = \text{ind}_{\rho^{-1} \circ \psi^{-1} \circ \rho}(\gamma) = -\text{ind}_{\psi^{-1}}(\gamma).$$

Mais, d'autre part on a aussi

$$-\text{ind}_{\psi^{-1}}(\gamma) \stackrel{\text{lemme 2.7}}{=} -\text{ind}_{\psi^{-1}}(\psi(\gamma)) \stackrel{\text{remarque 2.6.3}}{=} -\text{ind}_{\psi}(\gamma) \stackrel{\text{lemme 2.8}}{=} -\pi.$$

Ce qui est une contradiction et termine donc la démonstration du théorème 2.3. \square

COROLLAIRE 2.9. *Soient l'anneau $A = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : a \leq u^2 + v^2 \leq b\}$, où $a, b \in \mathbb{R}_+$, et $\varphi : A \rightarrow A$ un homéomorphisme de A préservant l'aire, tel que son relevé dans $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq y \leq b\}$, $\psi : B \rightarrow B$ satisfait les conditions du théorème 2.3.*

Alors, il existe une infinité de $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tels que φ possède au moins deux points périodiques distincts de période n , c'est-à-dire que pour une infinité de $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, il existe deux points distincts $P_1, P_2 \in A$ tels que $\varphi^n(P_1) = P_1, \varphi^n(P_2) = P_2$ et que $\varphi^i(P_1) \neq P_1, \varphi^i(P_2) \neq P_2$ pour tout $i < n$.

Preuve. Rappelons que dans le théorème 2.3, l'application ψ est de la forme

$$\begin{aligned} \psi : \quad B &\longrightarrow B \\ (x, y) &\longmapsto (f(x, y), g(x, y)) \end{aligned}$$

et satisfait l'hypothèse

$$(f(x, a) - x)(f(x, b) - x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Sans nuire à la généralité, nous pouvons supposer que $(f(x, a) - x) < 0$ et que $(f(x, b) - x) > 0$. Ainsi, il existe $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, tels que

$$f(x, a) - x \leq c_1 < c_2 \leq f(x, b) - x.$$

Soient alors $p, q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, p, q premiers entre eux, tels que $\frac{1}{2\pi}c_1 < \frac{p}{q} < \frac{1}{2\pi}c_2$. Ainsi,

$$qc_1 - 2\pi p < 0 < qc_2 - 2\pi p.$$

Alors si l'on note $\psi^q = (f^q, g^q)$, et $s(x, y) = (x + 2\pi, y)$, l'application ψ_p^q définie par

$$\begin{aligned} \psi_p^q = s^{-p} \circ \psi^q : \quad B &\longrightarrow B \\ (x, y) &\longmapsto (f^q(x, y) - 2\pi p, g^q(x, y)) \end{aligned}$$

est un relevé de φ^q dans B , et satisfait les hypothèses du théorème 2.3. En effet, c'est un homéomorphisme préservant l'aire en tant que composition de tels, qui satisfait clairement les deux premières hypothèses. En ce qui concerne la troisième hypothèse, elle est satisfaite car

$$(f^q(x, a) - x) - 2\pi p \leq qc_1 - 2\pi p < 0 < qc_2 - 2\pi p \leq (f^q(x, b) - x) - 2\pi p.$$

Ainsi, par le théorème 2.3, ψ_p^q possède au moins deux points fixes non géométriquement équivalents. Alors, φ^q possède au moins deux points fixes distincts et donc, φ possède au moins deux points périodiques distincts de période q .

Comme il existe une infinité de rationnels $\frac{p}{q}$ satisfaisant $\frac{1}{2\pi}c_1 < \frac{p}{q} < \frac{1}{2\pi}c_2$, on en déduit qu'il existe une infinité de couples (p, q) tels que ψ_p^q possède deux points fixes. Il reste donc seulement à montrer que si $\frac{p_1}{q_1} \neq \frac{p_2}{q_2}$ sont deux rationnels distincts

dans l'intervalle $]\frac{1}{2\pi}c_1, \frac{1}{2\pi}c_2[$, alors les points périodiques correspondants ne sont pas géométriquement équivalents.

Pour le voir notons F_1 (respectivement F_2) un point fixe de $\psi_{p_1}^{q_1}$ (respectivement de $\psi_{p_2}^{q_2}$) et montrons que F_1 et F_2 ne sont pas géométriquement équivalents, c'est-à-dire que pour tout $j \in \mathbb{Z}$, $s^j(F_1) \neq F_2$.

Pour ce faire, remarquons que la troisième hypothèse du théorème 2.3 se ré-écrit

$$\psi \circ s = s \circ \psi.$$

De plus, le fait que F_1 (respectivement F_2) soit un point fixe de $\psi_{p_1}^{q_1}$ (respectivement de $\psi_{p_2}^{q_2}$) se ré-écrit

$$\begin{aligned} s^{-p_1} \circ \psi^{q_1}(F_1) &= F_1 \\ s^{-p_2} \circ \psi^{q_2}(F_2) &= F_2. \end{aligned}$$

Supposons alors par l'absurde qu'il existe $j \in \mathbb{Z}$ tel que $s^j(F_1) = F_2$. Alors

$$\begin{aligned} \psi^{q_2}(F_1) &= \psi^{q_2} \circ s^{-j}(F_2) = s^{-j} \circ \psi^{q_2}(F_2) = s^{-j} \circ s^{p_2}(F_2) = \\ &= s^{p_2-j}(F_2) = s^{p_2} \circ s^{-j}(F_2) = s^{p_2}(F_1). \end{aligned}$$

Ainsi on trouve

$$\psi^{q_1 q_2}(F_1) = s^{q_1 p_2}(F_1).$$

Or, comme (p_1, q_1) et (p_2, q_2) jouent des rôles parfaitement symétriques, on a aussi

$$\psi^{q_1 q_2}(F_1) = s^{q_2 p_1}(F_1).$$

Ainsi, $q_1 p_2 = q_2 p_1$, et donc $\frac{p_1}{q_1} = \frac{p_2}{q_2}$, ce qui contredit $\frac{p_1}{q_1} \neq \frac{p_2}{q_2}$. □

REMARQUE 2.10. On remarque lors de la preuve, que dans le corollaire 2.9, il suffit en fait de supposer qu'il existe $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tels que

$$f(x, a) - x \leq c_1 < c_2 \leq f(x, b) - x$$

au lieu de supposer que $(f(x, a) - x)(f(x, b) - x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Intuitivement, φ ne doit donc pas nécessairement "faire tourner les bords de A dans des sens opposés", mais il suffit en fait qu'il fasse "tourner les bords de A à des vitesses différentes".

Application au billard planaire strictement convexe

Nous allons maintenant appliquer le théorème de Poincaré-Birkhoff au problème du billard mathématique pour prouver, sous certaines hypothèses, l'existence d'orbites périodiques.

Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ une région compacte. Le *problème de billard* consiste à étudier le mouvement d'un point-masse (ou d'un rayon lumineux) se déplaçant avec un vecteur-vitesse unité constant dans l'intérieur de D , jusqu'au moment où il atteint le bord ∂D . Alors, le point-masse est réfléchi sur le bord de manière élastique, c'est-à-dire que la réflexion satisfait la loi de géométrie optique : *l'angle d'incidence θ_{inc} par rapport à la tangente à ∂D au point d'impact est égal à l'angle de réflexion $\theta_{réfl}$* (voir Figure 3.1). Ensuite, le point poursuit son mouvement avec le nouveau vecteur-vitesse unité ainsi défini.

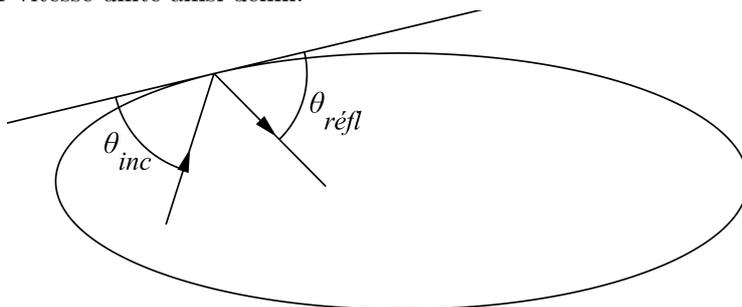


Figure 3.1

L'*orbite* du point est donc une suite de segments de droites dans D telle que deux segments successifs possèdent un point du bord en commun, et telle que les deux segments satisfont la loi de la réflexion élastique. On dit qu'une orbite est *périodique* si sa trace est un polygone (qui peut cependant posséder des auto-intersections).

On va ici de plus faire l'hypothèse que ∂D soit une courbe différentiable C^1 , pour que la réflexion soit bien définie en tout point du bord, et nous allons par la suite également supposer que D est une région strictement convexe, pour assurer la "continuité de l'orbite en les conditions initiales". Une telle région D s'appelle un *billard différentiable strictement convexe*.

THÉORÈME 3.1. *Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ un billard différentiable strictement convexe. Alors, pour tout entier $n \geq 2$, il existe dans D au moins deux orbites périodiques de période n .*

Démonstration. Nous voulons appliquer le corollaire 2.9 pour démontrer ce résultat. Il nous faut donc trouver une application φ sur un anneau, préservant l'aire, telle que ses points fixes correspondent à des orbites périodiques du billard D .

Soit $c: \mathbb{R} \rightarrow \partial D, s \mapsto c(s)$ une paramétrisation proportionnelle à la longueur d'arc du bord positivement orienté ∂D , de telle sorte à ce qu'une révolution complète corresponde à une variation de 2π de s . On dénote par t l'angle que forme une orbite du billard avec la tangente positivement orientée en un point du bord. Le couple (s, t) définit donc un segment de l'orbite. Comme $c(s+2k\pi) = c(s)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, l'ensemble des conditions initiales possibles d'une orbite forme l'anneau

$$B' = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 : 0 < t < \pi\}.$$

On définit alors $\varphi: B' \rightarrow B', (s, t) \mapsto (f(s, t), g(s, t))$ comme étant l'application qui envoie un segment d'une orbite (s_0, t_0) sur le segment suivant de l'orbite (s_1, t_1) (voir Figure 3.2).

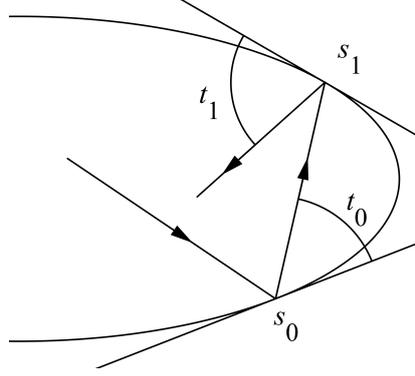


Figure 3.2

Comme φ définit complètement une orbite du billard, on l'appelle l'*application du billard*.

Dans cette application, f n'est à priori définie qu'à 2π près. Ceci peut être résolu en posant pour s_0 fixé,

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(s_0, t) = s_0 \text{ et } \lim_{t \rightarrow 0} g(s_0, t) = 0.$$

Alors, en faisant croître t de 0 à π , on obtient

$$\lim_{t \rightarrow \pi} f(s_0, t) = s_0 + 2\pi \text{ et } \lim_{t \rightarrow \pi} g(s_0, t) = \pi$$

car $\varphi(s_0, t)$ aura alors "fait un tour" de ∂D . Ainsi, on peut étendre φ en un homéomorphisme sur

$$B = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq t \leq \pi\}.$$

LEMME 3.2. *L'application du billard $\varphi: B \rightarrow B$ est un difféomorphisme préservant l'aire.*

Preuve. Soient $p, p' \in \partial D$ correspondant aux coordonnées par longueur d'arc s, s' . Posons

$$H(s, s') = \|p - p'\|.$$

Cette application est appelée la *fonction génératrice* du billard. Comme ci-dessus, soit t l'angle de $c'(s)$ au segment $\overline{pp'}$ (voir Figure 3.3). Soit γ une paramétrisation locale par longueur d'arc de ∂D autour du point p , telle que $\gamma(s) = p$ (γ est en fait égal à c , à un changement de paramétrisation affine près). Alors,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} H(s, s') &= \frac{d}{dt} [\|\gamma(t) - p'\|] |_{t=s} = \frac{d}{dt} \sqrt{\langle \gamma(t) - p', \gamma(t) - p' \rangle} |_{t=s} = \\ &= \frac{\langle \gamma'(s), \gamma(s) - p' \rangle}{\|\gamma(s) - p'\|} = \frac{1}{\|\gamma(s) - p'\|} \|\gamma'(s)\| \|\gamma(s) - p'\| \cos t = \cos t \end{aligned}$$

car γ est paramétrée par longueur d'arc, et donc $\|\gamma'(s)\| = 1$.

De la même manière, on trouve que si t' est l'angle de $-c'(s')$ au segment $\overline{pp'}$ (voir Figure 3.3), alors

$$\frac{\partial}{\partial s'} H(s, s') = -\cos t'.$$

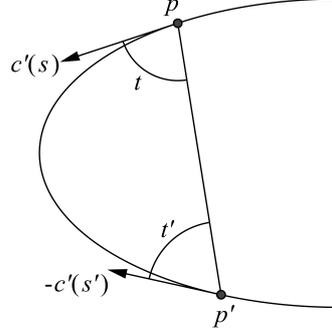


Figure 3.3

REMARQUE 3.3. Il est intéressant de remarquer que si $p_1, p_2 \in \partial D$ avec paramètres s_1, s_2 , une condition nécessaire pour que les segments $\overline{p_1 p_0}, \overline{p_0 p_2}$ forment une orbite du billard pour un certain $p_0 \in \partial D$ de paramètre s_0 , est que

$$\frac{d}{ds} [H(s_1, s) + H(s, s_2)]|_{s=s_0} = 0,$$

c'est-à-dire que p_0 est un point critique de l'application $p \mapsto \|p_1 - p\| + \|p - p_2\|$. Ainsi, si $p_1, p_2, \dots, p_{n-1}, p_n = p_1$ sont les points de ∂D d'une orbite périodique de période $n - 1$, alors $(p_1, p_2, \dots, p_{n-1}, p_n)$ est un point critique de l'application longueur de l'orbite L définie par

$$L(q_1, \dots, q_n) = \sum_{i=1}^{n-1} \|q_{i+1} - q_i\|.$$

Revenons à la preuve du lemme 3.2. Faisons les changements de variables $r = -\cos t$ et $r' = -\cos t'$. Montrons que dans ces coordonnées, $\varphi(s, r) = (f(s, r), g(s, r))$ préserve l'aire. On doit montrer que son déterminant jacobien est égal à 1, à savoir

$$\frac{\partial f}{\partial s} \frac{\partial g}{\partial r} - \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial g}{\partial s} = 1.$$

Par le calcul fait ci-dessus, on a

$$\frac{\partial}{\partial s} H(s, s') = -r \text{ et } \frac{\partial}{\partial s'} H(s, s') = r'.$$

Posons alors $\tilde{H}(s, r) = H(s, f(s, r))$. En dérivant, on obtient

$$\frac{\partial \tilde{H}}{\partial s} = \frac{\partial H}{\partial s} \cdot 1 + \frac{\partial H}{\partial s'} \frac{\partial f}{\partial s} = -r + r' \frac{\partial f}{\partial s},$$

$$\frac{\partial \tilde{H}}{\partial r} = \frac{\partial H}{\partial s} \cdot 0 + \frac{\partial H}{\partial s'} \frac{\partial f}{\partial r} = r' \frac{\partial f}{\partial r}.$$

Or, comme $r' = g(s, r)$, on trouve

$$\frac{\partial \tilde{H}}{\partial s} = -r + g \frac{\partial f}{\partial s},$$

$$\frac{\partial \tilde{H}}{\partial r} = g \frac{\partial f}{\partial r}.$$

En re-dérivant ces expressions par rapport à l'autre variable, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{H}}{\partial s \partial r} &= -1 + \frac{\partial g}{\partial r} \frac{\partial f}{\partial s} + g \frac{\partial^2 f}{\partial s \partial r}, \\ \frac{\partial \tilde{H}}{\partial r \partial s} &= \frac{\partial g}{\partial s} \frac{\partial f}{\partial r} + g \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial s}.\end{aligned}$$

Comme ces deux derniers termes sont égaux, on trouve bien

$$\frac{\partial f}{\partial s} \frac{\partial g}{\partial r} - \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial g}{\partial s} = 1.$$

□

Montrons alors que φ satisfait bien les hypothèses du corollaire 2.9. Par la remarque 2.10, on voit que c'est bien le cas, car pour $c_1 = 0$ et $c_2 = \pi$, on a bien

$$0 = f(s, 0) - s \leq c_1 < c_2 \leq f(s, \pi) - s = 2\pi.$$

Les autres hypothèses étant clairement vérifiées, le corollaire 2.9 nous dit qu'il existe une infinité de $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tels que φ possède un point périodique de période n . Or, comme φ décrit complètement les orbites de D , on en tire déjà que pour une infinité de $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, il existe dans D au moins deux orbites périodiques de période n . Mais en regardant la preuve du corollaire 2.9, on voit qu'on a en fait un résultat plus fort.

En effet, on a vu dans la preuve que pour tous $p, q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, p, q premiers entre eux, tels que $\frac{1}{2\pi}c_1 < \frac{p}{q} < \frac{1}{2\pi}c_2$, il existait deux points périodiques distincts de la fonction $s^{-p} \circ \psi^q$, où $s(s, t) = (s + 2\pi, t)$ et ψ est un relevé de φ dans son revêtement universel. Ainsi, pour tous $p, q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, p, q premiers entre eux, tels que $0 < \frac{p}{q} < 1$, on trouve au moins deux orbites périodiques. De plus, pour p, q fixés, l'expression de l'application $s^{-p} \circ \psi^q$ nous montre que ces deux orbites sont de période q avec un nombre de rotation égal à p .

On voit donc que pour tous $p, q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, tels que $p < q$, il existe dans D au moins deux orbites périodiques de période q et de nombre de rotation p .

□

Inégalité de Morse

Nous allons démontrer dans cette section l'inégalité de Morse. C'est une inégalité qui donne, pour certaines fonctions $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ (appelées fonctions de Morse) définies sur une variété M fermée, une borne inférieure du nombre de points critiques de f en fonction de la topologie de M . Pour ce faire, nous allons commencer par faire un bref rappel d'homologie cellulaire, puis de théorie de Morse, et enfin nous démontrerons l'inégalité de Morse. Pour une exposition plus détaillée de l'homologie cellulaire, on peut lire par exemple [4], pp. 137-159, et consulter pour la théorie de Morse, [7], pp. 1-31.

4.1. Homologie cellulaire

Une *cellule fermée* de dimension n (ou *n-cellule fermée*) est un espace topologique homéomorphe à la boule fermée de dimension n , que l'on note \bar{e}^n . Son intérieur, noté e^n , s'appelle une *cellule* de dimension n (ou une *n-cellule*). Pour $n = 0$, on convient que $e^0 = \bar{e}^0$ est un singleton.

DÉFINITION 4.1. Un espace topologique X est un *CW-complexe* s'il satisfait la définition inductive suivante :

- (1) Une union disjointe finie de 0-cellules X^0 est un CW-complexe de dimension 0.
- (2) Soient Y un CW-complexe de dimension inférieur ou égal à $q - 1$, et $\bar{e}_1^q \sqcup \bar{e}_2^q \sqcup \dots \sqcup \bar{e}_{k_q}^q$ une réunion disjointe finie de k_q q -cellules fermées. Soit

$$h^q: \partial\bar{e}_1^q \sqcup \partial\bar{e}_2^q \sqcup \dots \sqcup \partial\bar{e}_{k_q}^q \rightarrow Y$$

une application continue. Alors l'espace $X^q = Y \cup_{h^q} (\bar{e}_1^q \sqcup \bar{e}_2^q \sqcup \dots \sqcup \bar{e}_{k_q}^q)$, qui est l'espace quotient de $Y \sqcup (\bar{e}_1^q \sqcup \bar{e}_2^q \sqcup \dots \sqcup \bar{e}_{k_q}^q)$ par la relation d'équivalence $x \sim h^q(x)$ pour $x \in \partial\bar{e}_1^q \sqcup \partial\bar{e}_2^q \sqcup \dots \sqcup \partial\bar{e}_{k_q}^q$, est un CW-complexe de dimension q . L'application h^q est appelée *application d'attachement*.

- (3) $X = \bigcup_{q \in \mathbb{N}} X^q$ est muni de la topologie faible : un ensemble $U \subset X$ est ouvert si et seulement si $U \cap X^q$ est ouvert dans X^q pour tout $q \in \mathbb{N}$.

Si $X = \bigcup_{q=0}^n X^q$, on dit que X est un CW-complexe de dimension n . Si X est un CW-complexe de dimension n (éventuellement infinie), et $m \leq n$, l'union $\bigcup_{q=0}^m X^q$ s'appelle le *m-squelette* de X .

Considérons alors X un CW-complexe. On suppose qu'il possède k_q cellules de dimension q : $e_1^q, e_2^q, \dots, e_{k_q}^q$. Notons $\langle e_1^q \rangle, \langle e_2^q \rangle, \dots, \langle e_{k_q}^q \rangle$ ces cellules munies d'une orientation. Soit K un corps commutatif. Alors une somme formelle

$$a_1 \langle e_1^q \rangle + a_2 \langle e_2^q \rangle + \dots + a_{k_q} \langle e_{k_q}^q \rangle$$

à coefficients $a_i \in K$, pour tout $i = 1, \dots, k_q$, est appelée une *q-chaîne* de X . L'ensemble de toutes les q -chaînes de X à coefficients dans K est un espace vectoriel

sur K , noté $C_q(X; K)$, et appelé le *groupe de chaînes q -dimensionnel à coefficients dans K* . Il est muni de l'addition :

$$\left[a_1 \langle e_1^q \rangle + a_2 \langle e_2^q \rangle + \dots + a_{k_q} \langle e_{k_q}^q \rangle \right] + \left[b_1 \langle e_1^q \rangle + b_2 \langle e_2^q \rangle + \dots + b_{k_q} \langle e_{k_q}^q \rangle \right] = \\ (a_1 + b_1) \langle e_1^q \rangle + (a_2 + b_2) \langle e_2^q \rangle + \dots + (a_{k_q} + b_{k_q}) \langle e_{k_q}^q \rangle,$$

et si $\langle e_1^q \rangle'$ est la cellule munie de l'orientation opposée de $\langle e_1^q \rangle$, alors $\langle e_1^q \rangle' = -\langle e_1^q \rangle$. Ainsi,

$$C_q(X; K) \cong K \oplus K \oplus \dots \oplus K$$

(k_q copies de K) est engendré par les $\langle e_1^q \rangle, \langle e_2^q \rangle, \dots, \langle e_{k_q}^q \rangle$.

On définit alors l'*homomorphisme de bord* $\partial_q : C_q(X; K) \rightarrow C_{q-1}(X; K)$. Comme l'expression exacte de cette application n'est pas essentielle pour la compréhension de la démonstration de l'inégalité de Morse, nous ne ferons pas figurer ici tous les détails de sa définition. Pour une explication plus détaillée, on peut se référer par exemple à [4], pp. 140-141.

Comme les $\langle e_i^q \rangle$ engendrent $C_q(X; K)$, il suffit de déterminer leurs images pour définir l'homomorphisme. Soit donc une q -cellule orientée $\langle e_i^q \rangle$. On munit $\partial \bar{e}_i^q$ de l'orientation $\langle \partial \bar{e}_i^q \rangle$ induite par $\langle e_i^q \rangle$. Considérons alors l'application d'attachement

$$h_i^q := h^q \Big|_{\partial \bar{e}_i^q} : \partial \bar{e}_i^q \rightarrow Y^{q-1},$$

où Y^{q-1} est le $(q-1)$ -squelette de X , et h^q l'application d'attachement.

Si $C_{q-1}(X; K) = \{0\}$, alors $\partial_q = 0$. Si $C_{q-1}(X; K) \neq \{0\}$, soient alors

$$\langle e_1^{q-1} \rangle, \langle e_2^{q-1} \rangle, \dots, \langle e_{k_{q-1}}^{q-1} \rangle$$

les $(q-1)$ -cellules orientées engendrant $C_{q-1}(X; K)$. Pour tout $j = 1, \dots, k_{q-1}$, considérons l'application quotient g_j^q identifiant tous les points appartenant à $Y^{q-1} \setminus e_j^{q-1}$, et identifiant donc en particulier les points de $\partial \bar{e}_j^{q-1}$. On voit qu'on obtient une application

$$g_j^q \circ h_i^q : S^{q-1} \rightarrow S^{q-1},$$

où S^{q-1} désigne la sphère $(q-1)$ -dimensionnelle. On définit alors $a_{i,j}$ comme étant le degré de cette application. Intuitivement, $a_{i,j}$ est le nombre de fois que h_i^q "enroule" $\partial \bar{e}_i^q$ autour de e_j^{q-1} . Finalement, on pose

$$\partial_q (\langle e_i^q \rangle) = a_{i,1} \langle e_1^{q-1} \rangle + a_{i,2} \langle e_2^{q-1} \rangle + \dots + a_{i,k_{q-1}} \langle e_{k_{q-1}}^{q-1} \rangle.$$

On a alors entre les mains un *complexe de chaînes* de X

$$\dots \longrightarrow C_{q+1}(X; K) \xrightarrow{\partial_{q+1}} C_q(X; K) \xrightarrow{\partial_q} C_{q-1}(X; K) \xrightarrow{\partial_{q-1}} \dots \\ \dots \xrightarrow{\partial_2} C_1(X; K) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X; K) \longrightarrow \{0\}.$$

LEMME 4.2. *Pour le complexe de chaînes défini ci-dessus, on a pour tout $q \in \mathbb{N}$*

$$\partial_{q-1} \circ \partial_q = 0.$$

Preuve. Voir par exemple [4], p. 139. □

Posons alors pour tout $q \in \mathbb{N}$, $Z_q(X; K) = \text{Ker} \partial_q$ et $B_q(X; K) = \text{Im} \partial_{q+1}$. $Z_q(X; K)$ est appelé *groupe des cycles q -dimensionnel à coefficients dans K* , ses éléments étant appelés des *q -cycles*, alors que $B_q(X; K)$ est appelé *groupe des bords q -dimensionnel à coefficients dans K* , ses éléments étant appelés des *q -bords*. Ce sont des sous-espaces vectoriels de $C_q(X; K)$, et en vertu du lemme 4.2, on a

$$B_q(X; K) \subset Z_q(X; K) \subset C_q(X; K).$$

DÉFINITION 4.3. Le q -ème groupe d'homologie cellulaire à coefficients dans K est l'espace vectoriel quotient défini par

$$H_q(X; K) = Z_q(X; K)/B_q(X; K).$$

Ses éléments sont appelés *classes d'homologie cellulaire*.

Soient X, Y deux CW-complexes et $f: X \rightarrow Y$ une application continue. Alors, pour tout $q \in \mathbb{N}$, f induit de manière unique un homomorphisme $f_*: H_q(X; K) \rightarrow H_q(Y; K)$. En particulier, l'identité sur X induit l'identité sur $H_q(X; K)$, et si $f: X \rightarrow Y$, et $g: Y \rightarrow Z$, alors $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$. On a alors le résultat suivant.

THÉORÈME 4.4. Soient X, Y deux CW-complexes, et soient $f, g: X \rightarrow Y$ deux applications homotopes. Alors $f_* = g_*$.

Démonstration. Voir par exemple [4], théorèmes 2.35, p. 139 et 2.10, p. 111. □

COROLLAIRE 4.5. Soient X, Y deux CW-complexes ayant même type d'homotopie. Alors, pour tout $q \in \mathbb{N}$, $H_q(X; K) \cong H_q(Y; K)$. □

En particulier, nous pouvons définir l'invariant homotopique suivant.

DÉFINITION 4.6. Le q -ème nombre de Betti de X sur le corps K est donné par

$$b_q(X; K) = \dim_K (H_q(X; K)).$$

C'est-à-dire que $b_q(X; K)$ est la dimension de $H_q(X; K)$ vu comme espace vectoriel sur le corps K .

4.2. Théorie de Morse

Soient M une variété de dimension m sans bord et $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction lisse.

Un point $p_0 \in M$ est appelé *point critique* de f si

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(p_0) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(p_0) = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_m}(p_0) = 0,$$

relativement à un système de coordonnées (x_1, x_2, \dots, x_m) de M autour du point p_0 .

Un nombre réel $c \in \mathbb{R}$ est appelé une *valeur critique* de f s'il existe un point critique $p_0 \in M$ tel que $f(p_0) = c$.

Soit p_0 un point critique de M . La *matrice hessienne* de f en p_0 est la matrice symétrique $H_f(p_0) = (h_{ij})_{1 \leq i, j \leq m}$ définie par

$$h_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p_0).$$

Un point critique p_0 est dit *dégénéré* si $\det H_f(p_0) = 0$. Sinon, on dit que p_0 est *non dégénéré*.

DÉFINITION 4.7. Soient M une variété de dimension m sans bord et $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction lisse. On dit que f est une *fonction de Morse* si tout point critique de M est non dégénéré.

REMARQUE 4.8. Toutes ces définitions ne dépendent pas du système de coordonnées (x_1, x_2, \dots, x_m) .

LEMME 4.9. Soit p_0 un point critique non dégénéré d'une fonction $f: M \rightarrow \mathbb{R}$. Alors il existe un système de coordonnées local (x_1, x_2, \dots, x_m) autour de p_0 tel que f peut s'écrire sous la forme standard

$$f = -x_1^2 - \dots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \dots + x_m^2 + c,$$

dans ce voisinage de coordonnées, et où p_0 correspond à l'origine et $c = f(p_0)$.

Preuve. Voir par exemple [7], lemme 2.2, p. 6. □

DÉFINITION 4.10. L'entier $0 \leq \lambda \leq m$ est appelé l'indice de p_0 .

THÉORÈME 4.11. Soient M une variété fermée de dimension m et $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de Morse. Notons k_q le nombre de points critiques d'indice q que possède f pour tout $q = 0, \dots, m$. Alors M a même type d'homotopie qu'un CW-complexe X de dimension m tel que pour tout $q = 0, \dots, m$, X contient k_q cellules de dimension q .

Démonstration. Voir par exemple [7], théorème 3.5, p. 20. □

4.3. Inégalité de Morse

THÉORÈME 4.12. Soit M une variété fermée de dimension m et soit $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de Morse sur M . Soit k_q le nombre de points critiques de f d'indice q et soit $b_q(M; K)$ le q -ème nombre de Betti de M sur un corps K . Alors

$$k_q \geq b_q(M; K)$$

pour tout $q = 0, \dots, m$.

Démonstration. Par le théorème 4.11, M peut-être identifiée à un CW-complexe de dimension m possédant k_q cellules de dimension q pour tout $q = 0, \dots, m$. Considérons alors le complexe de chaînes

$$\dots \rightarrow C_m(M; K) \rightarrow C_{m-1}(M; K) \rightarrow \dots \rightarrow C_1(M; K) \rightarrow C_0(M; K) \rightarrow \{0\}.$$

Pour tout $q = 0, \dots, m$, $\dim_K(C_q(M; K)) = k_q$. Ainsi, comme $H_q(M; K)$ est l'espace vectoriel quotient de deux sous-espaces vectoriels $Z_q(M; K)$ et $B_q(M; K)$ de $C_q(M; K)$, on a

$$k_q = \dim_K(C_q(M; K)) \geq \dim_K(Z_q(M; K)) \geq \dim_K(H_q(M; K)) = b_q(M; K)$$

pour tout $q = 0, \dots, m$.

Ce qui était bien ce que l'on voulait montrer. □

COROLLAIRE 4.13. Soit M une variété fermée de dimension m et soit $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de Morse sur M . Alors le nombre de points critiques de f est supérieur ou égal à

$$\sum_{q=0}^m b_q(M; K).$$

□

Ceci signifie donc que la topologie de M donne une borne inférieure sur le nombre de points critiques de toute fonction de Morse sur M .

Application au billard n -dimensionnel strictement convexe

Dans cette section, nous allons nous intéresser au problème du billard en dimension supérieure à deux. Soit pour cela $D \subset \mathbb{R}^n$ une région compacte strictement convexe de \mathbb{R}^n telle que son bord ∂D soit une hypersurface lisse. Comme dans la section 3, on se propose d'étudier le mouvement d'un point-masse se déplaçant en segments de droites dans l'intérieur de D et rebondissant de manière élastique sur le bord de D . On s'intéresse à trouver des orbites périodiques dans D . Nous allons utiliser la théorie de Morse pour montrer que, sous certaines hypothèses génériques sur D , il existe des orbites périodiques dans D .

Sans nuire à la généralité, nous pouvons supposer que l'origine de \mathbb{R}^n se trouve dans l'intérieur de D . Alors, par stricte convexité de D , toute droite linéaire d intersecte ∂D en exactement deux points $p_1(d), p_2(d)$. On peut alors définir une application sur l'espace projectif de dimension $n - 1$

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}P^{n-1} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ d & \longmapsto & \|p_1(d) - p_2(d)\| \end{array} .$$

THÉORÈME 5.1. *Supposons que f soit une fonction de Morse. Alors D possède au moins n orbites périodiques de période 2.*

Démonstration. On a vu à la remarque 3.3 que les orbites périodiques du billard étaient des points critiques de la fonction longueur de l'orbite définie pour $q_1, \dots, q_n \in \partial D$ par

$$L(q_1, \dots, q_n) = \sum_{i=1}^{n-1} \|q_{i+1} - q_i\| .$$

Ceci se généralise sans grande difficulté en dimension supérieure. La réciproque n'est formellement pas vraie, car il faut éviter les points critiques où $q_{j+1} = q_j$ pour un certain $1 \leq j \leq n - 1$. Cependant, si une certaine droite linéaire d est un point critique de f , alors $(p_1(d), p_2(d), p_1(d))$ est clairement aussi un point critique de L , et correspond de plus bien à une orbite périodique de période 2, car $p_1(d) \neq p_2(d)$.

Ainsi, pour trouver une borne inférieure sur le nombre d'orbites périodiques de D , il suffit de trouver une borne inférieure sur le nombre de points critiques de la fonction de Morse f sur $\mathbb{R}P^{n-1}$. On utilise pour cela l'inégalité de Morse. Il nous faut donc calculer les groupes d'homologie cellulaire de $\mathbb{R}P^{n-1}$.

Soit K un corps commutatif. Comme la décomposition en CW-complexe de $\mathbb{R}P^{n-1}$ est $e^0 \sqcup e^1 \sqcup \dots \sqcup e^{n-1}$, on en tire que

$$C_q(\mathbb{R}P^{n-1}; K) = K$$

pour tout $q = 0, \dots, n - 1$. Déterminons alors l'homomorphisme de bord.

En gardant les notations de la section 4.1, considérons pour tout $q = 1, \dots, n - 1$, l'application d'attachement de la q -cellule au $(q - 1)$ -squelette de $\mathbb{R}P^{n-1}$,

$$h^q: \partial e^q \rightarrow Y^{q-1} .$$

Comme $\partial \bar{e}^q \cong S^{q-1}$ et $Y^{q-1} \cong \mathbb{R}P^{q-1}$, h^q est en fait la projection canonique de S^{q-1} sur $\mathbb{R}P^{q-1}$. D'autre part, g^q est l'application quotient

$$g^q: \mathbb{R}P^{q-1} \rightarrow \mathbb{R}P^{q-1}/\mathbb{R}P^{q-2}.$$

Mais comme $\mathbb{R}P^{q-1}/\mathbb{R}P^{q-2} \cong S^{q-1}$, on obtient

$$S^{q-1} \xrightarrow{h^q} \mathbb{R}P^{q-1} \xrightarrow{g^q} S^{q-1}.$$

On doit déterminer le degré de $g^q \circ h^q$. Si j^q est l'application quotient

$$j^q: S^{q-1} \rightarrow S^{q-1}/S^{q-2} \cong S^{q-1} \vee S^{q-1},$$

et

$$i^q: S^{q-1} \vee S^{q-1} \rightarrow S^{q-1}$$

est l'application identité sur la première sphère et l'application antipodale sur la seconde, on remarque que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} S^{q-1} & \xrightarrow{h^q} & \mathbb{R}P^{q-1} \\ j^q \downarrow & & \downarrow g^q \\ S^{q-1} \vee S^{q-1} & \xrightarrow{i^q} & S^{q-1} \end{array} .$$

Ainsi, le degré de $g^q \circ h^q$ est égal au degré de $i^q \circ j^q$. Or, comme le degré de l'application antipodale $-\text{Id}: S^{q-1} \rightarrow S^{q-1}$ est $(-1)^q$ (car c'est une composition de q réflexions dues au changement de signe d'une coordonnée), on trouve que le degré de $i^q \circ j^q$ est $1 + (-1)^q$.

Ainsi, l'homomorphisme de bord est donné par

$$\begin{array}{ccc} \partial_q: C_q(\mathbb{R}P^{n-1}; K) & \longrightarrow & C_{q-1}(\mathbb{R}P^{n-1}; K) \\ k \langle e^q \rangle & \longmapsto & \begin{cases} 2k \langle e^{q-1} \rangle & \text{si } q \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } q \text{ est impair} \end{cases} . \end{array}$$

Si l'on prend alors $K = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, on obtient le complexe de chaînes suivant

$$\dots \xrightarrow{0} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{0} \{0\}.$$

En particulier, comme dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $2 = 0$, pour tout $q = 0, \dots, n-1$, on a

$$\begin{aligned} Z_q(\mathbb{R}P^{n-1}; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) &= \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \\ B_q(\mathbb{R}P^{n-1}; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) &= \{0\}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$H_q(\mathbb{R}P^{n-1}; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z},$$

et donc, le q -ième nombre de Betti de $\mathbb{R}P^{n-1}$ est $b_q(\mathbb{R}P^{n-1}; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = 1$, pour tout $q = 0, \dots, n-1$. Ainsi, par l'inégalité de Morse, le nombre de points critiques de f est supérieur ou égal à

$$\sum_{q=0}^{n-1} b_q(\mathbb{R}P^{n-1}; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = n.$$

On a donc bien démontré au moyen de la théorie de Morse que D possédait au moins n orbites périodiques. □

REMARQUE 5.2. En fait, l'hypothèse générique que f soit une fonction de Morse n'était pas nécessaire. En effet, la théorie de Lusternik-Schnirelmann dit que la catégorie d'un espace topologique X (à savoir le cardinal minimal d'un recouvrement de X par des ouverts contractiles dans X) est une borne inférieure sur le nombre de points critiques que possède une fonction quelconque sur X . Or, la catégorie de $\mathbb{R}P^{n-1}$ est précisément n , ce qui aurait donc démontré le résultat sous des hypothèses plus faibles.

Bibliographie

- [1] M. Brown et W. D. Neumann, Proof of the Poincaré-Birkhoff Fixed Point Theorem, *Michigan Math. J.* 21-31, 1977.
- [2] O. Cornea, G. Lupton, J. Oprea et D. Tanré, *Lusternik-Schnirelmann Category*, American Mathematical Society, 2003.
- [3] B. Hasselblatt et A. Katok, *A First Course in Dynamics*, Cambridge University Press, 2003.
- [4] A. Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 2002.
- [5] Y. Matsumoto, *An Introduction to Morse Theory*, American Mathematical Society, 2002.
- [6] D. McDuff et D. Salomon, *Introduction to Symplectic Topology*, Oxford Science, 1995.
- [7] J. Milnor, *Morse Theory*, Princeton University Press, 1963.
- [8] J. Moser et E. J. Zehnder, *Notes on Dynamical Systems*, Courant Institute of Mathematical Sciences, 2005.
- [9] S. Tabachnikov, *Geometry and Billiards*, American Mathematical Society, 2005.